

第一章 计数原理与二项式定理

1.2 从杨辉三角谈到组合数

在中国南宋数学家杨辉的著作《详解九章算法》中，系统记录了一个三角形数阵，我们称其为“杨辉三角”。杨辉三角是中国古代数学的杰出研究成果之一，它把二项式系数图形化，把组合数内在的一些代数性质从图形中体现出来，是一种离散型的数与形的结合。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

观察到杨辉三角满足下述三条性质：

性质 1： 每一行左右对称，且两端的数都是 1；

性质 2： 每一行的数呈“中间大、两边小”的特点；

性质 3： 从第三行起，不在两端的任意一个数，都等于它两肩上的数字之和。

问题 1.1 依次写出 $k = 1, 2, 3, 4$ 时 $(1+x)^k$ 的展开式，并按 x 的幂次升序排列排列，将各项系数与杨辉三角中第 $k+1$ 行的数字进行比较，你发现了什么？

我们合理地猜测，这一性质对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$ 都成立，事实也的确如此（**需用到第 3 条性质，后将详细说明**）。于是将杨辉三角中的数字等量替换为组合数，得到下图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & \\
 & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & & \\
 C_6^0 & & C_6^1 & & C_6^2 & & C_6^3 & & C_6^4 & & C_6^5 & & C_6^6
 \end{array}$$

问题 1.2 根据性质 1，写出 C_n^m 与 C_n^{n-m} 的关系式，并给出证明。

问题 1.3 解答下述问题:

1. 根据**性质 2** 可知, $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$ 满足一个不等关系, 写出这个不等关系。
2. 设 $f(r) = C_n^r$, 其定义域为 $\{0, 1, \dots, n\}$ 。讨论 $f(r-1)$ 与 $f(r)$ 的大小关系, 据此完成 (1) 中提出的不等关系的证明。

问题 1.4 根据**性质 3**, 写出含有组合数 $C_{n+1}^{k+1}, C_n^k, C_n^{k+1}$ 的恒等式, 给出证明, 并据此论证本章开头提出的猜测: “杨辉三角中, 第 $k+1$ 行的数字依次等于 $(1+x)^k$ 按 x 的幂次升序展开后各项的系数。”

问题 1.5 解答下述问题:

1. 观察杨辉三角第二斜线的数, 标出 $C_1^1, C_2^1, C_3^1, C_4^1$ 这四个数在杨辉三角中的位置, 计算这四个数之和; 标出 C_5^2 在杨辉三角中的位置, 并计算它的值, 你发现了什么?
2. 观察杨辉三角第三斜线的数, 标出 $C_2^2, C_3^2, C_4^2, C_5^2$ 这四个数在杨辉三角中的位置, 计算这四个数之和; 标出 C_6^3 在杨辉三角中的位置, 并计算它的值, 你发现了什么?
3. 猜想: 当 $n \geq r$ 时, $C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \dots + C_n^r$ 等于哪个组合数的值? 并给出证明; (提示: 对 n 使用数学归纳法或利用性质 3)

注: 组合数有如下边界情况, 记 $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n^0 = 1$; 对任意的 $k < 0$ 或 $k > n$, 有 $C_n^k = 0$;

从上往下数, 第 1 次全行的数都为 1 的是第 1 行, 第 2 次全行都为 1 的是第 3 行, $\dots$, 第 n 次全行的数都为 1 的是第 (Δ) 行, 第 61 行中 1 的个数是 (Δ) 。

(提示: 在第 0 行补上一个 1, 你能否看出什么规律 (形状上的相似)?)

4. 【2006 湖北 15 改编】将杨辉三角中的每一个数 C_n^r 都换成 $\frac{1}{(n+1)C_n^r}$, 就得到一个如下图所示的分数三角形

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & \frac{1}{1} \\
 & & & & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 & & & & & & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\
 & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\
 & & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \\
 \frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{1}{105} & \frac{1}{140} & \frac{1}{105} & \frac{1}{42} & \frac{1}{7}
 \end{array}$$

这称为莱布尼茨三角形. 从莱布尼茨三角形可看出 $\frac{1}{(n+1)C_n^r} + \frac{1}{(n+1)C_n^x} = \frac{1}{nC_{n-1}^x}$ 其中 $x = (\Delta)$, 令 $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{nC_{n-1}^2} + \frac{1}{(n+1)C_n^2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项和为 (Δ) (用最简分数表示)

5. 【2016 广州一模改编】以下数表的构造思路源于我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算术》一书中的“杨辉三角形”。

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2013 & 2014 & 2015 & 2016 \\
 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 4027 & 4029 & 4031 \\
 & & 8 & 12 & 16 & \cdots & 8056 & 8060 \\
 & & & 20 & 28 & \cdots & 16116 \\
 & & & & & \cdots & & & &
 \end{array}$$

该表由若干行数字组成, 从第二行起, 每一行中的数字均等于其“肩上”两数之和. 若第一行有 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 个数, 则第 $k(1 \leq k \leq n)$ 行是公差为 (Δ) 的等差数列, 表中最后一行仅有一个数, 这个数为 (Δ)

6. 使用组合方法解答下述问题:

- (1) 证明: 一个非空有限集具有奇数个元素的子集数与具有偶数个元素的子集数相等;
 (2) 设 $k, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq k < n$, 证明:

$$C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^k = C_{n-1}^k C_n^{k-1} C_{n+1}^{k+1}$$

这称为六边形恒等式 (不妨在杨辉三角中标出恒等式中涉及的六个组合数。)

(3) 【2016 江苏 23 (2)】: 证明: 当正整数 m, n 满足 $m \leq n$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{n-m} (m+1+k) C_{m+k}^m = (m+1) C_{n+2}^{m+2}$$

(4) 证明:

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1} \quad \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = n(n+1) 2^{n-2}$$

(5) 证明¹:

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \quad \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np(1-p)$$

(6) 证明²:

$$\sum_{k=r}^{\min\{n, M\}} \frac{k C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{nM}{N}, \quad \sum_{k=r}^{\min\{n, M\}} \frac{k(k-1) C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)}$$

其中 $n, N, M \in \mathbb{N}^*, M \leq N, n \leq N, r = \max\{0, n - N + M\}$ 。

(注: 请先完成本习题组第 8 题与第 9 题第 (3) 小问。)

(7) 【2008 江苏 23 (2) (iii)】证明:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

(8) 【2024 广东一模 18 (3)】某单位进行招聘面试, 已知有 N 名学生参加招聘面试, 其中来自 A 校的学生人数为 $n(n > 1)$, 每人被随机分配一个面试号码 $k(k = 1, 2, 3, \dots, n)$, 按面试号码 k 从小到大依次进行面试, 每人面试时长 1 分钟。记随机变量 X 表示最后一名 A 校学生完成面试所用的时长 (从第 1 名学生开始面试到最后一名 A 校学生完成面试所用时间)。 $E(X)$ 是 X 的数学期望, 求证: $E(X) = \frac{n(N+1)}{n+1}$

(9) 【2017 江苏 23 节选】证明:

$$\sum_{k=n}^{m+n} \frac{1}{k} \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{m+n}^n} < \frac{n}{(m+n)(n-1)}$$

7. 【2008 江苏 23 改编】如果一个等式 $f(x) = g(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都成立, 那么其导函数满足: $f'(x) = g'(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = a$ 对称, 证明: $y = f'(x)$ 的图象关于 $(a, 0)$ 对称;

(2) 证明: 当 $n > 2$ 时,

$$n [(1+x)^{n-1} - 1] = \sum_{k=2}^n k C_n^k x^{k-1}$$

(3) 设正整数 $n \geq 3$, 证明:

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 C_n^k = 0$$

¹这是二项分布的期望和二阶矩公式。

²这是超几何分布的期望和二阶阶乘矩公式。

8. 有一种组合恒等式的证明方法叫做“算两次”：将一个量用两种方法分别计算一次，由结果相同得到等式，例如列方程时要从不同的视角列出表示同一个量的代数式，几何中常用的等积法等等。我们还可以用这种方法，结合二项式定理得到其他组合恒等式。

(1) 依次写出 $(1+x)^{2n}$ 与 $(1+x)^n(1+x)^n$ 的展开式（只在括号内做展开即可）；

(2) 写出 $(1+x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 项的系数表达式；

(3) 证明：

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

(4) 证明：当 n, p, q 是正整数，且 $p \geq n, q \geq n$ 时，有³

$$\sum_{k=0}^n C_p^k C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

(5) 当 p, q, n 可取任意正整数时，上一题的恒等式是否满足？

9. 对部分组合恒等式，可以通过构造实例来进行证明，例如，要证明 $C_n^m = C_n^{n-m}$ ，可考虑由 m 个 0 和 $n-m$ 个 1 组成的长度为 n 的比特串，取定 0 的位置就唯一确定了比特串，这样的比特串共有 C_n^m 个，同理，取定 1 的位置也唯一确定了比特串，这样的比特串共有 C_n^{n-m} 个，因此 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 。

请仿照示例证明下列恒等式：

$$(1) C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

$$(2) \sum_{k=0}^{n-r} C_{r+k}^r = C_{n+1}^{r+1}$$

$$(3) \sum_{k=0}^n C_p^k C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

$$(4) \sum_{k=1}^n k(C_n^k)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$$

$$(5) \sum_{k=0}^n kC_n^k = n2^{n-1}$$

$$(6) \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$$

提示：

第 (2) 问：对于由 $r+1$ 个 1 和 $n-r$ 个 0 组成的比特串，考虑最后一个 1 的位置。

第 (4) 问：用两种方法计数选择一个委员会的方式数，如果这个委员会有 n 个成员，要求这些成员选自 n 个数学教授和 n 个计算机科学教授，并使得委员会的主席是数学教授。

第 (5) 问：对 n 个元素构成的集合 A ，先选出集合 $S \subseteq A$ ，再从中选出一个元素 x ，或者先选出特殊元素 x ，再构造出 S 。

第 (6) 问：对 n 个元素构成的集合 A ，先选出集合 $S \subseteq A$ ，再从中选出两个元素 x, y (x, y 可以相同) 或者先选出特殊元素 x, y (这里要分类讨论)，再构造出 S 。

³我国元末明初时期数学家朱世杰在 1303 年发现了这一恒等式，1772 年法国数学家范德蒙 (Vandermonde) 也发现了这个恒等式，这一恒等式也称朱世杰—范德蒙恒等式 (Chu-Vandermonde Identity)。

可以发现,第 8 到 15 行左右的两块小三角形与第 1 到 7 行的三角形也是完全一样的,再继续往下画也是如此,这种情况被称为**自相似**,这个三角形也被称为**谢尔宾斯基三角形**。

为何会这样呢?我们这里给出一个粗浅的解释:第 8 行只有两端为 1,中间全为 0,可以认为这两个 1 被隔绝开了。在这两个隔开的部分未互相影响时,它们将像第 0 行的 1 一样独立向下生成数字,其形态与第 0 到 7 行是完全相同的,直到第 15 行两边相碰,此时整行均为 1,而第 16 行再次变为两端为 1 的情况,以此类推下去……

利用自相似的性质:第 14 行的 1 的个数,等于求第 6 行的 1 的个数再乘 2。(请观察上图)。根据这一性质可求出第 61 行中 1 的个数,设第 s 行的数字 1 的个数为 $f(s)$,则

$$f(61) = f((2^6 - 1) - 2) = 2f((2^5 - 1) - 2) = 4f((2^4 - 1) - 2) = 8f((2^3 - 1) - 2) = 8f(5) = 32$$

自相似与分形几何的相关知识,在拓展阅读中略有介绍。

6. 由莱布尼茨三角形的相邻两数和性质知

$$\frac{1}{(n+1)C_n^r} + \frac{1}{(n+1)C_n^{r+1}} = \frac{1}{nC_{n-1}^r},$$

故

$$x = r + 1$$

方法一:

$$\frac{1}{(k+1)C_k^2} = \frac{2}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{k-1} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \right) = \frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}.$$

因此

$$a_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)C_k^2} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

易求得数列前 100 项和为 $\frac{2525}{51}$

方法二:看图中第二行第一列,反复利用莱布尼茨三角形的性质向下分解 $\frac{1}{2}$,有

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{20} \cdots$$

可知, $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$, 后略。

7. 2017×2^{2015} . 容易猜到第 k 行是公差为 2^{k-1} 的等差数列,可使用数学归纳法证明,思路如下:

设第 k 行第 j 个数为 $a_{k,j}$, 且满足递推 $a_{k+1,j} = a_{k,j} + a_{k,j+1}$

当 $k=1$ 时,显然第 1 行公差为 1,命题成立。假设当 $k=p$ 时命题成立,则当 $k=p+1$ 时,

$$a_{p+1,t+1} - a_{p+1,t} = (a_{p,t+1} + a_{p,t}) - (a_{p,t} + a_{p,t-1}) = 2^p$$

命题成立,得证。

这些数列的首项满足 $a_{k+1,1} = a_{k,1} + a_{k,2} = 2a_{k,1} + 2^{k-1}$, 设 $a_{k,1} = c_k$, 下求解 $\{c_n\}$ 通项公式: 设 $b_k = \frac{c_k}{2^{k-1}}$, 等式两边同时除以 2^k , 得 $b_{k+1} = b_k + \frac{1}{2}$, 最终解得 $c_n = (n+1)2^{n-2}$

故最后一行的这个数为 2017×2^{2015} 。

8. (1) 设非空集合 A 有 n 个元素。由二项式定理,

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \iff \sum_{k \text{ 为偶}} C_n^k = \sum_{k \text{ 为奇}} C_n^k = 2^{n-1}.$$

左边分别表示偶数元子集与奇数元子集的个数, 故结论成立。

(2)

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-m} (m+1+k) C_{m+k}^m &= \sum_{k=0}^{n-m} (m+1+k) \frac{(m+k)!}{m!k!} = (m+1) \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(m+1+k)!}{(m+1)!k!} \\ &= (m+1) \sum_{k=0}^{n-m} C_{m+k+1}^{m+1} = (m+1) C_{n+2}^{m+2} \end{aligned}$$

评: 这一类问题的一种思路是尽可能消去求和符号内除组合数外的部分。

(4) 参考第 (3) 问的方法.

(5) 参考第 (3) 问的方法.

(6)

$$\sum_{k=r}^{\min\{n, M\}} k C_M^k C_{N-M}^{n-k} = \sum_{k=r}^{\min\{n, M\}} M C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}$$

可以验证, 这里的求和范围包含了 $C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k}$ 所有的非零项, 根据范德蒙德恒等式, 有:

$$\sum_{k=r}^{\min\{n, M\}} M C_{M-1}^{k-1} C_{N-M}^{n-k} = M C_{N-1}^{n-1}$$

因此:

$$\sum_{k=r}^{\min\{n, M\}} \frac{k C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{M C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{nM}{N}$$

第一个等式得证。

$$\sum_{k=r}^{\min\{n, M\}} k(k-1) C_M^k C_{N-M}^{n-k} = M(M-1) \sum_{k=2}^{\min\{n, M\}} C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}$$

可以验证, 这里的求和范围包含了 $C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}$ 所有的非零项, 根据范德蒙德恒等式, 有:

$$M(M-1) \sum_{k=2}^{\min\{n, M\}} C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k} = M(M-1) C_{N-2}^{n-2}$$

故

$$\sum_{k=r}^{\min\{n, M\}} \frac{k(k-1) C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)}$$

第二个等式得证。

(7) 参考第 (3) 问的方法:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

(8) 设来自 A 校的学生面试号码依次为 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq N$, 则 $X = i_n$ 。

从 $1, 2, \dots, N$ 中等可能地选出 n 个号码分给 A 校学生, 可知

$$P(X=t) = \frac{C_{t-1}^{n-1}}{C_N^n} \quad (n \leq t \leq N).$$

于是

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{t=n}^N t \cdot \frac{C_{t-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{1}{C_N^n} \sum_{t=n}^N t C_{t-1}^{n-1} = \frac{n}{C_N^n} \sum_{t=n}^N C_t^n \\ &= \frac{n}{C_N^n} C_{N+1}^{n+1} = \frac{n(N+1)}{n+1}. \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{m+n} \frac{1}{k} \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{m+n}^n} &< \sum_{k=n}^{m+n} \frac{1}{k-1} \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{m+n}^n} \\ &= \frac{1}{(n-1)C_{m+n}^n} \sum_{k=n}^{m+n} C_{k-2}^{n-2} \\ &= \frac{1}{(n-1)C_{m+n}^n} C_{m+n-1}^{n-1} = \frac{n}{(m+n)(n-1)}. \end{aligned}$$

评: 传统数学解题训练中一般呈现的是: “某种方法可以解决某种问题”, 但这里其实缺少了关键的信息: 它没有书写试错的经历, 尝试的途径, 它把这些藏起来, 直接摆出正确的, “天衣无缝”的, 令人“拍案叫绝”或是“不知所云”的解答过程, 诚然, 这种不说“废话”的行文方式既简练又省事, 然而这也使得学习者虽然能理解例题的正确思路, 对相似的题型掌握得不错, 但跳出例题的范围, 接触到新的问题时就无从下手。你可以说这一切要靠学生自己去领悟, 尽管这句话很“讨人嫌”。

学生在做题练习时, 不要以解出题目并和参考答案对的上为终极目标, 应尽可能尝试我们认为可行的方案, 并在卡住的地方思考下面的问题:

(1) 我对方法理解太浅导致本来可以用此方法解决却没能真正解决? 若果真如此, 那么我对此方法的理解还差在哪里?

(2) 这个方法在此问题中根本不可行? 问题里有什么本质困难是此方法无法克服的? 有什么方法恰好可以克服这样的缺陷?

根据前面习题的经验, 我们此时要把求和符号中的 $\frac{1}{k}$ “消去”, 直接仿照前面的组合数恒等变形是做不到的。这里就需要用到放缩了, 自然要问:

为何要放缩? 如果一个表达式可以直接求出确切的值, 那当然无需所谓“放缩”, 除非不存在一个等值的, 简单的表达式来表示它。

放缩的准则如何? 根据上一问可以很自然地得出一个准则, 就是“易求性”, 即放缩后的表达式要简单, 易于求出确切的值。此外, 放缩必然要引入误差, 在保证前者的前提下, 误差要尽可能小。

对于 $\frac{1}{k}C_{k-1}^{n-1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}$, 学生的一种想法是:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} < k \cdot \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = nC_k^n$$

这一想法的问题何在? 它虽然遵循了放缩后的“易求性”准则, 但没有考虑到控制误差, 他将原表达式放大了 k^2 倍, 这是多么大的一个误差!

9. (1) 由图象关于 $x=a$ 对称, 知 $f(a+t)=f(a-t)(\forall t \in \mathbb{R})$, 两边对 t 求导, 得 $f'(a+t)=-f'(a-t)$, 这表明 $y=f'(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 中心对称。

(2) 对 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ 两边求导得

$$(*) \quad n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} \iff n[(1+x)^{n-1} - 1] = \sum_{k=2}^n k C_n^k x^{k-1}$$

(3) 第一式: 令 $(*)$ 式中 $x=1$ 立得:

第三式: 令 $(*)$ 式中 $x=-1$, 得

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k (-1)^{k-1} = 0 \iff \sum_{k=1}^n (-1)^k k C_n^k = 0 \quad (**)$$

再对

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}$$

两边求导, 得

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k x^{k-2}$$

令 $x=-1$, 有

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k k(k-1) C_n^k = 0 \iff \sum_{k=1}^n (-1)^k k(k-1) C_n^k = 0$$

将其与 $(**)$ 式相加即完成了证明。

10. (1)

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k, (1+x)^n (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right)$$

- (2)

$$\sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$

- (3) $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 项的系数为 C_{2n}^n , 比较 x^n 项系数, 得

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

(4.1) 由 $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$, 比较 x^n 项系数, 得

$$\sum_{k=0}^n C_p^k C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

(4.2) 可以证明:

$$\sum_{\substack{\max\{n-q, 0\} \leq k \\ \leq \min\{n, p\}}} C_p^k C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

事实上, 也只有当 $\max\{n-q, 0\} \leq k \leq \min\{n, p\}$ 时, $C_p^k C_q^{n-k}$ 才不为零 (参考本节正文部分末尾处的注记。) 而 $0 \leq \max\{n-q, 0\}, \min\{n, p\} \leq n$ 因此

$$\sum_{k=0}^n C_p^k C_q^{n-k} = \sum_{\substack{\max\{n-q, 0\} \leq k \\ \leq \min\{n, p\}}} C_p^k C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

(4.1) 中的式子在一般情况下仍然成立。

当在计算中遇到形如 $\sum_k C_a^k C_b^{d-k}$ 的求和结构时, 满足以下两个条件即可直接使用范德蒙德恒等式:

(1) 两个组合数的上标之和为常数;

(2) 求和范围包含所有非零项;

11. (1) 考虑长度为 $n+1$ 的比特串, 其中有 $k+1$ 个 1。按**第一个位置**分类。若第一个位置取 1, 则其余 n 位中还需取 k 个 1, 共 C_n^k 种; 若第一个位置取 0, 则其余 n 位中需取 $k+1$ 个 1, 共 C_n^{k+1} 种, 故

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

(2) 考虑由 $r+1$ 个 1 和 $n-r$ 个 0 组成的长度为 $n+1$ 的比特串。这样的串共有 C_{n+1}^{r+1} 个。按**最后一个 1 所处的位置**分类。若最后一个 1 在第 $r+k+1$ 位, 则其前 $r+k$ 位中恰有 r 个 1, 共 C_{r+k}^r 个, 其中 $k=0, 1, \dots, n-r$, 故

$$\sum_{k=0}^{n-r} C_{r+k}^r = C_{n+1}^{r+1}.$$

(3) 设有 $p+q$ 个不同元素, 其中前 p 个为甲类, 后 q 个为乙类。任选 n 个元素的方法数为 C_{p+q}^n 。若按**所选甲类元素个数**分类, 选 k 个甲类、 $n-k$ 个乙类的方法数为 $C_p^k C_q^{n-k}$, 分类求和得

$$\sum_{k=0}^n C_p^k C_q^{n-k} = C_{p+q}^n.$$

(4) 从 n 个数学教授和 n 个计算机教授中选出 n 人组成委员会, 并指定一名数学教授为主席。若委员会中有 k 名数学教授, 则主席有 k 种选法, 委员会的其余成员有 $C_n^k C_n^{n-k} = (C_n^k)^2$ 种选法, 总方法数为 $\sum_{k=1}^n k(C_n^k)^2$ 。另一方面, 先选主席, 有 n 种; 再从剩余 $2n-1$ 人中选 $n-1$ 人, 方法数为 C_{2n-1}^{n-1} 。故

$$\sum_{k=1}^n k(C_n^k)^2 = n C_{2n-1}^{n-1}.$$

(5) 设 A 是一个 n 元集合。先选子集 $S \subseteq A$, 再从 S 中选一个元素 x 。若 $|S| = k$, 则有 kC_n^k 种, 故总数为 $\sum_{k=0}^n kC_n^k$ 。另一方面, 先选特殊元素 x , 有 n 种; 再从其余 $n-1$ 个元素中任取若干与 x 组成 S , 有 2^{n-1} 种, 故

$$\sum_{k=0}^n kC_n^k = n2^{n-1}.$$

(6) 设 A 是一个 n 元集合。先选子集 $S \subseteq A$, 再从 S 中选有序二元组 (x, y) , 允许 $x = y$ 。若 $|S| = k$, 则有 $k^2C_n^k$ 种, 故总数为 $\sum_{k=0}^n k^2C_n^k$ 。另一方面, 先选 (x, y) 。当 $x = y$ 时, 有 n 种, 之后其余元素任取, 共 $n2^{n-1}$ 种; 当 $x \neq y$ 时, 有 $n(n-1)$ 种, 之后其余元素任取, 得 $n(n-1)2^{n-2}$ 种, 故

$$\sum_{k=0}^n k^2C_n^k = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$$

第一章 计数原理与二项式定理

1.2 从杨辉三角谈到组合数

B 组

1. 设 q 是非零实数, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义 “ q -数”

$$(n)_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

“ q -阶乘”

$$(n)!_q = (1)_q(2)_q \cdots (n)_q, \quad \text{且 } (0)!_q = 1.$$

“ q -组合数”

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)!_q}{(k)!_q(n-k)!_q}, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, k \leq n$$

(1) 求 $\binom{5}{3}_2$;

- (2) 证明: 对于任意 $k, n \in \mathbb{N}^*, k+1 \leq n$,

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q$$

- (3) 证明: 对于任意 $k, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, k+1 \leq n$,

$$\binom{n+m+1}{k+1}_q - \binom{n}{k+1}_q = \sum_{i=0}^m q^{n-k+i} \binom{n+i}{k}_q$$

2. 【2013 安徽理 21】某高校数学系计划在周六和周日各举行一次主题不同的心理测试活动, 分别由李老师和张老师负责, 已知该系共有 n 位学生, 每次活动均需该系 k 位学生参加 (n 和 k 都是固定的正整数). 假设李老师和张老师分别将各自活动通知的信息独立、随机地发给该系 k 位学生, 且所发信息都能收到. 记该系收到李老师或张老师所发活动通知信息的学生人数为 X .

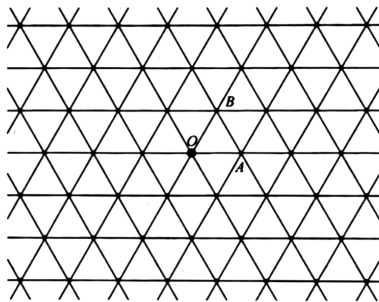
- (1) 求该系学生甲收到李老师或张老师所发活动通知信息的概率;

- (2) 求使 $P(X=m)$ 取得最大值的整数 m .

3. 【2025 杭州一模 19】如图所示, 棋盘 (足够大) 由全等的边长为 1 的正三角形组成, 一颗质地均匀的正方体骰子, 六个面分别以 1~6 标号. 在棋盘上, 以 O 为原点建立平面直角坐标系, 其中 $A(1,0)$. 棋子初始位置为 O , 投掷骰子 n 次, X_n 表示第 n 次投掷后棋子的位置 (X_0 为坐标原点), 规定:

$$\overrightarrow{OX_n} = \begin{cases} \overrightarrow{OX_{n-1}} + \mathbf{u}_k, & \text{第 } n \text{ 次掷得奇数,} \\ \overrightarrow{OX_{n-1}}, & \text{第 } n \text{ 次掷得偶数,} \end{cases}$$

其中向量 $\mathbf{u}_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{3}, \sin \frac{2k\pi}{3} \right) (k \in \mathbb{Z})$, k 为前 n 次投掷过程中, 掷得偶数的总次数.



- (1) 求点 X_2 所有可能的坐标;
- (2) 求投掷骰子 8 次后棋子在原点的概率;
- (3) 投掷骰子 80 次, 记棋子在原点且投掷过程中掷得奇数的次数恰为 $r(0 \leq r \leq 80)$ 的概率为 $p(r)$, 求 $p(r)$ 的表达式与最大值点。

1.

2. (2) 可知 $k \leq n, k \leq m \leq 2k$

$$P(X=m) = \frac{C_n^{2k-m} C_{m+n-2k}^{m-k} C_{n-k}^{m-k}}{C_n^k C_n^k}$$

下判断 $P(X=m) = f(m)$ 的单调性。作商 $\frac{f(m+1)}{f(m)} = \frac{(2k-m)(n-m)}{(m+1-k)^2}$

即比较 $2k - \frac{(k+1)^2}{n+2}$ 与 m , 分三类: $n=k, \frac{(k+1)^2}{n+2} \in \mathbb{Z}, \notin \mathbb{Z}$

综合所有情况, m 取 $\left\lfloor 2k - \frac{(k+1)^2}{n+2} \right\rfloor$ 时, 有 $P(X=m)$ 最大。

评: 请思考, 我们是如何判断 $g(m) = C_n^m$ 的单调性的?

3.

4. 可知

$$\begin{cases} \text{沿斜上方道路运动 1 单位长度, 记为 } U & k=3n+1 \\ \text{沿斜下方道路运动 1 单位长度, 记为 } D & k=3n+2 \\ \text{沿右方道路运动 1 单位长度, 记为 } R & k=3n \end{cases}$$

(1) 考虑前两次骰子数的奇偶性:

投掷情况	奇奇	奇偶	偶奇	偶偶
X_2 坐标	(2,0)	(1,0)	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	(0,0)

故 X_2 的可能坐标为

$$\left\{ (2,0), (1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (0,0) \right\}$$

(2) 可知 U, D, R 三种运动方式出现的次数应当相同, 记它们的出现次数分别为 N_U, N_D, N_R 。

可按如下方式分类:

情况一, $N_U = N_D = N_R = 0$: 此时情况数为 1。

情况二, $N_U = N_D = N_R = 1$: 此时静止运动共出现 5 次, 分割出六种状态, 即 $k=0, 1, \dots, 5$ 。

将 U, D, R 插入到这 6 个状态后不会造成任何影响, 而 U 可插入到 $k=1, 4$ 状态, D 可插入到 $k=2, 5$ 状态, R 可插入到 $k=3, 6$ 状态, 总情况数为 8。

情况三, $N_U = N_D = N_R = 2$: 此时静止运动共出现 2 次, 分割出三种状态, 即 $k=0, 1, 2$ 。

将 U, D, R 插入到这 3 个状态后不会造成任何影响, 而 U 可插入到 $k=0$ 状态, D 可插入到 $k=1$ 状态, R 可插入到 $k=2$ 状态, 总情况数为 1。

每 8 次投掷骰子构成的奇偶性序列都唯一对应一个运动序列, 反之亦然, 故题目所求概率为 $\frac{5}{128}$

(3) 参考第(2)问的思路: 设 $N_U = N_D = N_R = p (0 \leq p \leq 26)$, 其中 $3p = r$ 。此时静止运动出现 $80 - 3p$ 次, 分割出 $81 - 3p$ 种状态, 即 $k = C = \{0, 1, \dots, 80 - 3p\}$

可知 $3 \mid 81 - 3p$, 按模 3 同余分类得到:

$$A_0 = \{x | x \in C, x = 3k\}, A_1 = \{x | x \in C, x = 3k + 1\}, A_2 = \{x | x \in C, x = 3k + 2\}, k \in \mathbb{Z}$$

可知 $|A_0| = |A_1| = |A_2| = 27 - p$

将 U, D, R 插入到这 $81 - 3p$ 种状态后不会造成任何影响, 而 U 可插入到 $k \in A_1$ 中, D 可插入到 $k \in A_2$ 中, R 可插入到 $k \in A_0$ 中。

以 U 为例, U 的插入情况数等价于方程

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{27-p} = p$$

的非负整数解的个数, 为 C_{26}^p , 同理 D, R 的插入情况数也为 C_{26}^p 。

故所求概率为,

$$p(r) = \begin{cases} \frac{\left(C_{26}^{r/3}\right)^3}{2^{80}}, & r \text{ 为 } 3 \text{ 的倍数} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

要求 $p(r)$, 即 $C_{26}^{r/3}$ 的最大值, 据作商法可证明当 $r = 39$ 时, $p(r)$ 取得最大值。

第一章 计数原理与二项式定理

1.2 从杨辉三角谈到组合数

第一章 计数原理与二项式定理

1.2 从杨辉三角谈到组合数