

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理

问题 1.1 设 $(x+y)^n, n \in \mathbb{N}^*$ 的展开式为 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_0 y^n$, 证明:

$$a_k = C_n^k, \text{ 其中 } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

提示: 考虑从 $\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{个}(x+y)}$, 从每一个因式中选择一项, 并把它们乘在一起。

由此证明了二项式定理。

定理 (二项式定理) 设 $x, y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, 则 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$, 称各项系数 C_n^k 为二项式系数。

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理

习题

A 组

- 【2015 湖北理 3】已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 求奇数项的二项式系数和;
- 【1993 旧高考理 15】【2000 新课标卷文 12】二项式 $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}x)^{50}$ 的展开式中系数为有理数的项共有多少项?
- 【2006 江西理 8】在 $(x - \sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中, 含 x 的奇次幂的项之和为 S , 当 $x = \sqrt{2}$ 时, 求 S .
- 设 $(1+2x)^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k (k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$, 若 $\frac{a_4}{a_6} = \frac{3}{8}$, 求 k
- 【2005 天津 11】设 $n \in \mathbb{N}^*$, 化简 $C_n^1 + C_n^2 6 + C_n^3 6^2 + \cdots + C_n^n 6^{n-1}$
- 【上海 10】已知 $x \in \mathbb{R}$, $(1+2023x)^{100} + (2023-x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, 当 $a_k < 0 (k \in \{0, 1, 2, \cdots, 100\})$ 时, 求整数 k 的最大值。
- 【2005 湖北 14】求 $(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2})^5$ 的展开式中的常数项。
- 已知 $f(x) = (2x-1)^{18} = \sum_{k=0}^{18} a_k x^k = \sum_{k=0}^{18} b_k (x+1)^k$.
 - 求 $\sum_{i=0}^{18} a_i, \sum_{i=0}^{18} |a_i|, \sum_{i=0}^{18} \frac{a_i}{2^i}, (\sum_{k=0}^9 a_{2k})^2 - (\sum_{k=0}^8 a_{2k+1})^2$;
 - 用含 k 的式子表示 $b_k (k=0, 1, \cdots, 18)$;
 - 求 $f(5)$ 除以 11 的余数;
 - 若 a_t 是 $a_0, a_1, \cdots, a_{18}$ 中的最大值, 求 t ;
- 【2019 江苏 22】设 $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, n \geq 4, n \in \mathbb{N}^*$. 已知 $a_3^2 = 2a_2a_4$.
 - 求 n 的值;
 - 设 $(1+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$, 其中 $a, b \in \mathbb{N}^*$, 求 $a^2 - 3b^2$ 的值。

¹第 4 个表达式的求解取自【1999 全国卷理 8】

1.

2.

3. 新答案 (来源: 1.34 二项式定理.md): B

【解题思路】 $(x - \sqrt{2})^{2006} = a_0 x^{2006} + a_1 x^{2005} + \cdots + a_{2005} x + a_{2006}$. 令 $x = \sqrt{2}$ 与 $x = -\sqrt{2}$, 可得

$$0 = a_0 (\sqrt{2})^{2006} + a_1 (\sqrt{2})^{2005} + \cdots + a_{2005} \sqrt{2} + a_{2006}$$

$$2^{3009} = a_0 (\sqrt{2})^{2006} - a_1 (\sqrt{2})^{2005} + \cdots - a_{2005} \sqrt{2} + a_{2006}$$

两式相减除以 2, 可得 $a_1 (\sqrt{2})^{2005} + a_3 (\sqrt{2})^{2003} + \cdots + a_{2005} \sqrt{2} = -2^{3009} \div 2 = -2^{3008}$.

新答案 (来源: 1.34 二项式定理.md): $\frac{1}{6} (7^n - 1)$

【解题思路】思路 1: 将原式转换成二项式定理的形式, 利用二项式定理求解.

$$\text{原式} = \frac{1}{6} [C_n^0 + C_n^1 6 + C_n^2 6^2 + \cdots + C_n^n 6^n] - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (1+6)^n - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (7^n - 1)$$

思路 2: 观察所求, 发现其与二项展开式之间的关系, 从而解决问题.

$$\text{记 } A = C_n^1 + C_n^2 6 + C_n^3 6^2 + \cdots + C_n^n 6^{n-1},$$

$$\text{则 } 6A + 1 = C_n^0 + C_n^1 6 + C_n^2 6^2 + \cdots + C_n^n 6^n = 7^n, \text{ 故 } A = \frac{7^n - 1}{6}.$$

【实测数据】本题满分 4 分, 平均得分 1.35 分 (难度 0.34)

新答案 (来源: 1.34 二项式定理.md): $\frac{63\sqrt{2}}{2}$

【解题思路】思路 1: 可不妨令 $x > 0$, 利用

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2$$

化三项式为二项式, 再用二项式定理写出展开式的通项, 从而求出展开式的常数项.

当 $x > 0$ 时,

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2\right]^5 = 2^{-5} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^{10}$$

则 $\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^{10}$ 的二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r \cdot x^{\frac{r}{2} - \frac{10-r}{2}} \cdot 2^{\frac{10-r}{2}}$,

常数项所对应的 r 满足 $\frac{r}{2} - \frac{10-r}{2} = 0$, 得 $r = 5$.

所以所求常数项为 $2^{-5} \cdot C_{10}^5 \cdot 2^{\frac{5}{2}} = \frac{63\sqrt{2}}{2}$.

思路 2: 也可通过先通分化简后, 化三项式为二项式, 再用二项式定理求出展开式中的常数项.

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left(\frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{2x}\right)^5 = \frac{\left[(x + \sqrt{2})^2\right]^5}{(2x)^5} = \frac{(x + \sqrt{2})^{10}}{(2x)^5}$$

对于二项式 $(x + \sqrt{2})^{10}$, 其通项 $T_{r+1} = C_{10}^r \cdot x^{10-r} \cdot 2^{\frac{r}{2}}$. 要得到原展开式的常数项, 则需 $10 - r = 5$, 即 $r = 5$.

所以所求常数项为 $\frac{C_{10}^5 \cdot 2^{\frac{5}{2}}}{2^5} = \frac{63\sqrt{2}}{2}$.

思路 3: 若未能直接看出上述化三项式为二项式的特征, 则可将三项式中的前两项先组合起来, 再用二项式定理直接展开, 解法如下:

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left[\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{2}\right]^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^k 2^{\frac{5-k}{2}}$$

注意其中常数项只出现在 $k = 0, 2, 4$ 中, 合并可得常数项为

$$2^{\frac{5}{2}} + C_5^2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + C_5^4 C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \frac{63\sqrt{2}}{2}$$

【实测数据】.

新答案 (来源: 1.34 二项式定理.md): 45

【解题思路】将 $1+x$ 看作一个整体, 则

$$\left(1+x+\frac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$$

的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r (1+x)^{10-r} \left(\frac{1}{x^{2015}}\right)^r$ ($r = 0, 1, 2, \dots, 10$), 其中只有 T_1 中含 x^2 项, x^2 项的系数为 $C_{10}^0 C_{10-0}^2$, 即 45.

【实测数据】本题理科难度为 0.66, 区分度为 0.46.

4.

5.

6.

7. $63\sqrt{2}/2$ 方法一: 从

$$\underbrace{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) \cdots \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)}_{5\text{个}}$$

的每一个因式中取一项相乘, 即得到原式的展开式中的一项, 设取出 a 个 $\frac{x}{2}$, b 个 $\frac{1}{x}$, c 个 $\sqrt{2}$, 要得到常数项, a, b, c 必须满足:

$$a + b + c = 5, a = b$$

解得 $(a, b, c) = (2, 2, 1), (1, 1, 3)$ 或 $(0, 0, 5)$, 故常数项为

$$(\sqrt{2})^5 + C_5^3 C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^3 + C_5^2 C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{63\sqrt{2}}{2}$$

方法二: $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{x}\right)^2\right)^5 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{x}\right)^{10}$, 后略。

$$8. (1) \sum_{i=0}^{18} a_i = f(1) = 1, \sum_{i=0}^{18} |a_i| = f(-1) = 3^{18}, \sum_{i=0}^{18} \frac{a_i}{2^i} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

设 $E = \sum_{k=0}^9 a_{2k}, O = \sum_{k=0}^8 a_{2k+1}$. 则 $E + O = f(1) = 1, E - O = f(-1) = (-3)^{18} = 3^{18}$, 可得

$$\left(\sum_{k=0}^9 a_{2k}\right)^2 - \left(\sum_{k=0}^8 a_{2k+1}\right)^2 = E^2 - O^2 = (E + O)(E - O) = 3^{18}$$

(2) 令 $y = x + 1$, 则

$$f(x) = f(y - 1) = (2y - 3)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k 2^k (-3)^{18-k} y^k.$$

故

$$b_k = C_{18}^k 2^k (-3)^{18-k} \quad (k = 0, 1, \dots, 18)$$

(3) $f(5) = (2 \times 5 - 1)^{18} = 9^{18} = (11 - 2)^{18}$, 可得

$$9^{18} \equiv 2^{18} \pmod{11}$$

可直接计算 $2^{18} = 262144$, 其除以 11 的余数为 3, 或利用费马小定理, 先得到 $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, 则 $2^{18} \equiv 2^8 \pmod{11}$, 求 2^8 除以 11 的余数是容易的。

(4) 可知

$$a_k = C_{18}^k 2^k (-1)^{18-k} = C_{18}^k 2^k (-1)^k.$$

当 k 为偶数时, $a_k > 0$; 当 k 为奇数时, $a_k < 0$, 最大值一定出现在某个偶数指标上, 设 $c_k = |a_k| = C_{18}^k 2^k$, 可求得 $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(18-k)}{k+1}$, 据此可得

$$c_1 < c_2 < \dots < c_{12} > c_{13} > \dots > c_{18}$$

$\{c_k\}$ 的最大值取在 $k = 12$, 而 $a_{12} = c_{12} > 0$, 所以 a_{12} 是 $a_0, a_1, \dots, a_{18}$ 中的最大值, $t = 12$

9. (1) $n = 5$;

(2) 可知 $a + b\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^5$, 故

$$a^2 - 3b^2 = (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})^5 (1 - \sqrt{3})^5 = (1 - 3)^5 = -32$$

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理

1.4 杂 题

- 12 名同学合影, 站成前排 4 人后排 8 人, 现摄影师要从后排 8 人抽 2 人调到前排, 若其他人的相对顺序不变, 则有 (Δ) 种不同的调整方式.
- 【2011 安徽理 8】设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, 则满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数是 (Δ) .
- 【2010 上海理 14】从集合 $U = \{a, b, c, d\}$ 的子集中选出 4 个不同的子集, 需同时满足以下两个条件:
 - $\emptyset, U$ 都要选出;
 - 对选出的任意两个子集 A 和 B , 必有 $A \subseteq B$ 或 $A \supseteq B$. 那么, 共有 (Δ) 对.
- 已知非空集合 S 满足 $S \subseteq \mathbb{N}$: 且对任意 $x \in S$, 都有 $8-x \in S$, 则这样的集合有 (Δ) 个.
- 从正方体的 8 个顶点中任取 4 个, 并依次标记为 A, B, C, D , 则 $AB \perp CD$ 的概率为 (Δ) .
- 【南京大学《概率论与数理统计》第一章习题 8】从 $1 \sim 30$ 中任选 3 个不同的整数, 则 3 数之和能被 3 整除的概率为 (Δ) .
- 【南京大学《概率论与数理统计》第一章习题 7】从 $1, 2, \dots, 9$ 这 9 个数字中有放回地取出 n 个数, 则这 n 个数乘积能被 10 整除的概率为 (Δ) (用含 n 的式子表示).
- 【2008 天津理 10】有 8 张卡片分别标有数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, 从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列, 要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5, 则不同的排法共有 (Δ) 种.
- 【2010 天津理 10】如图, 用四种不同颜色给图中的 A, B, C, D, E, F 六个点涂色, 要求每个点涂一种颜色, 且图中每条线段的两个端点涂不同颜色, 则不同的涂色方法有 (Δ) 种.
- 某家庭共 6 个人 (4 个大人, 2 个小孩) 计划去漂流, 景点有 3 只不同的船只可供选择, 每船最多可乘 3 人, 小孩必须要大人陪同, 则不同的乘船方式共有 (Δ) 种.
- 让 5 个男生和 5 个女生进入三个不同的教室, 满足每个教室内必有女生, 有男生的教室至少有 2 个女生, 那么满足条件的分配方式共有 (Δ) 种.
- 设 m 位男同学, n 位女同学, 1 位老师, 共 $m+n+1$ 个人参加两个活动: 活动 A 与活动 B. 要求老师参加活动至少带上一位男同学和一位女同学, 每个人恰好参加其中一个活动, 每个活动至少一人参加. 若 $m=3, n=2$, 则参与活动方法共有 (Δ) 种. 若只知 m, n 是大于 1 的正整数, 参与活动方法共有 (Δ) 种. (用含 m, n 的式子表示).
- 有编号为 1, 2, 3 的三个盒子, 将 k 个不同的小球全部放入盒子, 若每个盒子中所放球数不大于其编号的不同放法有 a_k 种, 求 a_k 的最大值 ($k \in \mathbb{N}^*$).

14. 【2012 江苏 23】 设集合 $P_n = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$, 记 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数:

(a). $A \subseteq P_n$ (b). 若 $x \in A$, 则 $2x \notin A$ (c). 若 $x \in \complement_{P_n} A$, 则 $2x \notin \complement_{P_n} A$

(1) 求 $f(4)$;

(2) 求 $f(n)$ 的解析式 (用 n 表示)。

1. 840.

2. 56.

新答案 (来源: 1.33 排列与组合.md): B

【解题思路】思路 1: 由题设条件知, 满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数是 $2^8 - 2^3 = 56$.

思路 2: 由题设条件知, 满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数是 $3 \times 2^3 + 3 \times 2^3 + 2^3 = 56$.

思路 3: 由题设条件知, 满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 可由 $\{1, 2, 3\}$ 的任何子集与 $\{4, 5, 6\}$ 的任何非空子集作并集得到, 故满足 $S \subseteq A$ 且 $S \cap B \neq \emptyset$ 的集合 S 的个数是 $2^3 \times (2^3 - 1) = 56$, 故选 B.

【实测数据】本题理科难度为 0.58.

新答案 (来源: 1.33 排列与组合.md): 36

【解题思路】思路 1: 根据要求选出 4 个不同的子集, 由于 $\emptyset, U$ 都要选出, 所以只要考虑任意两个不相交的非空集合 A, D 的不同选法, 然后取 $B = A \cup D$ 即可满足题意.

若子集 A 为 1 个元素的集合 (不同选法是 C_4^1), 子集 D 可以是余下的 1 个元素的集合 (不同选法是 C_3^1); 也可以是余下的 2 个元素的集合 (不同选法是 C_3^2), 则子集 A, D 的不同选法有 $C_4^1 \cdot C_3^1 + C_4^1 \cdot C_3^2$.

若子集 A 为 2 个元素的集合 (不同选法是 C_4^2), 子集 D 是余下的 2 个元素的集合, 则子集 A, D 的不同选法有 $C_4^2 \times 2$. 综合上述分类情况, 合计起来便是要求的结论.

思路 2: 当然本题也可以列表枚举, 在 $U = \{a, b, c, d\}$ 中, 要使得子集 A, B 有 $A \subseteq B$ 或 $A \supseteq B$, 可以分以下情况讨论:

A	B	关系
$\{a\}$	$\{a, b\} \{a, c\} \{a, d\}$	$A \subseteq B$
$\{b\}$	$\{a, b\} \{b, c\} \{b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{c\}$	$\{b, c\} \{a, c\} \{d, c\}$	$A \subseteq B$
$\{d\}$	$\{a, d\} \{c, d\} \{b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{a\}$	$\{a, b, c\} \{a, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{b\}$	$\{a, b, c\} \{b, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{c\}$	$\{a, b, c\} \{a, c, d\} \{c, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{d\}$	$\{d, b, c\} \{a, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{a, b\}$	$\{a, b, c\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{a, c\}$	$\{a, b, c\} \{a, c, d\}$	$A \subseteq B$
$\{a, d\}$	$\{a, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{b, c\}$	$\{a, b, c\} \{b, c, d\}$	$A \subseteq B$
$\{b, d\}$	$\{b, c, d\} \{a, b, d\}$	$A \subseteq B$
$\{c, d\}$	$\{a, c, d\} \{c, b, d\}$	$A \subseteq B$

【实测数据】本题理科难度为 0.24, 区分度为 0.42.

【易错警示】要能分清楚上述各类情况，需要有一定的抽象思维能力和对子集、包含等概念的深刻理解。不少学生在分类分析中，往往会遗漏某种情况，如考虑在集合 A 中取单元素时，只算了集合 B 中取两个元素，遗漏了取三个元素的情况；考虑了在集合 A 中取单元素后，遗漏了在集合 A 中取两个元素的情况，因此结论为 24 的很多。还有一些其他部分遗漏的情况得到结论为 30。更有分不清各种情况的学生的答案为 16, 50, 80 等等。

3. 36.

4. 31.

5. $2/5$.

6. $(3C_{10}^3 + 10^3)/C_{30}^3 = 68/203$

7. $1 - (8/9)^n - (5/9)^n + (4/9)^n$

8. 1248.

9.

10. 348.

11. 2940.

12.

13.

14.

第一章 计数原理与二项式定理

1.3 二项式定理