

第一章 概率论

自然和社会中普遍存在着两类现象：**确定性现象**和**随机现象**

1.1 随机事件和概率

1.1.1 随机事件及其运算

随机现象可以通过**随机试验**来研究, 所谓随机试验指的是对随机现象的一次观测, 例如将一枚硬币抛掷若干次, 观察正面和反面出现的情况; 在一批灯管中任意抽取一只, 测量它的寿命……随机试验具有以下特点:

- (1) 试验可以在相同条件下重复进行;
- (2) 每次试验具有多种结果, 在试验之前可明确试验的所有可能结果;
- (3) 每次试验都恰好出现这些可能结果中的一个, 但试验前不能确定究竟会出现哪一个结果.

定义 1.1.1. 随机试验 E 的每个可能结果称为**样本点**, 记为 ω . 全体样本点构成的集合称为试验 E 的**样本空间**, 记为 Ω .

定义 1.1.2. 样本空间 Ω 的子集 E 称为**随机事件**, 简称**事件**, 只包含一个样本点的事件被称为基本事件.

事件 A 在一次试验中发生当且仅当 A 中的某个样本点发生. Ω 作为自身的子集包含了所有样本点, 所以它总会发生, 故称 Ω 为**必然事件**; 空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点, 在每次试验中都不会发生, 故称 $\emptyset$ 为**不可能事件**.

定义 1.1.3. 对于事件 A, B . 把“ A 与 B 至少有一个发生”所对应的事件称为 A 与 B 的**并事件**或**和事件**, 记作 $A \cup B$ 或 $A + B$; 把“ A 与 B 同时发生”所对应的事件称为 A 与 B 的**交事件**或**积事件**, 记作 $A \cap B$ 或 AB .

定义 1.1.4. 若事件 A, B 在一次试验中不能同时发生, 则称事件 A, B **互不相容**或**互斥**. 若事件 A, B 在一次试验中总是恰好有一个发生, 则称事件 A, B **相互对立**, 记事件 A 的对立事件为 $\bar{A}$.

1.1.2 概率的定义与性质

研究随机现象, 最重要的是知道随机事件发生的可能性大小. 概率可以被认为是一个事件发生, 一种情况出现的可能性大小的数量指标, 它介于 0 到 1 之间.

定义 1.1.5. 设 E 是随机试验, Ω 为其样本空间, $\mathcal{F}$ 为 Ω 的一个事件域¹. 对于每个事件 $A \in \mathcal{F}$, 若对应一个实数 $P(A) \in [0, 1]$, 并且满足:

- (1) 非负性: $P(A) \geq 0$;

¹事件域指的是, 在一次随机试验中, 允许我们讨论并赋予概率的那些事件所组成的集合. 在有限样本空间中, 通常所有子集都可以作为事件, 此时 $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(2) 规范性: $P(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots$ 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 P 为 $\mathcal{F}$ 上的**概率**, 称 $P(A)$ 为**事件 A 的概率**.

问题 1.1 概率 P 是一个数吗? 为什么?

从样本点的角度出发, 则每个样本点也有自己的概率 (有限样本空间)

$$P(\omega_i) \geq 0, \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1.$$

事件 A 的概率等于它包含的所有样本点的概率和

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

1.1.3 古典概型

有一类随机试验具有如下特点: 样本空间只含有有限个样本点, 且样本空间中每个样本点发生的可能性相同. 把这类随机试验称为等可能概型, 由于它是概率论发展初期的主要研究对象, 又称为**古典概型**.

设随机试验 E 为等可能概型, 若其样本空间 Ω 含有 n 个样本点, 而事件 A 含有 m 个样本点, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

1.1.4 条件概率与独立性

定义 1.1.6. 对于事件 A, B , 称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的概率.

通俗地讲, $P(B|A) \neq P(B)$ 意味着“事件 A 是否发生”这一信息会改变我们对事件 B 发生概率的判断. 当 $P(B|A) = P(B)$ 时则不会, 这时就说事件 A 与事件 B 相互独立.

定义 1.1.7. 若事件 A, B 满足

$$P(A)P(B) = P(AB)$$

那么称事件 A, B **相互独立**.

$P(A)P(B) = P(AB)$ 同时蕴含了 $P(A | B) = P(A), P(B | A) = P(B)$, 是更为合理的定义.

定义 1.1.8. 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, P(A_i)P(A_j) = P(A_i A_j)$$

那么称这些事件**两两独立**.

若从这些事件中任取 k 个: $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, 满足

$$P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) = P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k})$$

那么称这些事件**相互独立**.

定义 1.1.9. 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 S 的一个划分, 则对事件 B 有

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

公式 (贝叶斯公式) 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 S 的一个划分, 则对事件 B 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)} (i = 1, 2, \dots, n)$$

问题 1.2 试推导全概率公式与贝叶斯公式.

第一章 概率论

1.1 随机事件和概率

习 题

A 组

- 【2022 全国乙卷理 10】**某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘,各盘比赛结果相互独立.已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1, p_2, p_3 , 且 $p_3 > p_2 > p_1 > 0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p , 则

(A) p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关 (B) 该棋手在第二盘与甲比赛, p 最大

(C) 该棋手在第二盘与乙比赛, p 最大 (D) 该棋手在第二盘与丙比赛, p 最大
- 【2010 江西 11】**一位国王的铸币大臣在每箱 100 枚的硬币中各掺入了一枚劣币, 国王怀疑大臣作弊, 他用两种方法来检测. 方法一: 在 10 箱中各任意抽查一枚; 方法二: 在 5 箱中各任意抽查两枚. 国王用方法一、二能发现至少一枚劣币的概率分别记为 p_1 和 p_2 , 则

(A) $p_1 = p_2$ (B) $p_1 < p_2$

(C) $p_1 > p_2$ (D) 以上三种情况都有可能
- 【2024 上海春考 15】**现有四个礼品盒, 前三个礼品盒中分别装了一个中国结、一本书以及一个笔袋, 第四个礼品盒中三样均有. 现随机抽取一个礼品盒, 设事件 A 为抽中的盒子中有中国结, 事件 B 为抽中的盒子中有书, 事件 C 为抽中的盒子中有笔袋, 则下列命题中成立的为

(A) A 与 B 互斥 (B) A 与 B 相互独立

(C) A 与 $B \cup C$ 互斥 (D) A 与 $B \cap C$ 相互独立
- 【2021 新高考 I 卷 8】**有 6 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中放回地随机抽取两次, 每次取 1 个球. 甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”, 乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”, 丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”, 丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”, 则

(A) 甲与丙相互独立 (B) 甲与丁相互独立 (C) 乙与丙相互独立 (D) 丙与丁相互独立
- 【2026 “漫游数海” 预测卷 10】(多选)** 设 A, B 为样本空间中的两个事件, $P(A) > 0, P(B) > 0$, 下列结论中可能成立的是

(A) $P(AB) > P(B|A)$ (B) $P(AB) < P(B|A)$ (C) $P(B) > P(B|A)$ (D) $P(B) < P(B|A)$
- 【2025 “fiddie” 模拟考 10】(多选)** 临近期末考试, 同学甲每天至少复习数学和物理中的一门课. 在每天, 同学甲复习数学的概率为 0.8, 复习物理的概率为 0.7, 且不同的日期复习的情况相互独立, 则

- (A) 一天之中, 同学甲既复习物理也复习数学的概率为 0.56
 (B) 一天之中, 同学甲仅复习数学的概率为 0.3
 (C) 五天之中, 同学甲复习数学的天数的均值为 4
 (D) 五天之中, 同学甲仅复习物理的天数的均值为 1

7. 【2020 新高考 I 卷 12】(多选) 随机变量 X 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, n, P(X=i)=p_i > 0$, 定义

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

则下列命题正确的是

- (A) 若 $n=1$, 则 $H(X)=0$
 (B) 若 $n=2$, 则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大
 (C) 若 $p_1=p_2=\dots=p_n$, 则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大
 (D) 若 $n=2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, m$, 且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}$ ($j=1, 2, \dots, m$), 则 $H(X) \leq H(Y)$
8. 【2023 新高考 II 卷 12】(多选) 在信道内传输 0,1 信号, 信号的传输相互独立. 发送 0 时, 收到 1 的概率为 α ($0 < \alpha < 1$), 收到 0 的概率为 $1-\alpha$; 发送 1 时, 收到 0 的概率为 β ($0 < \beta < 1$), 收到 1 的概率为 $1-\beta$. 考虑两种传输方案: 单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次, 三次传输是指每个信号重复发送 3 次, 收到的信号需要译码, 译码规则如下: 单次传输时, 收到的信号即为译码; 三次传输时, 收到的信号中出现次数多的即为译码, 则下列命题正确的是
- (A) 采用单次传输方案, 若依次发送 1,0,1, 则依次收到 1,0,1 的概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$
 (B) 采用三次传输方案, 若发送 1, 则依次收到 1,0,1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2$
 (C) 采用三次传输方案, 若发送 1, 则译码为 1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2 + (1-\beta)^3$
 (D) 当 $0 < \alpha < 0.5$ 时, 若发送 0, 则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率
9. 已知有限样本空间中有事件 A, B , 且该样本空间内所有样本点发生的概率均非零. 解答下述问题:

(1) 证明: 下述四个命题等价:

(a). A, B 相互独立 (b). $\bar{A}, \bar{B}$ 相互独立 (c). $A, \bar{B}$ 相互独立 (d). $\bar{A}, B$ 相互独立

(2) 证明: “ $P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = 1$ ” 是 “ A, B 互为对立事件” 的充要条件;

(3) 证明: 事件 A, B 相互独立的充分条件可以是

$$P^2(AB) + P^2(\bar{A}B) + P^2(A\bar{B}) + P^2(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

10. 已知甲袋中有大小质地完全相同的 3 个红球和 3 个黑球, 乙袋中有大小质地完全相同的 2 个红球和 3 个黑球. 现随机地选择一个袋子, 并从中不放回地依次随机摸出两个球.

(1) 已知第一次摸到的是红球, 求第二次摸到的是红球的概率;

(2) 某同学认为, 如果第一次摸到的红球来自甲袋, 则第二次继续摸到红球的概率是 $\frac{2}{5}$; 如果

第一次摸到的红球来自乙袋, 则第二次继续摸到红球的概率是 $\frac{1}{4}$, 故所求概率为

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{40}$$

他的想法正确吗? 请说明理由.

11. 已知某地每天下雨的概率均为 0.7. 现有两位天气预报专家甲、乙, 其中无论第二天是否真的下雨, 甲预测正确的概率均为 0.9; 而乙专家在第二天真的要下雨时, 预测正确的概率为 0.8, 当第二天不下雨时, 预测正确的概率为 0.7.

(1) 已知乙专家预测明天要下雨, 求明天真的下雨的概率;

(2) 已知两位专家的预测结果独立, 若他们同时预测明天要下雨, 求明天真的下雨的概率.

12. 一位无症状的男性的罕见病检查呈阳性. 已知此罕见病在男性群体中的患病率为 x ; 患病人群中, 检查呈阳性的概率为 y ; 非患病人群中, 检查呈阴性的概率为 z ;

(1) 当 $x = 1\%$, $y = 90\%$, $z = 91\%$ 时, 求这位男性患罕见病的概率;

(2) 当 $x = 0.1\%$, $y = z = 99\%$ 时, 重新计算患病概率;

(3) 在第 (1) 小问的基础上, 该男性检查呈阳性后, 又被要求复检, 此时仍检查呈阳性, 求他患罕见病的概率.

13. 假设你正在参加一档电视节目, 你被要求在三扇门中选择一扇, 其中一扇后面有一辆玛莎拉蒂; 另外两扇后面则是山羊, 你选择的门后的物品将成为你的参与奖励. 你选择了一道门, 然后知道门后有什么的主持人开启了另一扇后面有山羊的门, 他问道: “你想转换自己的选择吗?” 请问转换你的选择对你来说是一种优势吗?

注: 这一问题的明确陈述如下:

(1) 有三扇门, 只有一扇门有汽车, 其余两扇门的都是山羊;

(2) 汽车事前被放置于三扇门的其中一扇后面;

(3) 参赛者在三扇门中挑选一扇. 他在挑选前并不知道任意一扇门后面是什么;

(4) 主持人知道每扇门后面有什么;

(5) 如果参赛者挑了一扇有山羊的门, 主持人必须挑另一扇有山羊的门;

(6) 如果参赛者挑了一扇有汽车的门, 主持人等可能地在另外两扇有山羊的门中挑一扇门;

(7) 参赛者会被问是否保持他的原来选择, 还是转而选择剩下的那一扇门;

(8) 转换选择可以增加参赛者拿到汽车的机会吗?

14. 【2019 全国 I 卷理 15】甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 各场比赛结果相互独立, 求甲队以 4:1 获胜的概率.

15. 【2008 湖南理 15】对有 n ($n \geq 4$) 个元素的总体 $\{1, 2, \dots, n\}$ 进行抽样, 先将总体分成两个子总体 $\{1, 2, \dots, m\}$ 和 $\{m+1, m+2, \dots, n\}$ (m 是给定的正整数, 且 $2 \leq m \leq n-2$), 再从每个子总体中各随机抽取 2 个元素组成样本, 用 P_{ij} 表示元素 i 和 j 同时出现在样本中的概率, 求 P_{1n} 与
- $$\sum_{1 \leq i < j \leq n} P_{ij}$$

16. 有 $m(m \geq 3)$ 个盲盒, 其中有 $n(1 \leq n \leq m-1)$ 个内有奖品, 若抽奖者选定了一个盲盒但未打开时, 组织方 (知道盲盒内部是否有奖品) 打开了一个没有奖品的盲盒, 此时抽奖者重新选定另外一个盲盒后打开, 记此时中奖的概率为 p_1 ; 若抽奖者选定了一个盲盒后未打开时有个未选的盲盒因被风吹落而意外打开, 且抽奖者发现其内部没有奖品, 此时抽奖者重新选定另外一个盲盒后打开, 记此时中奖的概率为 p_2 , 比较 p_1 与 p_2 的大小.
17. 【2024 全国甲卷理 16】有 6 个相同的球, 其上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中无放回地随机取 3 次, 每次取 1 个球. 设 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值, 求 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率.
18. 【2020 考研数学一 7】设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 求 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率.
19. 【2022 考研数学一 16】设 A, B, C 为随机事件, 且 A 与 B 互斥, A 与 C 互斥, B 与 C 相互独立, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, 求 $P(B \cup C | A \cup B \cup C)$.
20. 证明: 对事件 $E_1, E_2, \dots, E_n$, 有
- $$P(E_1 E_2 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2 | E_1)P(E_3 | E_1 E_2) \cdots P(E_n | E_1 \cdots E_{n-1})$$
- 这称为概率乘法公式.
21. 一副扑克牌去掉大小王共 52 张.
- (1) 现将这 52 张牌洗匀, 依次从中不放回地随机抽取 2 张, 记事件 A 为“第一次抽到的牌为黑桃 A”, 事件 B 为“第二次抽到的牌为红桃 2”, 判断事件 A, B 是否独立;
 - (2) 现不断从中不放回地随机抽取牌, 直到出现第一张 3 为止, 接下来再抽一张牌, 问这张牌是黑桃 A 的概率大还是红桃 2 的概率大?
 - (3) 现不断从中不放回地随机抽取牌, 直到出现第一张 A 为止, 接下来再抽一张牌, 问这张牌是黑桃 A 的概率大还是红桃 2 的概率大?
 - (4) 现从中随机抽取 5 张. 记事件 A 为“抽到的牌中有 Q”, B 为“抽到的牌中有 K”.
 - i. 比较 $P(AB)$ 与 $P(A)P(B)$ 的大小, 并判断事件 A, B 是否独立;
 - ii. 求事件“抽到的牌中至少有一对同色 Q, K”的概率. (只需写出表达式, 无需进一步计算.)
22. 现对一类摸球问题进行研究:
- (1) 假设袋中有 a 个白球, b 个红球, 这些球除颜色外无差异. 每次不放回地从袋中随机取出一个球, 直到取出所有的球.
 - i. 设第 k 次取出的球是红球的概率为 p_k , 当 k 变化时, p_k 会随之变化吗? 请说明理由;
 - ii. 假设 $a = 90, b = 10$, 当其中一种颜色的球被全部取出时, 提前终止操作. 求操作终止时, 恰好是红球被全部取出的概率;
 - iii. 设操作终止时, 盒中剩下球数为 X , 求 $P(X = 1)$ 与 EX ;
 - (2) 【2024 广东一模 18 (2) 改编】假设袋中有 10 个白球, 10 个红球, 20 个蓝球, 这些球除颜色外无差异. 每次不放回地从袋中随机取出一个球, 当其中一种颜色的球被全部取出时, 提前终止操作. 求操作终止时, 恰好是红球被全部取出的概率;

23. 甲和乙两人轮流抛硬币, 正面朝上的概率均为 $1/2$ 且相互独立. 若正面朝上则抛硬币的人记一分.

(1) 如果甲共抛 $n+1$ 次, 总得分为 X , 乙共抛 n 次, 总得分为 Y , 求 $P(X > Y)$.

(2) 如果甲共抛 $n+2$ 次, 总得分为 X , 乙共抛 n 次, 总得分为 Y , 求 $P(X > Y)$.

24. 【2026 福建省质检 18】某盲盒商店调查数据显示, 顾客一次性购买某种文创盲盒数量的分布列为

X	0	1	2	3
P	$k(1-\alpha)^2$	$k\alpha$	k	$k(1-\alpha)$

其中 $k > 0, 0 < \alpha < 1$.

(1) 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 求顾客一次性购买该种文创盲盒数量的均值;

(2) 已知该种文创盲盒分为封面款与非封面款两类, 且每个盲盒为封面款的概率为 $\frac{1}{3}$, 每个盲盒是否为封面款相互独立. 若顾客一次性购买的盲盒中, 封面款的数量大于非封面款的数量, 则称此客户为幸运客户. 先从顾客中随机选取一人,

i. 求该顾客为幸运顾客的概率 $f(\alpha)$;

ii. 若该顾客是幸运顾客, 他购买的盲盒全部是封面款的概率不超过 $\frac{1}{2}$, 求 α 的取值范围.

25. 一辆汽车上有 n 个座位, 编号从 1 到 n . 现在编号为 1 到 n 的乘客依次上车按照如下规则落座: 编号为 1 的乘客随机等可能的选择空座位坐下, 编号为 $k(2 \leq k \leq n)$ 的乘客上车后先观察 k 号座位是否有人落座, 如果有, 那么他从剩下的空座位中随机等可能的选择一个并坐下, 否则他就在 k 号座位坐下.

(1) 当 $n=4$ 时, 求 4 号乘客坐在编号 4 号座位上的概率;

(2) 若编号为 i 的乘客坐在编号为 i 的座位上, 则认为编号为 i 的乘客是满意的, 设 X 为满意的乘客数量, 当 $n=4$ 时, 求 X 的分布列与数学期望.

26. 设古典概型的样本空间 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, 事件 $A, B \subset \Omega$, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$.

(1) 当 $n=10$ 时, 构造相互独立的事件 A, B ;

(2) 证明: “存在相互独立的事件 A, B ” 的充要条件是 “ n 是合数”.

27. 【2020 全国 I 卷理 19】甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛, 约定赛制如下: 累计负两场者被淘汰; 比赛前抽签决定首先比赛的两人, 另一人轮空; 每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛, 负者下一场轮空, 直至有一人被淘汰; 当一人被淘汰后, 剩余的两人继续比赛, 直至其中一人被淘汰, 另一人最终获胜, 比赛结束. 经抽签, 甲、乙首先比赛, 丙轮空. 设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求需要进行第五场比赛的概率;

(2) 求丙最终获胜的概率.

28. 【2006 北京 18】某公司招聘员工, 指定三门考试课程, 有两种考试方案. 方案一: 考试三门课程, 至少有两门及格为考试通过; 方案二: 在三门课程中, 随机选取两门, 这两门都及格为考试通过. 假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是 a, b, c , 且三门课程考试是否及格相互之间没有影响. 分别求该应聘者用方案一和方案二时考试通过的概率并比较二者大小;

29. 【2021 北京 18】在核酸检测中,“ k 合 1”混采核酸检测是指:先将 k 个人的样本混合在一起进行 1 次检测,如果这 k 个人都没有感染新冠病毒,则检测结果为阴性,得到每人的检测结果都为阴性,检测结束;如果这 k 个人中有人感染新冠病毒,则检测结果为阳性,此时需对每人再进行 1 次检测,得到每人的检测结果,检测结束. 现对 100 人进行核酸检测,假设其中只有 2 人感染新冠病毒,并假设每次检测结果准确.

(1) 将这 100 人随机分成 10 组,每组 10 人,对每组都采用“10 合 1”混采核酸检测.

- i. 如果感染新冠病毒的 2 人在同一组,求检测的总次数;
- ii. 已知感染新冠病毒的 2 人分在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$. 设 X 是检测的总次数,求 X 的分布列与数学期望 EX .

(2) 将这 100 人随机分成 20 组,每组 5 人,且对每组都采用“5 合 1”混采核酸检测. 设 Y 是检测的总次数,试判断数学期望 EY 与 (1) 中 EX 的大小. (结论不要求证明)

30. 【2009 江苏 23】对于正整数 n ,用 T_n 表示关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有实根的有序数组 (a, b) 的组数,其中 $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ (a, b 可以相等);对于随机选取的 $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ (a, b 可以相等),记 P_n 为关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有实数根的概率.

(1) 求 T_{n^2} 和 P_{n^2} ;

(2) 求证: 对任意正整数 n , 有 $P_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

31. 【2011 安徽 20】工作人员需进入核电站完成某项具有高辐射危险的任务,每次只派一个人进去,且每个人只派一次,工作时间不超过 10 分钟,如果前一个人 10 分钟内不能完成任务则撤出,再派下一个人. 现有甲、乙、丙三人可派,他们各自能完成任务的概率分别 p_1, p_2, p_3 . 假设 p_1, p_2, p_3 互不相等,各人能否完成任务是相互独立的.

(1) 求任务能被完成的概率;

(2) 若按某指定顺序派人,这三个人各自能完成任务的概率依次为 q_1, q_2, q_3 , 其中 q_1, q_2, q_3 是 p_1, p_2, p_3 的一个排列. 求所需派出人员数目 X 的分布列和数学期望;

(3) 假定 $1 > p_1 > p_2 > p_3$. 试分析以怎样的先后顺序派出人员,可使 EX 最小.

(4) (选做) 能否将 (3) 的结论推广到一般的正整数 n 的情形? 即对派出 n 个人员的情形建立类似的结论. 如果能, 尝试用数学归纳法或其它方法进行证明.

32. 【2010 安徽 21】品酒师需要定期接受酒味鉴别功能测试,一种常用测试方法如下: 拿出 n 瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝,要求其按品质优劣为它们排序,经过一段时间,等其记忆淡忘后,再让其品尝这 n 瓶酒,并重新按品质优劣为它们排序,这称为一轮测试,根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为其评分. 现设 $n = 4$, 分别以 a_1, a_2, a_3, a_4 表示第一次排序时被排为 1, 2, 3, 4 的四种酒在第二次排序时的序号,并令 $X = |1 - a_1| + |2 - a_2| + |3 - a_3| + |4 - a_4|$.

(1) 假设 X 等可能地为 1, 2, 3, 4 的诸排列,求 X 的分布列;

(2) 某品酒师在相继进行的三轮测试中,都有 $X \leq 2$, 分析该品酒师的酒味鉴别功能.

33. 【2024 新高考 II 卷 18】某投篮比赛分为两个阶段,每个参赛队由两名队员组成,比赛规则如下: 第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次,若 3 次都未投中,则该队被淘汰,比赛成绩为 0 分;若至少投中 1 次,则该队进入第二阶段. 第二阶段由该队的另一名队员投篮 3 次,每次投篮投中得 5

分, 未投中得 0 分, 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和. 某参赛队由甲、乙两名队员组成, 设甲每次投中的概率为 p , 乙每次投中的概率为 q , 各次投中与否相互独立.

- (1) 若 $p = 0.4, q = 0.5$, 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率;
- (2) 假设 $0 < p < q$,
 - i. 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?
 - ii. 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

34. 【2019 全国 I 卷 21】 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验, 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药, 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β , 一轮试验中甲药的得分记为 X .

- (1) 求 X 的分布列;
- (2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, $p_i (i = 0, 1, \dots, 8)$ 表示 “甲药累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效” 的概率. 已知

$$p_0 = 0, p_8 = 1, p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} (i = 1, 2, \dots, 7)$$

其中 $a = P(X = -1), b = P(X = 0), c = P(X = 1)$, 假设 $\alpha = 0.5, \beta = 0.8$,

- i. 证明: $\{p_{i+1} - p_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 7)$ 为等比数列;
- ii. 求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

35. 【2020 江苏 23】 甲袋中装有 2 个黑球和 1 个白球, 乙袋中装有 3 个白球. 现从甲、乙两袋中各任取一球交换放入另一袋, 重复 n 次. 记甲袋中黑球个数为 X_n , 恰有 2 个黑球的概率为 p_n , 恰有 1 个黑球的概率为 q_n .

- (1) 求 p_1, q_1 和 p_2, q_2 ;
- (2) 求 $2p_n + q_n$ 与 $2p_{n-1} + q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 (用 n 表示).

36. 【2023 新高考 I 卷 21】 甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 若命中则此人继续投篮, 否则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

- (1) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;
- (2) 记前 n 次中甲投篮的次数为 Y , 求 EY .

37. 【2025 新高考 II 卷 19】 甲、乙两位同学进行乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分, 负者不得分. 设每个球甲获胜的概率为 $p \left(\frac{1}{2} < p < 1 \right)$, 乙获胜的概率为 $1 - p$, 且各球胜负独立. 对正整数 $k \geq 2$, 记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率, q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

- (1) 求 p_3, p_4 (用 p 表示);

(2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$, 求 p ;

(3) 证明: 对任意正整数 m , 有

$$p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$$

38. 【2021 新高考 II 卷 21】 假设开始时有一个微生物个体 (称为第 0 代), 该个体繁殖的若干个体形成第 1 代, 第 1 代诸个体繁殖的若干个体形成第 2 代……假设诸个体繁殖的个体数相互独立且分布列相同, 记第 1 代微生物的个体总数为 X , X 的分布列为 $P(X=i)=p_i > 0, i=0, 1, 2, 3$.

(1) 以 p 表示这种微生物最终消亡的概率. 已知 p 是关于 x 的方程 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的最小正根. 证明: 当 $E(X) \leq 1$ 时, $p=1$; 当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$;

(2) 试述 (2) 中待证结论之意义.

1. 该棋手与甲、乙、丙三位棋手的比赛顺序共有 6 种可能：甲乙丙、甲丙乙、乙甲丙、乙丙甲、丙甲乙、丙乙甲，该棋手连胜两盘。可以是第一、第二盘连胜（此时第 3 盘胜负均可），或第一盘输但第二第三盘连胜。

思路 1：直接计算。该棋手在第二盘与甲比赛时，考虑“乙甲丙”与考虑“丙甲乙”是等价的。此时，

$$p = p_2 p_1 + (1 - p_2) p_1 p_3 = p_1 (p_2 + p_3) - p_1 p_2 p_3,$$

同理，该棋手在第二盘与乙比赛时，

$$p = p_2 (p_1 + p_3) - p_1 p_2 p_3.$$

该棋手在第二盘与丙比赛时，

$$p = p_3 (p_1 + p_2) - p_1 p_2 p_3.$$

显然，由 $p_3 > p_2 > p_1 > 0$ 可知，

$$p_1 (p_2 + p_3) < p_2 (p_1 + p_3) < p_3 (p_1 + p_2).$$

从而该棋手在第二盘与丙比赛时， p 最大，故正确选项为 D。

思路 2：特殊值法。为计算方便，可以把 p_1, p_2, p_3 设成具体的数值。

设 $p_1 = 0.3, p_2 = 0.4, p_3 = 0.5$ ，则该棋手在第二盘分别与甲、乙、丙比赛时， p 的值分别为 0.42, 0.52, 0.58，可直接排除选项 B 和 C，且 p 的值与该棋手甲、乙、丙的比赛次序有关，进而排除选项 A，从而正确选项为 D。

【实测数据】阅卷数据如下。

地区	平均分	标准差	难度	区分度	选 A(%)	选 B(%)	选 C(%)	选 D(%)
河南理	2.86	2.47	0.57	0.27	11.12	17.79	13.88	57.16
陕西理	2.79	2.48	0.56	—	11.0	18.1	14.9	55.9

2. **B.** 在每箱中抽查一枚，找到劣币的概率是 $p = 0.01$ 。而在每箱中抽查两枚，找到劣币的概率是 $\frac{C_{99}^1}{C_{100}^2} = 0.02 = 2p$ 。

所以，方法一能找到至少一枚劣币的概率是 $p_1 = 1 - (1 - p)^{10}$ 。方法二能找到至少一枚劣币的概率是 $p_2 = 1 - (1 - 2p)^5$ 。因为

$$p_1 = 1 - (1 - p)^{10} = 1 - (1 - 2p + p^2)^5 < 1 - (1 - 2p)^5 = p_2,$$

所以 $p_1 < p_2$ 。

3. **B.** 记四个礼品盒分别为 1, 2, 3, 4，则 $A = \{1, 4\}, B = \{2, 4\}, C = \{3, 4\}$ 。于是 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ ， $P(AB) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$ 。

因为 $P(A)P(B) = \frac{1}{4} = P(AB)$ ，所以 A 与 B 相互独立。看其余选项：因为 $AB = \{4\} \neq \emptyset$ ，所以 A 与 B 不互斥，A 错误。因为 $A \cap (B \cup C) = \{4\} \neq \emptyset$ ，所以 A 与 $B \cup C$ 不互斥，C 错误。对于 D，可知 $B \cap C = \{4\}, P(A(B \cap C)) = \frac{1}{4}$ ，而 $P(A)P(B \cap C) = \frac{1}{8}$ ，二者不相等，所以 A 与 $B \cap C$ 不相互独立，D 错误。

4. **B.** 容易算得 $P(\text{甲}) = \frac{1}{6}, P(\text{乙}) = \frac{1}{6}, P(\text{丙}) = \frac{5}{36}, P(\text{丁}) = \frac{1}{6}, P(\text{甲丙}) = 0, P(\text{甲丁}) = \frac{1}{36}, P(\text{乙丙}) = \frac{1}{36}, P(\text{丙丁}) = 0$ ，经检验知， $P(\text{甲丁}) = P(\text{甲})P(\text{丁})$ 。所以甲、丁独立。B 选项正确。

实测数据: (广东) 本题难度 0.07, 区分度 -0.04. (福建) 本题难度 0.05, 区分度 0.01, 其中历史组难度 0.05, 区分度 -0.01; 物理组难度 0.05, 区分度 0.03.

5. **BCD.** 因为 $P(A) > 0$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 从而 $P(AB) = P(A)P(B|A)$, 于是 $P(AB) \leq P(B|A)$. 因此 $P(AB) > P(B|A)$ 不可能成立, A 错误.

当 $P(A) < 1$ 时, $P(AB) < P(B|A)$, 所以 B 可能成立.

若 $A \subseteq B$ 且 $0 < P(B) < 1$, 则 $P(B|A) = 1 > P(B)$, 所以 D 可能成立.

若 A 与 B 互斥, 且 $P(A), P(B) > 0$, 则 $P(B|A) = 0 < P(B)$, 所以 C 可能成立.

6. **BCD.** 设事件 M 表示“当天复习数学”, 事件 P 表示“当天复习物理”. 因为同学甲每天至少复习这两门课中的一门, 所以 $P(M \cup P) = 1$, 由容斥原理得

$$P(MP) = P(M) + P(P) - P(M \cup P) = 0.5.$$

因此, 一天之中既复习数学又复习物理的概率为 0.5, A 选项错误. 一天之中仅复习数学的概率为 $P(M\bar{P}) = P(M) - P(MP) = 0.3$, B 选项正确.

五天之中, 同学甲复习数学的天数为随机变量 $X \sim B(5, 0.8)$, 故 $E(X) = 4$, C 选项正确.

五天之中, 同学甲仅复习物理的天数为随机变量 $Y \sim B(5, 0.2)$, 故 $E(X) = 1$, D 选项正确.

Fiddie 评: 本题改编自【2024 港澳台华侨联考 20】.

7. **AC.** 当 $n = 1$ 时, 只能有 $p_1 = 1$, 从而 $H(X) = 0$. 故 A 正确.

当 $n = 2$ 时, 设 $p_1 = t$, 则 $p_2 = 1 - t$, $H(X) = -t \log_2 t - (1 - t) \log_2 (1 - t) = f(t)$. $f(t)$ 关于 $t = \frac{1}{2}$ 对称, 它一定不单调递增, 所以 B 错误.

若 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$, 则 $H(X) = -n \cdot \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n$. 其随 n 增大而增大, 所以 C 正确.

对于 D, 已知 $H(Y) = -(p_1 + p_{2m}) \log_2 (p_1 + p_{2m}) - \cdots - (p_m + p_{m+1}) \log_2 (p_m + p_{m+1})$

而 $(p_1 + p_{2m}) \log_2 (p_1 + p_{2m}) > p_1 \log_2 p_1 + p_{2m} \log_2 p_{2m}$, 故 $H(X) > H(Y)$, D 错误.

8. **ABD.** 对于 A, 采用单次传输方案时, 发送 1, 0, 1, 依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1 - \beta)(1 - \alpha)(1 - \beta) = (1 - \alpha)(1 - \beta)^2$, 所以 A 正确.

对于 B, 采用三次传输方案, 若发送 1, 则依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1 - \beta) \cdot \beta \cdot (1 - \beta) = \beta(1 - \beta)^2$, 所以 B 正确.

对于 C, 采用三次传输方案, 若发送 1, 则译码为 1 表示收到的三个信号中至少有两个 1, 故其概率为 $C_3^2(1 - \beta)^2\beta + (1 - \beta)^3 = 3\beta(1 - \beta)^2 + (1 - \beta)^3$. 所以 C 错误.

对于 D, 若发送 0, 则采用单次传输方案译码为 0 的概率为 $1 - \alpha$. 采用三次传输方案译码为 0 的概率为 $C_3^2(1 - \alpha)^2\alpha + (1 - \alpha)^3 = (1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)$. 两者之差为 $(1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha) - (1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha)(1 + 2\alpha)$. 当 $0 < \alpha < 0.5$ 时, 上式大于 0, 故 D 正确.

9.

10.

11. (1) 记事件 R 表示“明天下雨”，事件 E 表示“乙预测明天下雨”。由题意， $P(R) = 0.7, P(\bar{R}) = 0.3, P(E | R) = 0.8, P(E | \bar{R}) = 0.3$ 。

由贝叶斯公式，

$$P(R | E) = \frac{P(R)P(E | R)}{P(R)P(E | R) + P(\bar{R})P(E | \bar{R})} = \frac{56}{65}.$$

- (2) 记事件 F 表示“甲预测明天下雨”，则 $P(F | R) = 0.9, P(F | \bar{R}) = 0.1$ 。

“两位专家的预测结果独立”指的是在给定天气情况时两人的预测相互独立，所以

$$P(EF | R) = P(E | R)P(F | R) = 0.8 \times 0.9 = 0.72,$$

$$P(EF | \bar{R}) = P(E | \bar{R})P(F | \bar{R}) = 0.3 \times 0.1 = 0.03.$$

因而

$$\begin{aligned} P(R | EF) &= \frac{P(R)P(EF | R)}{P(R)P(EF | R) + P(\bar{R})P(EF | \bar{R})} \\ &= \frac{56}{57}. \end{aligned}$$

12. 设事件 D 表示“患病”，事件 P 表示“检查呈阳性”，则 $P(D) = x, P(P | D) = y, P(P | \bar{D}) = 1 - z$ 。由贝叶斯公式，

$$P(D | P) = \frac{P(D)P(P | D)}{P(D)P(P | D) + P(\bar{D})P(P | \bar{D})}.$$

- (1) 当 $x = 1\%, y = 90\%, z = 91\%$ 时，

$$P(D | P) = \frac{0.01 \times 0.9}{0.01 \times 0.9 + 0.99 \times 0.09} = \frac{10}{109}.$$

- (2) 当 $x = 0.1\%, y = z = 99\%$ 时，

$$P(D | P) = \frac{0.001 \times 0.99}{0.001 \times 0.99 + 0.999 \times 0.01} = \frac{1}{11}.$$

- (3) 设两次检查在已知是否患病的条件下相互独立。若两次都呈阳性，记该事件为 $P_1 P_2$ ，则

$$P(P_1 P_2 | D) = y^2, P(P_1 P_2 | \bar{D}) = (1 - z)^2.$$

所以

$$P(D | P_1 P_2) = \frac{P(D)P(P_1 P_2 | D)}{P(D)P(P_1 P_2 | D) + P(\bar{D})P(P_1 P_2 | \bar{D})}.$$

代入第 (1) 小问中的数据，得

$$P(D | P_1 P_2) = \frac{0.01 \times 0.9^2}{0.01 \times 0.9^2 + 0.99 \times 0.09^2} = \frac{100}{199}.$$

评：很多人会误以为：“检测阳性，而且检测对病人的阳性率高达 90%，那么患病概率应该也很高。”但结果只有大约 9%。

	患病	未患病
检测呈阳性	正确	误诊（假阳性）
检测呈阴性	漏诊（假阴性）	正确

有两个指标来衡量检测的性能：

灵敏度被定义为：在真正患病的人中，检测结果呈阳性的概率有多大，即 $P(T | D)$ 。它反映的是检测发现患者的能力。灵敏度越高，漏诊率越低。

特异度被定义为：在真正未患病的人中，检测结果呈阴性的概率有多大，即 $P(\bar{T} | \bar{D})$ 。它反映的是检测排除健康者的能力。特异度越高，误诊率越低。

利用“假想总体”来直观感受上述问题。假设有 10000 人，根据题意可求得：

	患病	未患病	总计
检测呈阳性	90	891	981
检测呈阴性	10	9009	9019
总计	100	9900	10000

$$P(D | T) \approx \frac{90}{981} \approx 9.17\%.$$

通过观察数据，我们得知原因出在两个方面：

- (1) 这一罕见病在总体中的患病率并不高，患病的人数远远少于没患病人数；
- (2) 误检率只有 9%，假阳性的人数远多于真正患病的人数。

问题 (2) 亦是相同意思，即使检测的灵敏度和特异度都达到了 99%，但由于群体患病率更低，假阳性的人数依然远多于真正患病的人数。这意味着当基础患病率极低时，即使检测很准，阳性也未必意味着很大概率患病。

设患病率为 p ，灵敏度为 $s = P(T | D)$ ，特异度为 $t = P(\bar{T} | \bar{D})$ ，则阳性预测值为

$$P(D | T) = \frac{ps}{ps + (1-p)(1-t)}$$

当 p 很小时，分母中的 $(1-p)(1-t)$ 往往占主导地位。也就是说，即使灵敏度较高，只要假阳性率 $1-t$ 不够小，健康人群中的假阳性人数仍可能远多于真正患者，从而使阳性结论的可信度偏低。

因此，在低患病率情形下，若希望“检出阳性”能够更有说服力，就应优先压低假阳性率，也就是优先提高特异度。

当然，若采用分层筛查，则第一层通常仍强调高灵敏度以减少漏检，再由第二层高特异度检测负责确认。

在进行疾病筛查时，既要尽可能不漏掉潜在的高风险者（提高灵敏度），又要尽可能减少误诊带来的不必要焦虑和过度医疗（提高特异度），这对检测系统提出了很高的要求。目前广泛使用的是两层结构的筛查系统。

以宫颈癌筛查为例，这套筛查体系先进行一轮初筛，要求覆盖面广，灵敏度高，尽量不遗漏潜在高风险者，可以接受一定比例的假阳性。如果第一轮出现异常，则进入具有更高特异度与更强证据效力的第二轮检查，包括阴道镜检查、活检等，以确认是否存在癌前病变或癌症，并指导后续的观察或治疗。

宫颈癌筛查之所以采用这样的结构，是因为它同时要解决两个现实问题。第一，如果一开始就对所有人直接进行活检，成本很高，而且操作具有侵入性，对于大规模普通人群并不现实；第二，如果只做一次初筛而不做后续确认，又会因为假阳性而带来大量不必要的焦虑，可能导致过度医

疗。因此,这类筛查系统通常采取分层结构:第一层先用适合大人群的方式尽量把可能异常者筛出,第二层再对这些异常者进行更高证据等级的检查,最终再决定是继续观察、治疗癌前病变,还是排除风险。遵循类似筛查逻辑的还有 HIV 检测流程与新生儿筛查等。这类系统并不是依赖某一次单独检测就直接给出终局判断,而是把检测设计成一个有先后层次的流程,使每一层承担不同功能,既兼顾大规模筛查的效率,又兼顾最终判断的可靠性。

除医学外,这类方案也许多工程系统中,如工业故障检测、网络入侵检测、垃圾邮件识别等。

13.

14.

15.

16.

17.

18. 5/12. 由 $P(AB) = 0$ 知 A, B 不能同时发生,从而 $P(ABC) = 0$.

$$\text{又 } P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(A) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = \frac{1}{6}.$$

同理, $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = \frac{1}{6}, P(\overline{A}\overline{B}C) = \frac{1}{12}$. 因此 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

19. 5/8. 由 A 与 B 互斥, A 与 C 互斥可知 $A \cap (B \cup C) = \emptyset$, 从而 $(B \cup C) \cap (A \cup B \cup C) = B \cup C$.

又因 B, C 相互独立, 所以 $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = \frac{5}{9}$. 并且 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) = \frac{8}{9}$. 因而

$$P(B \cup C | A \cup B \cup C) = \frac{P(B \cup C)}{P(A \cup B \cup C)} = \frac{5/9}{8/9} = \frac{5}{8}.$$

20.

21.

22.

23.

24.

25. (1) 由概率归一性有 $k(1-\alpha)^2 + k\alpha + k + k(1-\alpha) = 1$ 得到 $k = \frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha + 3}$. 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $k = \frac{4}{9}$.
可以求得顾客一次性购买该种文创盲盒数量的均值为 $E(X) = \frac{16}{9}$.

(2.i) 设顾客购买的盲盒数为 X , 幸运顾客事件为 L , 易得

$$P(L | X = 1) = \frac{1}{3} \quad P(L | X = 2) = \frac{1}{9} \quad P(L | X = 3) = \frac{7}{27}$$

所以

$$f(\alpha) = P(L) = k \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{9} + \frac{7(1-\alpha)}{27} \right) = \frac{2(\alpha+5)}{27(\alpha^2 - 2\alpha + 3)}.$$

(2.ii) “购买的盲盒全部是封面款”且“是幸运顾客”的概率为

$$k \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1-\alpha}{27} \right) = \frac{4k(2\alpha+1)}{27}.$$

因而 $P(\text{全部是封面款} | L) = \frac{4\alpha+2}{\alpha+5}$. 由题意, $\frac{4\alpha+2}{\alpha+5} \leq \frac{1}{2}$, 解得 $0 < \alpha \leq \frac{1}{7}$.

26. (1) 设 (x_1, x_2, x_3, x_4) 是 1, 2, 3, 4 号乘客所坐的座位号, 整理所有合法座位安排如下表:

	(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(2, 3, 1, 4)	(2, 3, 4, 1)
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
X	4	2	1	0
	(2, 4, 3, 1)	(3, 2, 1, 4)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
X	1	2	1	2

满足 $x_4 = 4$ 的有 (1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (2, 3, 1, 4), (3, 2, 1, 4), 故 $P(x_4 = 4) = \frac{1}{2}$.

(2) 由上表统计得到分布列

X	0	1	2	4
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$

从而 $EX = \frac{13}{6}$.

评: 求一般情况的 EX .

设 I_k 表示 “ k 号乘客满意” 的示性变量, 则

$$X = \sum_{k=1}^n I_k, EX = \sum_{k=1}^n E(I_k) = \sum_{k=1}^n P(k \text{ 号乘客满意}).$$

其中

$$P(1 \text{ 号乘客满意}) = \frac{1}{n}.$$

对于 $k \geq 2$, 考虑座位集合

$$\{1, k, k+1, \dots, n\},$$

共 $n-k+2$ 个座位。在随机占座链中, 先被 “错误占用” 到这个集合中的哪一个座位, 对这些座位是等可能的。 k 号乘客不能满意, 当且仅当这个座位恰好是 k 号座位, 因此

$$P(k \text{ 号乘客满意}) = 1 - \frac{1}{n-k+2} = \frac{n-k+1}{n-k+2}.$$

所以

$$EX = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{n-k+1}{n-k+2}.$$

令 $j = n - k + 1$, 则

$$EX = \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{j+1}\right).$$

因而

$$EX = \frac{1}{n} + (n-1) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} = n + \frac{1}{n} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

27.

28. (1) 根据赛制, 至少需要进行四场比赛 (即最终胜者负 0 轮, 其余两人负 2 轮), 至多需要进行五场比赛 (即最终胜者负 1 轮, 其余两人负 2 轮). 比赛四场结束共有三种情况:

(i) 甲为最终胜者, 则甲连胜四场, 概率为 $\frac{1}{16}$;

(ii) 乙为最终胜者, 则乙连胜四场, 概率为 $\frac{1}{16}$;

(iii) 丙为最终胜者, 第一轮无所谓结果, 丙上场后连胜三场, 概率为 $\frac{1}{8}$.

所以需要进行第五场比赛的概率为 $1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$.

(3) 丙最终获胜, 有两种情况: 比赛四场结束且丙最终获胜的概率为 $\frac{1}{8}$; 比赛五场结束且丙最终获胜, 则从第二场开始的四场比赛按照丙的胜、负、轮空结果有三种情况 (按负的轮次进行分类): 胜胜负胜, 胜负空胜, 负空胜胜, 概率分别为 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$. 因此丙最终获胜的概率为 $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$.

评: 实测数据 (河南): 理科平均分 3.24, 标准差 2.19, 难度 0.270, 区分度 0.51.

(广东) 理科平均分 2.90, 标准差 1.92, 难度 0.242, 区分度 0.54.

29. 6. 记该应聘者对三门指定课程考试及格的事件分别为 A, B, C ,

则 $P(A) = a, P(B) = b, P(C) = c$.

(1) 应聘者用方案一考试通过的概率

$$\begin{aligned} p_1 &= P(ABC) + P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C}) \\ &= ab(1-c) + bc(1-a) + ac(1-b) + abc \\ &= ab + bc + ca - 2abc; \end{aligned}$$

应聘者用方案二考试通过的概率

$$p_2 = \frac{1}{3}P(AB) + \frac{1}{3}P(BC) + \frac{1}{3}P(AC) = \frac{1}{3}(ab + bc + ca).$$

(2) 因为 $a, b, c \in [0, 1]$, 所以

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{3}(ab + bc + ca) - 2abc = \frac{2}{3}[ab(1-c) + bc(1-a) + ca(1-b)] \geq 0.$$

故 $p_1 \geq p_2$.

即采用第一种方案, 该应聘者考试通过的概率较大.

评: 实测数据: 本题难度系数为 0.43, 相关系数为 0.72

30.

31. 4. (1) 因为方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有实数根, 所以 $\Delta = 4a^2 - 4b \geq 0$, 即 $b \leq a^2$.

() 当 $n \leq a \leq n^2$ 时, 有 $n^2 \leq a^2$, 又 $b \in \{1, 2, \dots, n^2\}$, 故总有 $b \leq a^2$, 此时, a 有 $n^2 - n + 1$ 种取法, b 有 n^2 种取法, 所以共有 $(n^2 - n + 1)n^2$ 组有序数组 (a, b) 满足条件;

() 当 $1 \leq a \leq n - 1$ 时, 满足 $1 \leq b \leq a^2$ 的 b 有 a^2 个, 故共有 $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ 组有序数组 (a, b) 满足条件.

$$\text{由 () () 可得 } T_{n^2} = (n^2 - n + 1)n^2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(6n^3 - 4n^2 + 3n + 1)}{6},$$

$$\text{从而 } P_{n^2} = \frac{T_{n^2}}{n^4} = \frac{6n^3 - 4n^2 + 3n + 1}{6n^3}.$$

(2) 我们只需证明: 对于随机选取的 $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$, 方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 无实数根的概率 $1 - P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

若方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 无实数根, 则 $\Delta = 4a^2 - 4b < 0$, 即 $a^2 < b$.

由 $b \leq n$ 知 $a < \sqrt{n}$. 因此, 满足 $a^2 < b$ 的有序数组 (a, b) 的组数小于 $n\sqrt{n}$, 从而, 方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 无实数根的概率为

$$1 - P_n < \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{所以 } P_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

注: 本题的第(2)问具有高等背景, 在 $n \rightarrow \infty$ 时可以用积分的工具证明出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(1 - P_n) = \frac{2}{3}$.

有些学过一点高等数学的同学可能无法用高中数学知识做出来, 而选择用积分的工具完成, 但是极其容易出现不严谨, 例如积分保号的性质、对极限的理解模糊 (例如化简得到某个式子后, 让 $n \rightarrow \infty$, 然而写出来的式子中有些含 $\frac{1}{n^2}$ 的项趋于 0, 但 $\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的项没有趋于 0).

32. (1) 都等于 $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$.

(2) $E(X) = 3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2$.

(3) 只需证明: 对于 p_1, p_2, p_3 的任意排列 q_1, q_2, q_3 , 都有

$$3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2 \geq 3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \Delta &= (3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2) - (3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2) \\ &= 2(p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + q_1q_2 - p_1p_2 \\ &= 2(p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) - (p_1 - q_1)p_2 - q_1(p_2 - q_2) \\ &= (2 - p_2)(p_1 - q_1) + (1 - q_1)(p_2 - q_2) \\ &\geq (1 - q_1)[(p_1 + p_2) - (q_1 + q_2)] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

9. (1) 无论以怎样的顺序派出人员, 任务不能被完成的概率都是 $(1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$.

所以任务能被完成的概率与三个人被派出的先后顺序无关, 并等于

$$1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_2p_3 - p_3p_1 + p_1p_2p_3.$$

(2) 当依次派出的三个人各自完成任务的概率分别为 q_1, q_2, q_3 时, 随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	q_1	$(1-q_1)q_2$	$(1-q_1)(1-q_2)$

所需派出的人员数目的均值（数学期望） $E(X)$ 是

$$E(X) = q_1 + 2(1-q_1)q_2 + 3(1-q_1)(1-q_2) = 3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2.$$

(3) 方法一：由 (2) 的结论知，当以甲最先、乙次之、丙最后的顺序派人时，

$$E(X) = 3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2.$$

根据常理，优先派出完成任务概率大的人，可减少所需派出的人员数目的均值。

下面证明：对于 p_1, p_2, p_3 的任意排列 q_1, q_2, q_3 ，都有

$$3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2 \geq 3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2.$$

(*)

事实上，

$$\begin{aligned} \Delta &= (3 - 2q_1 - q_2 + q_1q_2) - (3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2) \\ &= 2(p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + q_1q_2 - p_1p_2 \\ &= 2(p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) - (p_1 - q_1)p_2 - q_1(p_2 - q_2) \\ &= (2 - p_2)(p_1 - q_1) + (1 - q_1)(p_2 - q_2) \\ &\geq (1 - q_1)[(p_1 + p_2) - (q_1 + q_2)] \geq 0. \end{aligned}$$

即 (*) 成立.

方法二：() 可将 (2) 中所求的 $E(X)$ 改写为 $3 - (q_1 + q_2) + q_1q_2 - q_1$ ，若交换前两人的派出顺序，则变为 $3 - (q_1 + q_2) + q_1q_2 - q_2$ 。由此可见，当 $q_2 > q_1$ 时，交换前两人的派出顺序可减小均值。

() 也可将 (2) 中所求的 $E(X)$ 改写为 $3 - 2q_1 - (1 - q_1)q_2$ ，若交换后两人的派出顺序，则变为 $3 - 2q_1 - (1 - q_1)q_3$ 。由此可见，若保持第一个派出的人选不变，当 $q_3 > q_2$ 时，交换后两人的派出顺序也可减小均值。

综合 () () 可知，当 $(q_1, q_2, q_3) = (p_1, p_2, p_3)$ 时， EX 达到最小。即完成任务概率大的人优先派出，可减小所需派出人员数目的均值，这一结论是合乎常理的。

【实测数据】本题理科难度为 0.41

33. (1) X 的可能值集合为 $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ 。1, 2, 3, 4 共有 24 种排列，计算每种排列下的 X 值，得到下表：

a_1	a_2	a_3	a_4	X	a_1	a_2	a_3	a_4	X
1	2	3	4	0	3	1	2	4	4
1	2	4	3	2	3	1	4	2	6
1	3	2	4	2	3	2	1	4	4
1	3	4	2	4	3	2	4	1	6
1	4	2	3	4	3	4	1	2	8
1	4	3	2	4	3	4	2	1	8
2	1	3	4	2	4	1	2	3	6
2	1	4	3	4	4	1	3	2	6
2	3	1	4	4	4	2	1	3	6
2	3	4	1	6	4	2	3	1	6
2	4	1	3	6	4	3	1	2	8
2	4	3	1	6	4	3	2	1	8

于是整理数据，写出分布列

X	0	2	4	6	8
P	1/24	3/24	7/24	9/24	4/24

(2) 首先 $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=2) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ ，将三轮测试都有 $X \leq 2$ 的概率记做 p ，由上述结果和独立性假设，得 $p = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ 。由于 $p = \frac{1}{216}$ 是一个很小的概率，这表明如果仅凭随机猜测得到三轮测试都有 $X \leq 2$ 的结果的可能性很小，所以我们认为该品酒师确实有良好的味觉鉴别功能，不是靠随机猜测。

评：实测数据：本题理科难度为 0.28

易错警示：

- (i) 第 (1) 问中 X 的可能取值有遗漏；
- (ii) 第 (2) 问用列举法计算每种排列下的 X 值，因情况较多而造成运算错误；
- (iii) 第 (3) 问解答中出现的小概率不知道如何解释。

本题的列举思路与【2024 新高考 I 卷 14】极为相似。

34. 8. (1) 思路 1：直接计算所求概率。

甲参加第一阶段比赛，记事件 A 为甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分。分析易得，事件 A 发生的充要条件是甲参加第一阶段比赛时，3 次投篮至少投中 1 次，并且乙参加第二阶段比赛时，3 次投篮同样至少投中 1 次。代入 $p=0.4$ ， $q=0.5$ ，由各次投中与否相互独立，得

$$P(A) = [1 - (1 - 0.4)^3] \times [1 - (1 - 0.5)^3] = 0.686.$$

思路 2：先求对立事件的概率。

记事件 B 为甲、乙所在队的比赛成绩是 0 分，则 A 与 B 互为对立事件，为求 $P(A)$ ，可先计算 $P(B)$ 。

由比赛具体规则知, 事件 B 发生只包含两种可能, 第一种是甲参加第一阶段比赛时, 3 次投篮都未投中; 第二种是甲参加第一阶段比赛时, 3 次投篮至少投中 1 次, 而乙参加第二阶段比赛时, 3 次投篮都未投中. 由互斥事件的概率加法公式可知

$$P(B) = (1-0.4)^3 + [1 - (1-0.4)^3] \times (1-0.5)^3 = 0.314,$$

故 $P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0.314 = 0.686$.

(2) 设 X 为甲参加第一阶段比赛时, 甲、乙所在队的比赛成绩; Y 为乙参加第一阶段比赛时, 甲、乙所在队的比赛成绩.

() 参赛队的比赛成绩为 15 分, 当且仅当参加第一阶段比赛的队员 3 次投篮至少投中 1 次, 同时参加第二阶段比赛的队员 3 次投篮全都投中.

由题意得 $P(X=15) = [1 - (1-p)^3] q^3$, $P(Y=15) = [1 - (1-q)^3] p^3$.

因为 $0 < p < q \leq 1$, 故 $P(X=15) - P(Y=15) = 3pq(q-p)(p+q-pq) > 0$, 所以应该由甲参加第一阶段比赛.

() X 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15. 因为

$$P(X=0) = (1-p)^3 + [1 - (1-p)^3] \cdot (1-q)^3.$$

$$P(X=5) = [1 - (1-p)^3] \cdot C_3^1 q (1-q)^2.$$

$$P(X=10) = [1 - (1-p)^3] \cdot C_3^2 q^2 (1-q).$$

$$P(X=15) = [1 - (1-p)^3] \cdot q^3.$$

所以

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 5 \cdot P(X=5) + 10 \cdot P(X=10) + 15 \cdot P(X=15) \\ &= 5 \cdot [1 - (1-p)^3] \cdot C_3^1 q (1-q)^2 + 10 \cdot [1 - (1-p)^3] \cdot C_3^2 q^2 (1-q) + 15 \cdot [1 - (1-p)^3] \cdot q^3 \\ &= 5 \cdot [1 - (1-p)^3] \cdot [C_3^1 q (1-q)^2 + 2C_3^2 q^2 (1-q) + 3q^3] \end{aligned}$$

(*)

$$= 15pq \left[\left(p - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right].$$

同理可得 $E(Y) = 15pq \left[\left(q - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]$.

因为 $0 < p < q \leq 1$, 故

$$\left(p - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > \left(q - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \quad E(X) > E(Y)$$

所以应该由甲参加第一阶段比赛.

【解题思路】 我们指出, (*) 式的计算可以通过二项分布的期望直接得到. 事实上, 设 ξ 是一个随机变量, 服从参数为 (n, s) 的二项分布 (n 为正整数, $0 < s < 1$), 即 $\xi \sim B(n, s)$, 则我们知道 $E(\xi) = ns$. 取 $n=3$, $s=q$, 故有

$$C_3^1 q (1-q)^2 + 2C_3^2 q^2 (1-q) + 3q^3 = E(\xi) = 3q.$$

最后, 我们分析与题目 (2) () 平行的下述问题, 尽管它们在实际应用中的意义不像原问题一样重要:

为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 0 分, 5 分, 10 分的概率较大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

由 (1) 的解答过程已知,

$$P(X=0) = 1 - [1 - (1-p)^3] \cdot [1 - (1-q)^3],$$

$$P(Y=0) = 1 - [1 - (1-q)^3] \cdot [1 - (1-p)^3],$$

于是立刻得到 $P(X=0) = P(Y=0)$.

由 (2) () 的解答过程知,

$$P(X=5) = [1 - (1-p)^3] \cdot C_3^1 q (1-q)^2,$$

$$P(Y=5) = [1 - (1-q)^3] \cdot C_3^1 p (1-p)^2,$$

故 $P(X=5) - P(Y=5) = 3pq(p-q)[pq - 2(p+q) + 3]$.

注意到 $0 < p < q \leq 1$, 可得 $-1 \leq pq - (p+q) < 0$, 从而

$$pq - 2(p+q) + 3 = pq - (p+q) + 3 - (p+q) > -1 + 1 = 0,$$

故 $P(X=5) - P(Y=5) < 0$, 所以为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 5 分的概率较大, 应该由乙参加第一阶段比赛.

同样地, 由

$$P(X=10) = [1 - (1-p)^3] \cdot C_3^2 q^2 (1-q),$$

$$P(Y=10) = [1 - (1-q)^3] \cdot C_3^2 p^2 (1-p),$$

知 $P(X=10) - P(Y=10) = 3pq(q-p)[2pq - 3(p+q) + 3]$.

然而, 简单的例子表明条件 $0 < p < q \leq 1$ 不足以确定 $P(X=10)$ 与 $P(Y=10)$ 的大小关系. 例如, 取 $p=0.5$, $q=0.6$ 时, 有 $2pq - 3(p+q) + 3 > 0$, 故 $P(X=10) - P(Y=10) > 0$; 取 $p=0.8$, $q=0.9$ 时, 有 $2pq - 3(p+q) + 3 < 0$, 故 $P(X=10) - P(Y=10) < 0$. 故为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 10 分的概率较大, 还需要添加额外条件才能确定应该由谁参加第一阶段比赛.

【实测数据】(广西) 本题阅卷数据如下.

题号	难度	区分度	满分	平均分	满分率
18	0.134	0.2367	17	2.2785	0.043%(165/386590)

35.

36.

37. (1) 当 $k \geq 2$ 时, 第 k 次投篮的人是甲, 共有下面两种情况: 第 $k-1$ 次投篮的人是甲且甲命中, 概率为 $P(A_{k-1}) \times 0.6 = \frac{3}{5} p_{k-1}$; 第 $k-1$ 次投篮的人是乙且乙未命中, 概率为 $P(\overline{A_{k-1}}) \times (1-0.8) = \frac{1}{5} (1-p_{k-1})$.

所以当 $k \geq 2$ 时, $p_k = \frac{3}{5} p_{k-1} + \frac{1}{5} (1-p_{k-1}) = \frac{2}{5} p_{k-1} + \frac{1}{5}$, 即 $p_k - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \left(p_{k-1} - \frac{1}{3} \right)$, 得 $p_k = \frac{1}{3} + \left(p_1 - \frac{1}{3} \right) \times \left(\frac{2}{5} \right)^{k-1}$. 又 $p_1 = \frac{1}{2}$, 所以第 i 次投篮的人是甲的概率为 $p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{i-1}$.

(2) 设随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次投篮的人是甲,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次投篮的人是乙} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则 X_i 服从两点分布, $P(X_i=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{i-1}$, 且 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. 由题设可得

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{i-1} \right] = \frac{n}{3} + \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right].$$

评: (福建) 本题阅卷数据如下.

分组	满分	平均分	难度	区分度
物理组总体	12	3.94	0.33	0.33
历史组总体	12	2.78	0.23	0.26
总体	12	3.69	0.31	0.33

小题得分率如下:

小问	0	1	2	3	4	5
(1)	13%	8%	5%	2%	72%	
(2)	85%	3%	1%	2%	3%	6%
(3)	97%	1%	2%	0%		

38. 7. (1) 打完 3 个后, 甲比乙至少多得 2 分等价于 3 个球甲全部取胜, 结合独立性可得

$$p_3 = p^3.$$

打完 4 个后, 甲比乙至少多得 2 分等价于 4 个球中甲至少胜 3 个球, 因此

$$p_4 = p^4 + C_4^3 p^3 q = p^3 (4 - 3p).$$

- (2) 由 (1) 知 $p_4 - p_3 = 3p^3(1 - p)$, 同理 $q_4 - q_3 = 3(1 - p)^3 p$, 所以 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{p^2}{(1 - p)^2}$.

由题设 $\frac{p^2}{(1 - p)^2} = 4$, 解得 $p = 2$ (舍去), $p = \frac{2}{3}$.

(3) 解法 1: 设 A_1 表示事件“打完 $2m$ 个球后, 甲比乙至少多得 4 分”; A_2 表示事件“打完 $2m$ 个球后, 甲比乙多得 2 分”; A_3 表示事件“打完 $2m$ 个球后, 甲得分不超过乙得分”. A 表示事件“打完 $2m + 1$ 个球后, 甲比乙至少多得 2 分”.

易见 $p_{2m+1} = P(A)$, $p_{2m} = P(A_1) + P(A_2)$, $P(A|A_1) = 1$, $P(A|A_2) = p$, $P(A|A_3) = 0$. 当 $m > 1$ 时, 由全概率公式

$$\begin{aligned} p_{2m+1} &= \sum_{i=1}^3 P(A_i) P(A|A_i) \\ &= P(A_1) + pP(A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - qP(A_2) \\ &= p_{2m} - qC_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m-1} \\ &= p_{2m} - pC_{2m}^{m+1} p^m q^m. \end{aligned}$$

又 $p_3 = pP(A_2) = p^2 - qP(A_2) = p^2 - p^2 q$, 也满足上式.

故对所有正整数 m , $p_{2m+1} - p_{2m} = -pC_{2m}^{m+1} p^m q^m$.

同理可得 $q_{2m+1} - q_{2m} = -qC_{2m}^{m+1} q^m p^m$.

由于 $p > q$, 故 $p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m}$, 所以 $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}$.

思路 1: 设 B_1 表示事件“打完 $2m + 1$ 个球后, 甲比乙至少多得 3 分”; B_2 表示事件“打完 $2m + 1$ 个球后, 甲比乙多得 1 分”; B_3 表示事件“打完 $2m + 1$ 个球后, 乙比甲至少多得 1 分”. B 表示事件“打完 $2m + 2$ 个球后, 甲比乙至少多得 2 分”.

易见 $p_{2m+2} = P(B)$, $p_{2m+1} = P(B_1)$, $P(B|B_1) = 1$, $P(B|B_2) = p$, $P(B|B_3) = 0$. 由全概率公式

$$\begin{aligned} p_{2m+2} &= \sum_{i=1}^3 P(B_i) P(B|B_i) \\ &= P(B_1) + pP(B_2) \\ &= p_{2m+1} + p^2 C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m, \end{aligned}$$

即 $p_{2m+2} - p_{2m+1} = p^2 C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m$.

所以 $p_{2m+2} - p_{2m} = (p_{2m+2} - p_{2m+1}) + (p_{2m+1} - p_{2m}) = p^2 C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m - p C_{2m}^{m+1} p^m q^m$.

同理可得 $q_{2m+2} - q_{2m} = q^2 C_{2m+1}^{m+1} q^m p^m - q C_{2m}^{m+1} q^m p^m$.

因此

$$\begin{aligned} p_{2m+2} - p_{2m} - (q_{2m+2} - q_{2m}) &= p^2 C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m - p C_{2m}^{m+1} p^m q^m - (q^2 C_{2m+1}^{m+1} q^m p^m - q C_{2m}^{m+1} q^m p^m) \\ &= (p^2 - q^2) C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m - (p - q) C_{2m}^{m+1} p^m q^m \\ &= (p - q) p^m q^m (C_{2m+1}^{m+1} - C_{2m}^{m+1}) > 0. \end{aligned}$$

故 $p_{2m+2} - q_{2m+2} > p_{2m} - q_{2m}$.

思路 2: 下面是证不等式 $p_{2m+2} - q_{2m+2} > p_{2m} - q_{2m}$ 的另一种做法.

设 B_1 表示事件“打完 $2m$ 个球后, 甲比乙至少多得 4 分”; B_2 表示事件“打完 $2m$ 个球后, 甲比乙多得 2 分”; B_3 表示事件“打完 $2m$ 个球后, 甲与乙得分相同”; B_4 表示事件“打完 $2m$ 个球后, 乙比甲至少多得 2 分”. B 表示事件“打完 $2m+2$ 个球后, 甲比乙至少多得 2 分”.

有 $p_{2m+2} = P(B)$, $p_{2m} = P(B_1) + P(B_2)$, $P(B|B_1) = 1$, $P(B|B_2) = 1 - q^2$, $P(B|B_3) = p^2$, $P(B|B_4) = 0$.

由全概率公式

$$\begin{aligned} p_{2m+2} &= \sum_{i=1}^4 P(B_i) P(B|B_i) \\ &= P(B_1) + (1 - q^2) P(B_2) + p^2 P(B_3) \\ &= P(B_1) + P(B_2) - q^2 P(B_2) + p^2 P(B_3) \\ &= p_{2m} - q^2 C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m-1} + p^2 C_{2m}^m p^m q^m \\ &= p_{2m} - pq C_{2m}^{m+1} p^m q^m + p^2 C_{2m}^m p^m q^m. \end{aligned}$$

同理可得 $q_{2m+2} - q_{2m} = -pq C_{2m}^{m+1} q^m p^m + q^2 C_{2m}^m q^m p^m$.

所以 $p_{2m+2} - p_{2m} - (q_{2m+2} - q_{2m}) = (p^2 - q^2) C_{2m}^m q^m p^m > 0$.

故 $p_{2m+2} - q_{2m+2} > p_{2m} - q_{2m}$.

解法 2: 设事件 E_k : 第 k 个球甲胜, 则 $P(E_k) = p$, $P(\overline{E_k}) = q$.

设事件 A_k : 打完 k 个球后甲比乙至少多得 4 分,

事件 B_k : 打完 k 个球后乙比甲多得 2 或 3 分,

事件 C_k : 打完 k 个球后乙比甲多得 0 或 1 分,

对任意正整数 m , 当打完 $2m$ 个球后, 甲与乙的分数之差为偶数. 当打完 $2m+1$ 个球后, 甲与乙的分数之差为奇数.

则 $P(B_{2m}) = C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m-1}$, $P(C_{2m}) = C_{2m}^m p^m q^m$,

$P(B_{2m+1}) = C_{2m+1}^{m+2} p^{m+2} q^{m-1}$, $P(C_{2m+1}) = C_{2m+1}^{m+1} p^{m+1} q^m$, $p_k = P(A_k) + P(B_k)$.

因为各球的胜负相互独立, 所以

$$A_{2m+1} \cup B_{2m+1} = A_{2m} \cup (B_{2m} E_{2m+1}),$$

$$A_{2m+2} \cup B_{2m+2} = A_{2m+1} \cup B_{2m+1} \cup C_{2m+1} E_{2m+2},$$

从而

$$\begin{aligned} p_{2m+1} &= P(A_{2m+2}) + P(B_{2m+2}) = P(A_{2m+1} \cup B_{2m+1}) \\ &= P(A_{2m}) + P(B_{2m}) P(E_{2m+1}) = P(A_{2m}) + P(B_{2m})(1-q) \\ &= p_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m. \end{aligned}$$

同理可得 $q_{2m+1} = q_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^m q^{m+1}$,

因为 $p+q=1$, $0 < p < \frac{1}{2}$, 所以 $p > q$, 得

$$(p_{2m+1} - q_{2m+1}) - (p_{2m} - q_{2m}) = C_{2m}^{m+1} p^m q^m (q-p) < 0,$$

即 $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}$.

另一方面,

$$\begin{aligned} p_{2m+2} &= P(A_{2m+2}) + P(B_{2m+2}) = P(A_{2m+2} \cup B_{2m+2}) \\ &= P(A_{2m+1}) + P(B_{2m+1}) + P(C_{2m+1}) P(E_{2m+2}) \\ &= p_{2m+1} + C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m p^2, \end{aligned}$$

同理, $q_{2m+2} = q_{2m+1} + C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m q^2$.

所以 $(p_{2m+2} - q_{2m+2}) - (p_{2m+1} - q_{2m+1}) = C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (p+q)(p-q)$,

因为 $p+q=1$ 且 $0 < p < q < 1$, 所以

$$\begin{aligned} &(p_{2m+2} - q_{2m+2}) - (p_{2m+1} - q_{2m+1}) \\ &= (p_{2m+2} - q_{2m+2}) - (p_{2m+1} - q_{2m+1}) + (p_{2m+1} - q_{2m+1}) - (p_{2m} - q_{2m}) \\ &= C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (p-q) + C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (q-p) \\ &= C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (p-q) \left(\frac{2m+1}{m} - 1 \right) = C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (p-q) \cdot \frac{m+1}{m} > 0. \end{aligned}$$

即 $p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

【解题思路】 (3) $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} \iff p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m}$, 而且一旦得到 $p_{2m+1} - p_{2m}$ 的表达式便可得到 $q_{2m+1} - q_{2m}$ 的表达式. 下面我们设法得出 $p_{2m+1} - p_{2m}$ 的表达式, 进而证得不等式 $p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m}$.

p_{2m+1} 表示事件 $A =$ “打完 $2m+1$ 个球后甲比乙至少多得 2 分” 的概率, 从 “条件” 的观点看, 此事件发生的概率与打完 $2m$ 个球后甲的得分情况有关. 把影响 A 的概率的各种情况找出来: 打完 $2m$ 个球后, 甲比乙至少多得 4 分; 甲比乙多得 2 分; 甲得分不超过乙得分. 显然这三种情况对应的三个事件满足: 任两个事件不会同时发生, 且必定有一个发生, 而且 p_{2m} 就是前两种情况发生概率的和. 至此能想到可以应用全概率公式得到 p_{2m+1} 与 p_{2m} 的联系, 进而得到 $p_{2m+1} - p_{2m}$ 的表达式.

由于 $p_{2m+2} - p_{2m} = (p_{2m+2} - p_{2m+1}) + (p_{2m+1} - p_{2m})$, 且 $p_{2m+1} - p_{2m} = -p C_{2m}^{m+1} p^m q^m$, 因此为得到 $p_{2m+2} - p_{2m}$ 的表达式只需得到 $p_{2m+2} - p_{2m+1}$ 的表达式. 我们可用同样的方法得到 $p_{2m+2} - p_{2m+1}$ 的表达式.

注 1: 本题也可以分别证明不等式的两边.

因为各球的胜负相互独立, 所以

$$\begin{aligned} A_{2m+1} \cup B_{2m+1} &= A_{2m} \cup (B_{2m} E_{2m+1}), \\ A_{2m+2} \cup B_{2m+2} &= A_{2m} \cup [B_{2m} (E_{2m+1} E_{2m+2} + \overline{E_{2m+1}} E_{2m+2} + E_{2m+1} \overline{E_{2m+2}})] \cup [C_{2m} (\overline{E_{2m+1}} \overline{E_{2m+2}})] \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} p_{2m+1} &= P(A_{2m+2}) + P(B_{2m+2}) = P(A_{2m+1} \cup B_{2m+1}) \\ &= P(A_{2m}) + P(B_{2m}) P(E_{2m+1}) = P(A_{2m}) + P(B_{2m}) (1 - q) \\ &= p_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m. \end{aligned}$$

同理可得 $q_{2m+1} = q_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^m q^{m+1}$,

于是

$$(p_{2m+1} - q_{2m+1}) - (p_{2m} - q_{2m}) = C_{2m}^{m+1} p^m q^m (q - p) < 0,$$

即 $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}$.

另一方面,

$$\begin{aligned} p_{2m+2} &= P(A_{2m+2}) + P(B_{2m+2}) = P(A_{2m+2} \cup B_{2m+2}) \\ &= P(A_{2m}) + P(B_{2m}) [1 - P(E_{2m+1}) P(E_{2m+2})] + P(C_{2m}) P(E_{2m+1}) P(E_{2m+2}) \\ &= P(A_{2m}) + P(B_{2m}) (1 - q^2) + P(C_{2m}) p^2 \\ &= p_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1} + C_{2m}^m p^{m+2} q^m \\ &= p_{2m} - p^m q^m C_{2m}^m \left(\frac{m}{m+1} pq - p^2 \right). \end{aligned}$$

同理, $q_{2m+2} = q_{2m} - p^m q^m C_{2m}^m \left(\frac{m}{m+1} pq - q^2 \right)$.

所以

$$\begin{aligned} & (p_{2m+2} - q_{2m+2}) - (p_{2m} - q_{2m}) \\ &= -p^m q^m C_{2m}^m \left[\left(\frac{m}{m+1} pq + p^2 \right) - \left(\frac{m}{m+1} pq + q^2 \right) \right] \\ &= p^m q^m C_{2m}^m (p^2 - q^2) > 0. \end{aligned}$$

即 $p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

39. (1) 令 $f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 - x$, 则 $f(0) = p_0$, $f(1) = 0$,

$$f'(x) = p_1 + 2p_2 x + 3p_3 x^2 - 1.$$

当 $E(X) \leq 1$ 时, 对 $x \in (0, 1)$ 有 $f'(x) < p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 1 = E(X) - 1 \leq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 从而 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 只有一个零点 $x_0 = 1$, 故 $p = 1$.

当 $E(X) > 1$ 时, $f'(0) = p_1 - 1 < 0$, $f'(1) = E(X) - 1 > 0$, 又 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 因此 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一零点 x_1 . 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 在 $x = x_1$ 处取得最小值, 故 $f(x_1) < f(1) = 0$. 又 $f(0) = p_0 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 存在零点, 故 $p < 1$.

(2) 当个体平均繁殖的后代数不超过 1 时, 这种微生物将最终消亡; 当个体平均繁殖的后代数大于 1 时, 这种微生物长期存在的概率大于 0.

第一章 概率论

1.1 随机事件和概率

习题组 II

1. 【2026 武汉九调 11 改编】设 A, B 是一个随机试验中的两个事件, 已知

$$P(A|B) + P(B|A) = 1, P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

- (1) 判断事件 A, B 是否相互独立;
- (2) 若 $P(AB) = \frac{1}{8}$, 求 $|P(A) - P(B)|$;
- (3) 求 $P(AB)$ 的最大值;
- (4) 若 $P(A|\bar{B}) = P(\bar{A}|B)$, 求 $P(A), P(B)$.

2. 设 n 是不小于 3 的正整数, 连续抛掷一枚质地均匀的硬币 n 次, 记事件 A_i 为“第 i 次和第 $i+1$ 次抛掷均为反面” ($1 \leq i \leq n-1$).

- (1) 判断 A_1 和 A_2 是否独立, 并说明理由;
- (2) 若 $n = 10$, 证明:

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \cdots \cap \bar{A}_{n-1}) > 2^{-n/2}$$

- (3) 若 $n = 2026$, 是否存在事件 B , 使事件 $A_1B, A_2B, \dots, A_{n-1}B$ 两两独立, 且概率均不为 0?

3. 【2026 “漫游数海” 预测卷】从写有 $1, 2, \dots, 2n$ 的 $2n (n \geq 3)$ 张卡片中任选 $k (k = 1, 2, \dots, 2n)$ 张卡片, 记其上数字之和为偶数的概率为 p_k , 和为奇数的概率为 q_k .

- (1) 求 p_2, q_{2n} ;
- (2) 证明: 当 k 为奇数时, $p_k = \frac{1}{2}$;
- (3) 讨论 p_k, q_k 的最大值.

4. 某地有 100 个信号站 $A_1, A_2, \dots, A_{100}$, 用 99 条光缆将其依次串联, 每条光缆可双向传输消息. 现于信号站 A_1, A_{100} 投放某消息, 希望通过光缆将其传输至其余信号站. 若某光缆发生损毁, 则消息无法通过该光缆进行传输. 已知每条光缆发生损毁这一事件的概率均为 p 且相互独立.

- (1) 求所有信号站均能收到该消息的概率 (用 p 表示);
- (2) 证明: $\log(1+pm) \leq m \log(1+p), m \in \mathbb{N}^*$;
- (3) 若在传输前可从 $A_2, A_3, \dots, A_{99}$ 中选取 n 个不同的信号站并投放上述消息 (此时不知道哪些光缆会损坏), 要使得所有信号站均能收到该消息的概率大于 $(1-p^2)^{10}$, 求满足此条件的 n 的最小值.

5. 【2014 江西 21】将正整数 $1, 2, 3, \dots, 2n (n \geq 2)$ 随机分成 A, B 两组, 每组 n 个数, 记 A 组最大数 $A_{\max}$ 与最小数 $A_{\min}$ 之差为 ξ , B 组最大数 $B_{\max}$ 与最小数 $B_{\min}$ 之差为 η .

- (1) 当 $n = 3$ 时, 求 ξ 的分布列与数学期望;

(2) 记 $X = |a - b|$, 若对任意 $n \geq 2, E(\xi) < c$ 恒成立, 求 c 的最小值;

(3) 令 C 表示事件 “ $\xi = \eta$ ”, 求 $P(C)$, 并判断 $P(C)$ 和 $P(\overline{C})$ 的大小关系.

6. 【2026 “集英苑” 5 月模拟考 19】甲和乙进行游戏: 箱子里有 200 个小球, 其中一半标号为 1, 一半标号为 2. 给定正整数 k , 甲在箱子里随机抽取 k 次, 每次抽取 1 个小球并放回, 记抽到小球的编号之和为 S_k . 乙在箱子里不放回地随机抽取 100 个小球, 记抽到小球的编号之和为 T . 当且仅当 $S_k \in [T, T + 100]$ 时甲获得游戏胜利, 设甲获得胜利的概率为 $p(k)$.

(1) 求 S_3 的分布列;

(2) 证明: $p(99) < \frac{1}{2}$;

(3) 若 $p(k)$ 的最大值为 $p(k_0)$, 求正整数 k_0 .

1.

2.

3.

4.

5. (1) ξ 的分布列为

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

$$E\xi = \frac{7}{2}.$$

(2) 可知, $1, 2n$ 不可能同时属于集合 A 或集合 B , 不妨先假设 $1 \in A, 2n \in B$ 。此时, 设 $\max A = k (n \leq k \leq 2n-1)$, 可推得 $\min B = 2n - k + 1$ 。据假设, 有

$$2, 3, \dots, 2n - k \in A, \quad k + 1, k + 2, \dots, 2n - 1 \in B$$

此时还需从 $2n - k + 2, \dots, k - 1$ 这 $2(k - n)$ 个数中选取 $k - n - 1$ 个数加入集合 A , 故总分组方法数为 $C_{2k-2n-2}^{k-n-1}$

$1 \in B, 2n \in A$ 情形下的分组方法数与上述情况相同, 设 $t = k - n - 1 \in \{-1, 0, 1, \dots, n-2\}$, 有

$$P(C) = \frac{2 \sum_{t=-1}^{n-2} C_{2t}^t}{C_{2n}^n}$$

假设 $a_j = C_{2j}^j$, 下判断 $P(C)$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小关系。当 $n = 2$ 时, $P(C) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, 当 $n = 3$ 时, $P(C) = \frac{3}{10} < \frac{1}{2}$, 猜测 $P(C) < \frac{1}{2} < P(\bar{C})$, 下利用数学归纳法证明。

已经证明了 $n = 2, 3$ 命题成立, 假设 $n = k (k \geq 3)$ 命题成立, 当 $n = k + 1$ 时, 由归纳假设, 有

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j < \frac{1}{4} a_k + a_{k-1}$$

而

$$\frac{\frac{1}{4} a_{k+1}}{\frac{1}{4} a_k + a_{k-1}} = \frac{(4k^2 - 2k)(k-1)(2k+1)}{(k+1)^2(4k^2 - 3k + 1)} > \frac{2k^2 - k - 1}{k^2 + 2k + 1} > 1 (\text{当 } k \geq 3 \text{ 时})$$

故

$$P(C) = \frac{2 \sum_{j=0}^{k-1} a_j}{a_{k+1}} < \frac{\frac{1}{2} a_k + 2a_{k-1}}{a_{k+1}} < \frac{1}{2}$$

据数学归纳法, 原命题得证。

下给出另一种方法, 可以证明:

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{(2j+2)(2j+1)}{(j+1)^2} = 4 - \frac{2}{j+1} > 2.$$

从而

$$\sum_{j=0}^{n-2} a_j < a_{n-2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \right) = 2a_{n-2} = 2C_{2n-4}^{n-2}.$$

所以

$$P(C) < \frac{4C_{2n-4}^{n-2}}{C_{2n}^n} = \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} < \frac{1}{2}.$$

因此

$$P(C) < P(\overline{C}).$$

6.

第一章 概率论

1.1 随机事件和概率

第一章 概率论

1.1 随机事件和概率