

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 拓展阅读：群的计数

1.3.1 群在集合上的作用

看正方形的对称群，我们知道这个群是八元二面体群 D_4 ，亦可以看成是 4 次对称群 S_4 里的一个 8 阶子群，它的元是

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, x_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

在正方形的四个角上放置标以 A, B, C, D 的四个球，每个角上放一个。如果正方形固定不动，便有 24 个不同的摆法，从左上角顺时针将这 4 个角编号为 1, 2, 3, 4，放置方案可以按编号从小到大的顺序依次写作 $(ABCD), (ABDC), (ACBD), \dots$ 。不过这种表示方式没有考虑到那四个角其实是不可区分的，例如 $(ABCD)$ 和 $(DABC)$ 本质相同，把前者逆时针旋转 90° (即 x_1 作用) 便得出后者。类似地，从 $(ABCD)$ 经由正方形对称群的 8 个移动可得出 8 个本质相同的摆法，即

$$(ABCD), (DABC), (CDAB), (BCDA), (DCBA), (ADCB), (BADC), (CBAD)$$

可知 $(BACD)$ 是与 $(ABCD)$ 本质不同的摆法，因为不论怎样移动正方形，都不能从 $(ABCD)$ 得出 $(BACD)$ 。可以验证，从 $(BACD)$ 经由正方形对称群的 8 个移动可得出另外 8 个本质相同的摆法，即

$$(BACD), (DBAC), (CDBA), (ACDB), (DCAB), (BDCA), (ABDC), (CABD)$$

从 $(ACBD)$ 出发可以得到剩余 8 个本质相同的摆法，即

$$(ACBD), (DACB), (BDAC), (CBDA), (DBCA), (ADBC), (CADB), (BCAD)$$

所以真正不同的摆法其实只有 3 个： $(ABCD), (BACD), (ACBD)$ 。

从这个例子我们发现关键所在：正方形对称群作用在全部构形上，把它们划分为若干类，每一类才是我们应该着眼的个体。要求本质不同的构形数，即求划分得到的类的个数。于是引出群作用在集合上的概念。

定义 1.3.1 (群在集合上的作用). 设 G 是一个群, S 是一个集合, 对任意 $g \in G, s \in S$, 设 $g * s$ 规定二者结合产生某个 S 的元, 记作 $g * s$. 这种结合关系满足以下两个条件: 对 G 中元 g, h 和 S 中元 s , 有 $g * (h * s) = (gh) * s$; 对 S 中元 s , 有 $e * s = s$. 这个 $g * h$ 表示 g 和 h 在 G 里的乘积, 而 e 表示 G 的单位元. 我们把这样的结合关系叫做 G 在 S 上的作用.

熟悉高等数学名词的读者, 都知道这等于说 G 在 S 上的作用是个从 $G \times S$ 至 S 的映射, 满足条件 (1) 和 (2).

定义 1.3.2 (轨). 定义集合 $\{g * s \mid g \in G\}$ 为 s 的轨, 记作 $G(s)$.

不同的 s 可能产生不同的轨, 但不同的轨必不相交.

证明. 若不然, 则存在 $t \in G(s_1), G(s_2)$, 其中 $G(s_1)$ 和 $G(s_2)$ 分别是 s_1 和 s_2 的轨, $s_1 \neq s_2$, 据轨的定义, 存在 $g_1, g_2 \in G$ 使得 $t = g_1 * s_1 = g_2 * s_2$, 所以 $s_1 = g_1^{-1} * t = g_1^{-1} * (g_2 * s_2) = (g_1^{-1} g_2) * s_2$, 于是 $s_1 \in G(s_2)$, 从而 $G(s_1) \subseteq G(s_2)$, 同理可证 $G(s_2) \subseteq G(s_1)$, 所以 $G(s_1) = G(s_2)$. $\square$

每一个 S 的元必落在某个轨, 具体地说, s 落在 s 的轨 $G(s)$, 这是因为 $s = e * s$. 于是, 我们知道 S 给划分为若干个轨, 即是若干个互不相交的子集合并而成 S , 我们要数的正是轨的个数.

在前面的例子里, 有 3 个轨, 每个轨有 8 个元. 这样整齐的现象可不是常规, 一般而言, 轨的大小并非个个相同, 看下面这个例子, G 是正方形的对称群, S 是所有在正方形的四个角上各放一个黑球或白球的摆法组成的集合. 这些摆法共有 $2^4 = 16$ 个, 可写作 (黑黑黑黑), (黑黑黑白), (黑黑白黑), $\dots$.

问题 1.1 求 G 在 S 上作用导致的轨的个数.

1.3.2 Burnside 引理

现在可以把问题表述成以下的形式: 已知一个群 G 在一个集合 S 上的作用, 试计算轨的个数. 如果每个轨的大小一样, 设有 k 个元, 容易得出轨的数量就是 $\frac{|S|}{k}$, $|S|$. 但上一节里第二个例子说明了一般情况并非如此: 轨的大小可能不一样, 那是因为可能存在 G 中元 g_1 和 g_2 , $g_1 \neq g_2$, 但 $g_1 * s = g_2 * s$. 对某些特殊的例子, 不存在这样的群的元, 即 g 走遍群 G 时, $g * s$ 个个不相同, 于是每个轨都有 $|G|$ 个元. 而将等势 $g_1 * s = g_2 * s$ 两边同时左乘 g_2^{-1} 时, 得到 $g_2^{-1} g_1 s = s$, 可知 $g_2 g_1^{-1}$ 等于群 G 中的某个元, 于是以上的说法等同于存在 G 中元 g , g 不是单位元, 但 $g * s = s$. 我们把全部满足 $g * s = s$ 的 g 收集在一起, 称其为 s 的稳定子群.

定义 1.3.3 (稳定子群). 称 $G_s = \{g \in G \mid gs = s\}$ 为 s 的**稳定子群**, 记作 G_s .

稳定子群是指在群作用下, 保持某个元素 s 不变的群元素的集合. 可以验证 G_s 是 G 的子群, 可知 $G_s \subseteq G$, 任取 $g_1, g_2 \in G_s$, 对 $g_2 s = s$ 左右同乘 g_1, g_2^{-1} 得到 $g_1 g_2 g_2^{-1} s = (g_1 g_2^{-1}) s$, 即 $g_1 g_2^{-1} = g_1 s = s$, 于是 $g_1 g_2^{-1} \in G_s$, 于是证明了 G_s 是 G 的子群.

设 G 是一个 n 阶群, 有元 $g_1, g_2, \dots, g_n$, S 是一个有限集, 且 G 作用于 S 上. 记 $X(g) = \{s \mid g * s = s\}$, $|X(g)|$ 就是被 g 保持不动的元的个数. 若作用产生的轨共有 r 个, 则伯氏引

理断言 r 满足

$$r = \frac{1}{n} (|X(g_1)| + |X(g_2)| + \cdots + |X(g_n)|).$$

证明.

□

用“算两次”的方法证明。考虑所有满足 $g * s = s$ 的序偶 (g, s) ，一方面，先固定 g 来数，所得总数是 $|X(g_1)| + \cdots + |X(g_n)|$ 。另一方面，先固定 s 来数，所得数是稳定子群 G_s 的阶 $|G_s|$ 。

再把 S 按轨分成若干个互不相交的部分。设一条轨 $G(s)$ 有 k 个元，而轨上每个元的稳定子群的阶数都相同，于是 $k = \frac{|G|}{|G_s|}$ 。所以这一条轨对总数 $\sum_{s \in S} |G_s|$ 的贡献是 $k|G_s| = |G| = n$ 。每条轨贡献 n ，若共有 r 条轨，总贡献就是 nr 。将两种数法相等，便得到上式。这也说明了伯氏引理的本质：固定点总数的平均值，恰好等于轨的个数。

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理

习题

A 组

- 【2015 湖北理 3】已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 求奇数项的二项式系数和;
- 【1993 旧高考理 15】【2000 新课标卷文 12】二项式 $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}x)^{50}$ 的展开式中系数为有理数的项共有多少项?
- 【2006 江西理 8】在 $(x - \sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中, 含 x 的奇次幂的项之和为 S , 当 $x = \sqrt{2}$ 时, 求 S .
- 设 $(1+2x)^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k (k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$, 若 $\frac{a_4}{a_6} = \frac{3}{8}$, 求 k
- 【2005 天津 11】设 $n \in \mathbb{N}^*$, 化简 $C_n^1 + C_n^2 6 + C_n^3 6^2 + \cdots + C_n^n 6^{n-1}$
- 【上海 10】已知 $x \in \mathbb{R}$, $(1+2023x)^{100} + (2023-x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, 当 $a_k < 0 (k \in \{0, 1, 2, \cdots, 100\})$ 时, 求整数 k 的最大值。
- 【2005 湖北 14】求 $(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2})^5$ 的展开式中的常数项。
- 已知 $f(x) = (2x-1)^{18} = \sum_{k=0}^{18} a_k x^k = \sum_{k=0}^{18} b_k (x+1)^k$.
 - 求 $\sum_{i=0}^{18} a_i, \sum_{i=0}^{18} |a_i|, \sum_{i=0}^{18} \frac{a_i}{2^i}, (\sum_{k=0}^9 a_{2k})^2 - (\sum_{k=0}^8 a_{2k+1})^2$;
 - 用含 k 的式子表示 $b_k (k=0, 1, \cdots, 18)$;
 - 求 $f(5)$ 除以 11 的余数;
 - 若 a_t 是 $a_0, a_1, \cdots, a_{18}$ 中的最大值, 求 t ;
- 【2019 江苏 22】设 $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, n \geq 4, n \in \mathbb{N}^*$. 已知 $a_3^2 = 2a_2a_4$.
 - 求 n 的值;
 - 设 $(1+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$, 其中 $a, b \in \mathbb{N}^*$, 求 $a^2 - 3b^2$ 的值。

¹第 4 个表达式的求解取自【1999 全国卷理 8】

1.

2.

3. 新答案 (来源: 1.34 二项式定理.md): B

【解题思路】 $(x - \sqrt{2})^{2006} = a_0 x^{2006} + a_1 x^{2005} + \cdots + a_{2005} x + a_{2006}$. 令 $x = \sqrt{2}$ 与 $x = -\sqrt{2}$, 可得

$$0 = a_0 (\sqrt{2})^{2006} + a_1 (\sqrt{2})^{2005} + \cdots + a_{2005} \sqrt{2} + a_{2006}$$

$$2^{3009} = a_0 (\sqrt{2})^{2006} - a_1 (\sqrt{2})^{2005} + \cdots - a_{2005} \sqrt{2} + a_{2006}$$

两式相减除以 2, 可得 $a_1 (\sqrt{2})^{2005} + a_3 (\sqrt{2})^{2003} + \cdots + a_{2005} \sqrt{2} = -2^{3009} \div 2 = -2^{3008}$.

新答案 (来源: 1.34 二项式定理.md): $\frac{1}{6} (7^n - 1)$

【解题思路】思路 1: 将原式转换成二项式定理的形式, 利用二项式定理求解.

$$\text{原式} = \frac{1}{6} [C_n^0 + C_n^1 6 + C_n^2 6^2 + \cdots + C_n^n 6^n] - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (1+6)^n - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (7^n - 1)$$

思路 2: 观察所求, 发现其与二项展开式之间的关系, 从而解决问题.

$$\text{记 } A = C_n^1 + C_n^2 6 + C_n^3 6^2 + \cdots + C_n^n 6^{n-1},$$

$$\text{则 } 6A + 1 = C_n^0 + C_n^1 6 + C_n^2 6^2 + \cdots + C_n^n 6^n = 7^n, \text{ 故 } A = \frac{7^n - 1}{6}.$$

【实测数据】本题满分 4 分, 平均得分 1.35 分 (难度 0.34)

新答案 (来源: 1.34 二项式定理.md): $\frac{63\sqrt{2}}{2}$

【解题思路】思路 1: 可不妨令 $x > 0$, 利用

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2$$

化三项式为二项式, 再用二项式定理写出展开式的通项, 从而求出展开式的常数项.

当 $x > 0$ 时,

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2\right]^5 = 2^{-5} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^{10}$$

则 $\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^{10}$ 的二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r \cdot x^{\frac{r}{2} - \frac{10-r}{2}} \cdot 2^{\frac{10-r}{2}}$,

常数项所对应的 r 满足 $\frac{r}{2} - \frac{10-r}{2} = 0$, 得 $r = 5$.

所以所求常数项为 $2^{-5} \cdot C_{10}^5 \cdot 2^{\frac{5}{2}} = \frac{63\sqrt{2}}{2}$.

思路 2: 也可通过先通分化简后, 化三项式为二项式, 再用二项式定理求出展开式中的常数项.

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left(\frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{2x}\right)^5 = \frac{\left[(x + \sqrt{2})^2\right]^5}{(2x)^5} = \frac{(x + \sqrt{2})^{10}}{(2x)^5}$$

对于二项式 $(x + \sqrt{2})^{10}$, 其通项 $T_{r+1} = C_{10}^r \cdot x^{10-r} \cdot 2^{\frac{r}{2}}$. 要得到原展开式的常数项, 则需 $10 - r = 5$, 即 $r = 5$.

所以所求常数项为 $\frac{C_{10}^5 \cdot 2^{\frac{5}{2}}}{2^5} = \frac{63\sqrt{2}}{2}$.

思路 3: 若未能直接看出上述化三项式为二项式的特征, 则可将三项式中的前两项先组合起来, 再用二项式定理直接展开, 解法如下:

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left[\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{2}\right]^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^k 2^{\frac{5-k}{2}}$$

注意其中常数项只出现在 $k = 0, 2, 4$ 中, 合并可得常数项为

$$2^{\frac{5}{2}} + C_5^2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + C_5^4 C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \frac{63\sqrt{2}}{2}$$

【实测数据】.

新答案 (来源: 1.34 二项式定理.md): 45

【解题思路】将 $1+x$ 看作一个整体, 则

$$\left(1+x+\frac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$$

的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r (1+x)^{10-r} \left(\frac{1}{x^{2015}}\right)^r$ ($r = 0, 1, 2, \dots, 10$), 其中只有 T_1 中含 x^2 项, x^2 项的系数为 $C_{10}^0 C_{10-0}^2$, 即 45.

【实测数据】本题理科难度为 0.66, 区分度为 0.46.

4.

5.

6.

7. $63\sqrt{2}/2$ 方法一: 从

$$\underbrace{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) \cdots \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)}_{5\text{个}}$$

的每一个因式中取一项相乘, 即得到原式的展开式中的一项, 设取出 a 个 $\frac{x}{2}$, b 个 $\frac{1}{x}$, c 个 $\sqrt{2}$, 要得到常数项, a, b, c 必须满足:

$$a + b + c = 5, a = b$$

解得 $(a, b, c) = (2, 2, 1), (1, 1, 3)$ 或 $(0, 0, 5)$, 故常数项为

$$(\sqrt{2})^5 + C_5^3 C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^3 + C_5^2 C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{63\sqrt{2}}{2}$$

方法二: $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{x}\right)^2\right)^5 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{x}\right)^{10}$, 后略。

$$8. (1) \sum_{i=0}^{18} a_i = f(1) = 1, \sum_{i=0}^{18} |a_i| = f(-1) = 3^{18}, \sum_{i=0}^{18} \frac{a_i}{2^i} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

设 $E = \sum_{k=0}^9 a_{2k}, O = \sum_{k=0}^8 a_{2k+1}$. 则 $E + O = f(1) = 1, E - O = f(-1) = (-3)^{18} = 3^{18}$, 可得

$$\left(\sum_{k=0}^9 a_{2k}\right)^2 - \left(\sum_{k=0}^8 a_{2k+1}\right)^2 = E^2 - O^2 = (E + O)(E - O) = 3^{18}$$

(2) 令 $y = x + 1$, 则

$$f(x) = f(y - 1) = (2y - 3)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k 2^k (-3)^{18-k} y^k.$$

故

$$b_k = C_{18}^k 2^k (-3)^{18-k} \quad (k = 0, 1, \dots, 18)$$

(3) $f(5) = (2 \times 5 - 1)^{18} = 9^{18} = (11 - 2)^{18}$, 可得

$$9^{18} \equiv 2^{18} \pmod{11}$$

可直接计算 $2^{18} = 262144$, 其除以 11 的余数为 3, 或利用费马小定理, 先得到 $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, 则 $2^{18} \equiv 2^8 \pmod{11}$, 求 2^8 除以 11 的余数是容易的。

(4) 可知

$$a_k = C_{18}^k 2^k (-1)^{18-k} = C_{18}^k 2^k (-1)^k.$$

当 k 为偶数时, $a_k > 0$; 当 k 为奇数时, $a_k < 0$, 最大值一定出现在某个偶数指标上, 设 $c_k = |a_k| = C_{18}^k 2^k$, 可求得 $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(18-k)}{k+1}$, 据此可得

$$c_1 < c_2 < \dots < c_{12} > c_{13} > \dots > c_{18}$$

$\{c_k\}$ 的最大值取在 $k = 12$, 而 $a_{12} = c_{12} > 0$, 所以 a_{12} 是 $a_0, a_1, \dots, a_{18}$ 中的最大值, $t = 12$

9. (1) $n = 5$;

(2) 可知 $a + b\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^5$, 故

$$a^2 - 3b^2 = (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})^5 (1 - \sqrt{3})^5 = (1 - 3)^5 = -32$$

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理

1.4 杂 题

- 12 名同学合影, 站成前排 4 人后排 8 人, 现摄影师要从后排 8 人抽 2 人调到前排, 若其他人的相对顺序不变, 则有 (Δ) 种不同的调整方式.
- 【2011 安徽理 8】设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, 则满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数是 (Δ) .
- 【2010 上海理 14】从集合 $U = \{a, b, c, d\}$ 的子集中选出 4 个不同的子集, 需同时满足以下两个条件:
 - $\emptyset, U$ 都要选出;
 - 对选出的任意两个子集 A 和 B , 必有 $A \subseteq B$ 或 $A \supseteq B$. 那么, 共有 (Δ) 对.
- 已知非空集合 S 满足 $S \subseteq \mathbb{N}$: 且对任意 $x \in S$, 都有 $8-x \in S$, 则这样的集合有 (Δ) 个.
- 从正方体的 8 个顶点中任取 4 个, 并依次标记为 A, B, C, D , 则 $AB \perp CD$ 的概率为 (Δ) .
- 【南京大学《概率论与数理统计》第一章习题 8】从 $1 \sim 30$ 中任选 3 个不同的整数, 则 3 数之和能被 3 整除的概率为 (Δ) .
- 【南京大学《概率论与数理统计》第一章习题 7】从 $1, 2, \dots, 9$ 这 9 个数字中有放回地取出 n 个数, 则这 n 个数乘积能被 10 整除的概率为 (Δ) (用含 n 的式子表示).
- 【2008 天津理 10】有 8 张卡片分别标有数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, 从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列, 要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5, 则不同的排法共有 (Δ) 种.
- 【2010 天津理 10】如图, 用四种不同颜色给图中的 A, B, C, D, E, F 六个点涂色, 要求每个点涂一种颜色, 且图中每条线段的两个端点涂不同颜色, 则不同的涂色方法有 (Δ) 种.
- 某家庭共 6 个人 (4 个大人, 2 个小孩) 计划去漂流, 景点有 3 只不同的船只可供选择, 每船最多可乘 3 人, 小孩必须要大人陪同, 则不同的乘船方式共有 (Δ) 种.
- 让 5 个男生和 5 个女生进入三个不同的教室, 满足每个教室内必有女生, 有男生的教室至少有 2 个女生, 那么满足条件的分配方式共有 (Δ) 种.
- 设 m 位男同学, n 位女同学, 1 位老师, 共 $m+n+1$ 个人参加两个活动: 活动 A 与活动 B. 要求老师参加活动至少带上一位男同学和一位女同学, 每个人恰好参加其中一个活动, 每个活动至少一人参加. 若 $m=3, n=2$, 则参与活动方法共有 (Δ) 种. 若只知 m, n 是大于 1 的正整数, 参与活动方法共有 (Δ) 种. (用含 m, n 的式子表示).
- 有编号为 1, 2, 3 的三个盒子, 将 k 个不同的小球全部放入盒子, 若每个盒子中所放球数不大于其编号的不同放法有 a_k 种, 求 a_k 的最大值 ($k \in \mathbb{N}^*$).

14. 【2012 江苏 23】 设集合 $P_n = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$, 记 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数:

(a). $A \subseteq P_n$ (b). 若 $x \in A$, 则 $2x \notin A$ (c). 若 $x \in \complement_{P_n} A$, 则 $2x \notin \complement_{P_n} A$

(1) 求 $f(4)$;

(2) 求 $f(n)$ 的解析式 (用 n 表示)。

1. 840.

2. 56.

新答案 (来源: 1.33 排列与组合.md): B

【解题思路】思路 1: 由题设条件知, 满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数是 $2^8 - 2^3 = 56$.

思路 2: 由题设条件知, 满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数是 $3 \times 2^3 + 3 \times 2^3 + 2^3 = 56$.

思路 3: 由题设条件知, 满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 可由 $\{1, 2, 3\}$ 的任何子集与 $\{4, 5, 6\}$ 的任何非空子集作并集得到, 故满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数是 $2^3 \times (2^3 - 1) = 56$, 故选 B.

【实测数据】本题理科难度为 0.58.

新答案 (来源: 1.33 排列与组合.md): 36

【解题思路】思路 1: 根据要求选出 4 个不同的子集, 由于 $\emptyset, U$ 都要选出, 所以只要考虑任意两个不相交的非空集合 A, D 的不同选法, 然后取 $B = A \cup D$ 即可满足题意.

若子集 A 为 1 个元素的集合 (不同选法是 C_4^1), 子集 D 可以是余下的 1 个元素的集合 (不同选法是 C_3^1); 也可以是余下的 2 个元素的集合 (不同选法是 C_3^2), 则子集 A, D 的不同选法有 $C_4^1 \cdot C_3^1 + C_4^1 \cdot C_3^2$.

若子集 A 为 2 个元素的集合 (不同选法是 C_4^2), 子集 D 是余下的 2 个元素的集合, 则子集 A, D 的不同选法有 $C_4^2 \times 2$. 综合上述分类情况, 合计起来便是要求的结论.

思路 2: 当然本题也可以列表枚举, 在 $U = \{a, b, c, d\}$ 中, 要使得子集 A, B 有 $A \subseteq B$ 或 $A \supseteq B$, 可以分以下情况讨论:

A	B	关系
$\{a\}$	$\{a, b\} \{a, c\} \{a, d\}$	$A \subseteq B$
$\{b\}$	$\{a, b\} \{b, c\} \{b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{c\}$	$\{b, c\} \{a, c\} \{d, c\}$	$A \subseteq B$
$\{d\}$	$\{a, d\} \{c, d\} \{b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{a\}$	$\{a, b, c\} \{a, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{b\}$	$\{a, b, c\} \{b, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{c\}$	$\{a, b, c\} \{a, c, d\} \{c, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{d\}$	$\{d, b, c\} \{a, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{a, b\}$	$\{a, b, c\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{a, c\}$	$\{a, b, c\} \{a, c, d\}$	$A \subseteq B$
$\{a, d\}$	$\{a, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{b, c\}$	$\{a, b, c\} \{b, c, d\}$	$A \subseteq B$
$\{b, d\}$	$\{b, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{c, d\}$	$\{a, c, d\} \{c, b, d\}$	$A \subseteq B$

【实测数据】本题理科难度为 0.24, 区分度为 0.42.

【易错警示】要能分清楚上述各类情况，需要有一定的抽象思维能力和对子集、包含等概念的深刻理解。不少学生在分类分析中，往往会遗漏某种情况，如考虑在集合 A 中取单元素时，只算了集合 B 中取两个元素，遗漏了取三个元素的情况；考虑了在集合 A 中取单元素后，遗漏了在集合 A 中取两个元素的情况，因此结论为 24 的很多。还有一些其他部分遗漏的情况得到结论为 30。更有分不清各种情况的学生的答案为 16, 50, 80 等等。

3. 36.

4. 31.

5. $2/5$.

6. $(3C_{10}^3 + 10^3)/C_{30}^3 = 68/203$

7. $1 - (8/9)^n - (5/9)^n + (4/9)^n$

8. 1248.

9.

10. 348.

11. 2940.

12.

13.

14.

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理