

第一章 计数原理与二项式定理

1.1 计数原理

1.1.1 分类加法原理与分步乘法原理

分类加法原理 做一件事，完成它有 n 类办法，在第 i ($i \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n$) 类办法中有 m_i 种不同的方法，那么完成这件事共有 $\sum_{i=1}^n m_i$ 种方法。

分步乘法原理 做一件事，完成它需分成 n 个步骤，做第 i ($i \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n$) 个步骤有 m_i 种不同的方法，那么完成这件事共有 $\prod_{i=1}^n m_i$ 种方法。

定义 1.1.1. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素，并按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**，这一操作的不同方案数称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**，记为 A_n^m 。当 $m = n$ 时，这一排列又称为 n 个不同元素的**全排列**， A_n^n 又称为 n 个不同元素的**全排列数**。

定义 1.1.2. 从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素作为一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**，这一操作的方案数称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**组合数**，记为¹ C_n^m 。

问题 1.1 证明：

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1.1.2 计数的基础方法

列举与分类讨论 ²在计数问题中，“列举”就是有序、有逻辑地一个一个数出所有符合题意的情况。列举往往蕴含着“尝试”的意味，这是我们探索未知问题所必须具备的基本能力。对于规模较小的问题，我们可以通过列举穷尽所有的情况。

分类讨论一般是对所有可能情况给出一个划分，再依次解决划分后得到的一系列子问题，这一做法也可以说是“分而治之”，所谓“一口吃不掉，分几步搞定。”

¹国际上最广泛使用的记号为 $\binom{n}{m}$

²本节虽讲计数原理，要求学生掌握更为简便的计数技巧，但还是花了一定篇幅来谈上述两种“笨拙”、“老土”的方法，因其蕴含着重大的教育价值（尽管学生普遍更愿意追求一步到位的技巧与公式）。

我们在探索一个完全陌生的问题时，很难立即以一种巧妙的方式“直击要害”，往往需要列出特例，弱化问题，通过屡次尝试与修正逐渐发现规律，最终给出严格论证。列举与分类讨论恰恰提供了这一探索路径，因它们不依赖高深的技巧，不至于让人“敬而远之”，所以学习者得以借此机会亲自组织对象、分析结构，并在不断尝试中自我纠偏。波利亚说：“数学不是旁观者的运动。”（Mathematics is not a spectator sport.）相比于方法的灌输，列举与分类讨论恰恰是把实操的动力与机会还给了学生，充分调动他们去运作上述解决问题的一般模式，培养学生敢于尝试的勇气、面对复杂问题时沉着分析、化整为零的心性，以及从具体到抽象、从特殊到一般的归纳能力。

遗憾的是，在现行的“填鸭式教育”中，学生更多的是学习“某一类题应当使用某一种方法”，如此照猫画虎以构建“条件反射”，并试图达到“一看就会，一做就对”的程度。一旦脱离熟悉的题型，面对新的未知问题时，他们往往寸步难行，问题百出。

分类讨论的对象通常是**具有特殊性质或约束较多**的元素。这里请注意划分需满足的前提条件：如果分出的两类子情况有交集，就会数重；如果这些子情况的并集不是全集，就会数漏。在着手解决子情况前，先确认这一点，以免做无用功。

问题 1.2 解答下述问题：

(1) 有编号为 A、B、C、D、E、F 的 6 个不同小球，将这些小球排成一排，要求 A 球不在最边上，且 B、C、D 球互不相邻，则不同的排列方法有 (Δ)

(2) 某出版社的 11 名工人中，有 5 人只会排版，4 人只会印刷，还有 2 人既会排版又会印刷，现从 11 人中选 4 人排版，4 人印刷，则不同的选择方案数为 (Δ)；

(3) **【2018 浙江 16 加强】【2004 天津理 16】**从 1, 3, 5, 7 中任取 2 个数字，从 0, 2, 4, 6, 8 中任取 2 个数字，组成没有重复数字的四位数，其中能被 5 整除的四位数共有 (Δ) 个。

分清顺序与无序 排列和组合的区别在于“是否考虑顺序”，如果对象本身带顺序，就直接按排列数；如果对象不带顺序，可考虑在**构造时人为引入顺序**，但最终需除去本质重复的情况。

问题 1.3 解答下述问题

(1) 将 9 本不同的书按下列分法，请分别给出分配方法数：

(1.1) 按 4 本、3 本、2 本分成三组；

(1.2) 按 3 本、3 本、3 本分成三组；

(1.3) 按 5 本、2 本、2 本分成三组；

(1.4) 分给甲、乙、丙三人，其中一人得 4 本，一人得 3 本，一人得 2 本；

(1.5) 分给甲、乙、丙三人，其中甲得 4 本，乙得 3 本，丙得 2 本。

(2) **【2021 全国乙卷理 6】**³将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，求不同的分配方案数。

问题的等价 基于实际情景演变出来的问题繁复多变，解答的关键往往在于如何抓住制约条件，将问题等抽象成较为直白的代数形式，或是向自己熟悉的问题模型进行等价。

当然有时你会怀疑：等价前后满足条件的情况数是相同的吗？尤其是对于一些并不显然的“等价转换”。

如果等价前后满足题意的集合分别为 A, B ，我们要证明： $|A| = |B|$ ，一种较为简便的方法是，看能否在建立从 A 到 B 和从 B 到 A 的单射，根据前者可以推得 $|A| \leq |B|$ ，后者则可以推得 $|B| \leq |A|$ ，于是 $|A| = |B|$ 。

再复习一下“单射”这个概念，把它表成自然语言，即“等价”后的每一个情况对应“等价”前的唯一一个情况，并且反过来也满足，那么我们认为这个“等价”前后满足条件的情况数相同。

例 1 解答下述问题：

1. 有 n 个完全相同的球，将这些球放到 $k (k \leq n)$ 个不同的盒子中，要求每个盒子至少有一个球，求放球的方法数；

³与本题考察方法完全相同的还有 **【2017 全国 II 卷理 6】**，**【2020 新高考 I 卷 3】**，**【2020 新高考 II 卷 6】**，**【2020 全国 II 卷理 14】**

- (1) 求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n (k \leq n, x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{N}^*)$ 的解的个数;
 - (2) 求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n (k \leq n, x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{N})$ 的解的个数;
 - (3) 将 10 个相同小球全部装入 3 个编号为 1,2,3 的盒子, 要求每个盒子中球的个数不小于盒子编号数, 求不同的装入方案数;
2. 展开 $(x + y + z + w)^6$ 并合并同类项, 共有多少项?
3. 从依次分别标有 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 张卡片中有放回地随机抽取 k 次, 记第 i 次抽到的卡片上标的数字为 x_i .
- (1) 当 $k = 3$ 时, 求 $P(x_1 \leq x_2 \leq x_3)$;
 - (2) 用含 k 的式子表示 $P(x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k)$;
4. n 个人从左到右排成一列, 依次编号为 $1, 2, \cdots, n$, 从中选取 k 个人:
- (1) 要求这 k 个人在原队列中两两不相邻, 求选取方法数;
 - (2) 要求任意两人之间至少间隔 r 人, 求选取方法数;

问题 1.4 解答下述问题

1. 【2006 四川理 12】从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数, 求这个数不能被 3 整除的概率;
2. 【2013 高联一试 8】已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项, 其中 $a_1 = a_9 = 1$, 且对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, 8\}$, 均有 $\frac{a_{i+1}}{a_i} \in \{2, 1, -\frac{1}{2}\}$, 求满足上述条件的数列的个数;
3. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 的一个排列是 $a_1, a_2, \cdots, a_8$, 要求 $a_{2k-1} < a_{2k}, k = 1, 2, 3, 4$, 求满足条件的排列总数;

考虑问题的反面 所谓“正难则反”, 尤其是对于含“至少”等字眼的问题。

问题 1.5 解答下述问题

1. 【2002 大纲卷理 11】从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有多少种?
2. 【2007 福建理 12】三行三列的方阵中有 9 个数 $a_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$, 从中任取三个数, 求至少有两个数位于同行或同列的概率;
3. 解答下述问题:
 - (1) 已知有限集合 A, B , 证明:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(2) 已知有限集合 A, B, C , 证明:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

(3) (选做) (容斥原理) 已知有限集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 证明:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

(提示: 数学归纳法。)

4. 在平面直角坐标系中, 从原点出发走到点 $(5, 6)$, 每一步只能向上或向右走一个单位距离。

(1) 求满足条件的行走方案数;

(2) 破坏点 $P(2, 4)$, 此时路径不能通过 P , 求在此前提下的行走方案数;

(3) 破坏点 $(3, 4), (3, 5)$ 之间路径, 即不能由 $(3, 4)$ 向上一步走到 $(3, 5)$ (反之亦然), 求在此前提下的行走方法数;

(4) 同时做前两小问中提到的破坏, 求在此前提下的行走方案数。

对称性 当数学对象具有对称结构时, 可以大大简化讨论。

问题 1.6 解答下述问题:

1. 【2003 全国卷 16】如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有 (Δ) 种;
2. 四位同学 (两男两女) 随机站到 4×4 的方格场地中 (每人站一格, 每格最多一人), 则两个男生既不同行也不同列, 同时两个女生既不同行, 也不同列的概率是 (Δ)

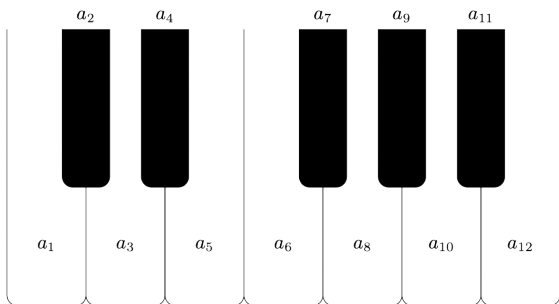
第一章 计数原理与二项式定理

1.1 计数原理

本节习题

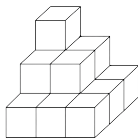
A 组

1. 【2020 全国 II 卷文 3】如图，将钢琴上的 12 个键依次记为 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 。设 $1 \leq i < j < k \leq 12$ 。若 $k-j=3$ 且 $j-i=4$ ，则称 a_i, a_j, a_k 为原位大三和弦；若 $k-j=4$ 且 $j-i=3$ ，则称 a_i, a_j, a_k 为原位小三和弦。用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为 (Δ)



2. 【2009 北京文 14】设 A 是整数集的一个非空子集，对于 $k \in A$ ，如果 $k-1 \notin A$ 且 $k+1 \notin A$ ，那么称 k 是 A 的一个“孤立元”，给定 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，由 S 的 3 个元素构成的所有集合中，不含“孤立元”的集合共有 (Δ) 个。
3. 【人教 A 选修三 P9 例 8】通常，我国民用汽车号牌的编号由两部分组成：第一部分为用汉字表示的省、自治区、直辖市简称和用英文字母表示的发牌机关代号，第二部分为由阿拉伯数字和英文字母组成的序号，例如“冀 AJR005”。其中序号的编码规则为：
- (1) 由 10 个阿拉伯数字和除 O、I 以外的 24 个英文字母组成；
 - (2) 最多只能有 2 个英文字母。
- 如果某地级市发牌机关采用 5 位序号编码，那么这个发牌机关最多能发放 (Δ) 万张汽车号牌。
4. 【2004 全国 II 卷理 12】在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中，大于 23145 且小于 43521 的数共有 (Δ)
5. 【2001 全国卷理 16】圆周上有 $2n$ 个等分点 ($n > 1$)，以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为 (Δ)
6. 【2022 新高考 I 卷 5】从 2 至 8 这 7 个整数中随机取 2 个不同的数，这 2 个数互质的概率为 (Δ)
7. 【2014 重庆理 9】某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目，2 个小品类节目和 1 个相声类节目的演出顺序，则同类节目不相邻的排法有 (Δ) 种；

8. 命制一张试卷, 试题包括三种类型, 其中类型 A 有 3 道, 类型 B 有 2 道, 类型 C 有 2 道, 同一类型试题难度互不相同. 排版试卷时, 要求同一类型的试题不相邻且难度从易到难, 则排版方案共有 (Δ) 种.
9. 如图, 现需要移走这些正方体, 一次只能移走一个正方体, 一个正方体可以被移走当且仅当它的上方没有正方体, 有多少种不同的移动方案?



10. 【1993 旧高考理 17】将数字 1, 2, 3, 4 填入标号为 1, 2, 3, 4 的四个方格里, 每格填一个数字, 则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有 (Δ) 种.
11. 【2006 全国 I 卷理 12】设集合 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 选择 I 的两个非空子集 A 和 B , 要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选择方法共有 (Δ)
12. 【2004 全国 I 卷理 11】从数字 1, 2, 3, 4, 5 中, 随机抽取 3 个数字 (允许重复) 组成一个三位数, 其各位数字之和等于 9 的概率为
13. 【2007 湖北文 7】将 5 本不同的书全发给 4 位同学, 每名同学至少有一本书的概率是
14. 【2004 湖南理 10】从正方体八个顶点中任取三个点为顶点作三角形, 其中直角三角形的个数为
15. 【2005 江西理 12】将 $1, 2, \dots, 9$ 这 9 个数平均分成三组, 则每组的三个数都成等差数列的概率为
16. 从 $1, 2, 3, \dots, n$ 这 n 个数中任取 k 个不同的数 $a_1, a_2, \dots, a_k$, 则存在 $1 \leq i < j \leq k$, $i, j \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|a_i - a_j| = 1$ 的取法种数为 (Δ)
17. 【2012 山东理 11】现有 16 张不同的卡片, 其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各 4 张. 从中任取 3 张, 要求这 3 张卡片不能是同一种颜色, 且红色卡片至多 1 张, 不同取法的种数为 (Δ)
18. 【2025 高联一试 B 卷 8】从 20 个数 $1, 2, 3, \dots, 20$ 中选出 4 个不同的数 (不计顺序), 使它们的乘积为 2025 的倍数, 则不同选法的数目为 (Δ) .
19. 【2012 重庆理 15】某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课各 1 节, 则在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的排法共有 (Δ) 种.
20. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是 $1, 2, 3, 4, 5$ 的一个排列, 若 $(x_i - x_{i+1})(x_{i+1} - x_{i+2}) < 0$ 对 $i = 1, 2, 3$ 均成立, 则满足这一条件的排列有 (Δ) 个.
21. 【2024 新高考 I 卷 14】甲乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8. 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选择一张, 并比较所选卡片上的数字大小, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置本轮所选的卡片 (弃置后的卡片在此后的轮次中不能使用), 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为 (Δ)

(注: 在此处请使用分类讨论或列举法完成, 其余方法将在后续章节进行讲解.)

22. 【2005 江苏 12】四棱锥的 8 条棱代表 8 种不同的化工产品，有公共点的两条棱代表的化工产品放在同一个仓库是危险的，没有公共顶点的两条棱所代表的化工产品放在同一个仓库是安全的，现打算用编号为 1、2、3、4 的 4 个仓库存放这 8 种化工产品，那么安全存放的不同种数为 (Δ) 。
23. 【2005 全国 I 卷理 11】过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条，其中异面直线 (Δ) 对。
24. 【2014 广东理 8】设集合 $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ ，那么集合 A 中满足条件 “ $1 \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ ” 的元素个数为 (Δ)
25. 【2023 上海 12】空间中有三个点 A, B, C ，且 $AB = BC = CA = 1$ ，若在空间中任取两个不同的点，使得它们与 A, B, C 恰好成为一个正四棱锥的五个顶点，则不同的取法共有 (Δ) 种。
26. 【2016 全国 III 卷理 12】定义“规范 01 数列” $\{a_n\}$ 如下： $\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项，其中 m 项为 0， m 项为 1，且对任意 $k \leq 2m$ ， $a_1, a_2, \dots, a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数，若 $m = 4$ ，则不同的“规范 01 数列”共有 (Δ)
27. 【2024 新高考 II 卷 14】在如图的 4×4 的方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有 (Δ) 种选法。在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是 (Δ) 。

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

28. 【2011 湖南理 16】将正整数 n 表示为 $n = a_0 \times 2^k + a_1 \times 2^{k-1} + a_2 \times 2^{k-2} + \dots + a_{k-1} \times 2^1 + a_k \times 2^0$ 。当 $i = 0$ 时， $a_i = 1$ ，当 $1 \leq i \leq k$ 时， a_i 为 0 或 1。记 $I(n)$ 为上述表示中 a_i 为 0 的个数，则 $I(12) = (\Delta)$ ； $\sum_{n=1}^{127} 2^{I(n)} = (\Delta)$ 。

29. 解答下述问题

- (1) 一个圆桌有 n 个座位，有 n 个人依次落座，认定两种落座方式相同当且仅当每个人左右相邻的人相同，求 n 个人不同的落座方式；
- (2) n 个人围坐在一个圆形的桌子旁，这时又加入了 $k(k \leq n)$ 个人，要求这 k 个人互不相邻，甲、乙同学分别得到以下两种答案：

$$\text{甲: } \frac{1}{n} A_n^n A_n^k \quad \text{乙: } \frac{1}{n+k} A_n^n A_n^k$$

甲同学认为：先把这 n 个人排好，排法为 $\frac{1}{n} A_n^n$ ，再将新来的 k 个人插入到这 n 个人之间的空隙中，排法为 A_n^k ，据乘法原理，总情况数为 $\frac{1}{n} A_n^n A_n^k$ 。

乙同学认为：先把新来的 k 个人插空到原来的 n 个人中，情况数为 A_n^k ，这 n 个人也可以内部全排列 A_n^n ，再对整体执行环排，总情况数为 $\frac{1}{n+k} A_n^n A_n^k$ 。

哪一个答案正确？并指出给出错误答案对应思路的问题。

- (3) 【2026 “神算杯一摸” (B 卷) (网络联考) 14】 Santa, 六月松等 5 人按某一顺序落座在圆桌的周围, 随后他们起立, 随即再次落座, 现每次均以 Santa 所在位置作为 1 号位, 并按顺时针顺序编号为 1 号到 5 号, 诸落座情况有相同的概率成为第二次落座情况, 求两次落座中所在座位编号相同的人数的期望。

30. 【2018 山东新高考适应性测试 20】 设三角形的边长为不相等的整数, 且最大边长为 n , 这些三角形的个数为 a_n 。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

- (2) 在 $1, 2, \dots, 100$ 中任取三个不同的整数, 求它们可以是一个三角形的三条边长的概率。参考公式: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 。

31. 【2018 江苏 23】 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 对 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $i_1 i_2 \dots i_n$, 如果当 $s < t$ 时, 有 $i_s > i_t$, 则称 (i_s, i_t) 是排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的一个逆序, 排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的所有逆序的总个数称为其逆序数。例如: 对 $1, 2, 3$ 的一个排列 231 , 只有两个逆序 $(2, 1), (3, 1)$, 则排列 231 的逆序数为 2。记 $f_n(k)$ 为 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列中逆序数为 k 的全部排列的个数。

- (1) 求 $f_3(2), f_4(2)$ 的值;

- (2) 求 $f_n(2)$ ($n \geq 5$) 的表达式 (用 n 表示)。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
11. 9. 列举所有满足条件的情况如下:

(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 2, 3)
(2, 3, 4, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 1, 2)
(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 2, 1)

共 9 种。

错排问题是一个经典计数问题，题意为：将 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个元素放入 n 个位置中，要求第 k 个元素不能放在第 k 个位置上。($1 \leq k \leq n$)，记这样的排列总数为 D_n ，这称为 n 个元素的错排数。

D_n 的前几项依次为

$$0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, \dots$$

视角一，从递推出发：

易知 $D_1 = 0, D_2 = 1$ 。对一般情况，考虑元素 1 在错排中的位置。

元素 1 不能在第 1 个位置，只能在某个位置 $k, k \in 2, 3, \dots, n$ ，共 $n-1$ 种选法，再看元素 k 如何放置。

如果元素 k 放在第 1 个位置，那么剩下的 $n-2$ 个元素构成一个更小规模的错排问题，方法数为 D_{n-2} ；

如果元素 k 没放在第 1 个位置，将剩下的 $n-2$ 个元素与 k 视为一个集合，这个集合中的每个元素都有一个位置不能放置，那么这个集合元素的放置问题可等价于 $n-1$ 规模的错排问题，方法数为 D_{n-1} 。

故

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

视角二，从容斥原理出发：

考虑错排的反面, 即至少有一个元素在原位的情况, 令 A_i 表示“元素 i 在排列后仍在第 i 个位置”。我们所要求的是

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

据容斥原理, 有

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

A_i 表示元素 i 固定在第 i 个位置, 剩下 $n-1$ 个元素任意排列, 有

$$|A_i| = (n-1)!, \sum |A_i| = C_n^1 (n-1)!$$

同理有

$$\sum |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = C_n^k (n-k)!$$

于是得到

$$D_n = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \cdots + (-1)^n C_n^n 0!$$

上式可化简为:

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

(注: 如果考虑 n 个元素随机排列, 最终得到错排情况的概率, 可求得概率为 $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ 。

当 n 很大时, 该概率趋近于 $\frac{1}{e} \approx 0.368$)

12. 49. 按 B 中最小元素分类:

B 中最小元素	B 可选集合数	A 可选集合数	总计
5	1	$2^4 - 1$	15
4	2	$2^3 - 1$	14
3	2^2	$2^2 - 1$	12
2	2^3	1	8

总计 49 种情况。

13. 19/125.

14. 15/64.

新答案 (来源: 1.33 排列与组合.md): A

【解题思路】 不考虑任何条件限制, 将 5 本不同的书全发给 4 名同学, 每本书的发放均有 4 种不同选择, 故共有 $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ 种分法. 在“每名同学至少有一本书”这一条件的限制下,

先考虑将 5 本书分成 4 组, 故有 C_5^2 种分组方式, 然后考虑这 4 组的全排列有 A_4^4 种. 故在限制条件下 5 本书分给 4 名同学, 且每名同学都有至少一本书的分法有 $C_5^2 \cdot A_4^4$ 种. 从而所求概率为

$$\frac{C_5^2 A_4^4}{4^5} = \frac{15}{4^3} = \frac{15}{64}$$

故选 A 为正确答案.

【实测数据】文科难度为 0.24, 区分度为 0.31

【易错警示】从考后统计数据显示, 较多的考生错选答案 C 或答案 D, 原因是该类考生在理解题干“将 5 本不同的书全发给 4 名同学”时, 错误认为是“4 名同学均有 5 种不同的选择”, 故不同选择数为 5^4 种, 这是一个较为隐蔽的错误, 需要考生仔细揣摩题意. 然后选 C 的考生认为每名同学至少有一本书的可能性为 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, 也就是说第一位同学有 5 种选择、第二位同学有 4 种选择等再运用乘法原理, 故所求率为 $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5^4} = \frac{24}{125}$; 选 D 的考生认为每名同学至少有一本书的可能性为 $C_5^2 \cdot A_4^4$, 这是正确的, 但求得的概率却是 $\frac{C_5^2 A_4^4}{5^4} = \frac{48}{125}$. 本题对于文科生而言思维能力和实践能力要求较高.

15. 48.

16. 1/56. 总分组情况为 $\frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{A_3^3} = 280$

其中一组一定含有 1, 对这一组可能的情况进行分类, 每一组内部元素默认按从小到大排序:

情况一, $\{1, 2, 3\}$: 另外两组可以取 $(4, 5, 6), (7, 8, 9)$ 或 $(4, 6, 8), (5, 7, 9)$;

情况二, $\{1, 3, 5\}$: 另外两组可以取 $(2, 4, 6), (7, 8, 9)$;

情况三, $\{1, 4, 7\}$: 另外两组可以取 $(2, 5, 8), (3, 6, 9)$;

情况四, $\{1, 5, 9\}$: 另外两组可以取 $(2, 3, 4), (6, 7, 8)$;

满足条件的情况共 5 种, 概率为 $\frac{1}{56}$

17.

18. 472. 按选出红色卡片的数量分类:

情况一, 选出 1 张: 另外 2 张可以在其他 12 张卡片内任选, 共 $C_4^1 C_{12}^2$ 种;

情况二, 选出 0 张: 另外 3 张可以在其他 12 张卡片内任选, 但不能全选同一种颜色, 考虑反面即选出 3 张相同颜色卡片, 共 $3 \times C_4^3$ 种情况. 故满足题意的情况数为 $C_{12}^3 - 3 \times C_4^3$

综上所述, 总情况数为 $C_4^1 C_{12}^2 + C_{12}^3 - 3 \times C_4^3 = 472$

19.

20. 432.

21. 32. 满足题意的排列呈现出下述两种形式:

$$x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > x_5 \text{ 或 } x_1 > x_2 < x_3 > x_4 < x_5$$

这两种方式的情况数是相等的：若 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 呈现出第一种方式的排列，则 $6 - a_1, 6 - a_2, 6 - a_3, 6 - a_4, 6 - a_5$ 一定符合后者，反之亦然，于是二者情况数相等。

仅考虑第一种方式，以 x_3 的取值作为分类标准进行列举：

情况一， $x_3 = 3$ ：4 种，分别为

$(4, 1, 3, 2, 5), (5, 1, 3, 2, 4), (4, 2, 3, 1, 5), (5, 2, 3, 1, 4)$

情况二， $x_3 = 4$ ：6 种，分别为

$(3, 1, 4, 2, 5), (5, 1, 4, 2, 3), (3, 2, 4, 1, 5), (5, 2, 4, 1, 3), (2, 1, 4, 3, 5), (5, 3, 4, 1, 2)$

情况三， $x_3 = 5$ ：6 种，分别为

$(3, 1, 5, 2, 4), (4, 1, 5, 2, 3), (3, 2, 5, 1, 4), (4, 2, 5, 1, 3), (2, 1, 5, 3, 4), (4, 3, 5, 1, 2)$

共 16 种，总情况为 32 种。

22. 1/2. 方法一：不妨设甲出牌顺序为 1, 3, 5, 7，列举乙的所有出牌方式如下：

乙出牌顺序	甲得分	乙出牌顺序	甲得分	乙出牌顺序	甲得分
(2, 4, 6, 8)	0	(2, 4, 8, 6)	1	(2, 6, 4, 8)	1
(2, 6, 8, 4)	1	(2, 8, 4, 6)	2	(2, 8, 6, 4)	1
(4, 2, 6, 8)	1	(4, 2, 8, 6)	2	(4, 6, 2, 8)	1
(4, 6, 8, 2)	1	(4, 8, 2, 6)	2	(4, 8, 6, 2)	1
(6, 2, 4, 8)	2	(6, 2, 8, 4)	2	(6, 4, 2, 8)	1
(6, 4, 8, 2)	1	(6, 8, 2, 4)	2	(6, 8, 4, 2)	2
(8, 2, 4, 6)	3	(8, 2, 6, 4)	2	(8, 4, 2, 6)	2
(8, 4, 6, 2)	1	(8, 6, 2, 4)	2	(8, 6, 4, 2)	2

方法二：不妨设乙的出牌顺序为 2, 4, 6, 8，按甲的可能得分分类列举甲的出牌情况，只考虑我们所要求的得分 2, 3：

甲胜乙牌面	甲仅胜 (2, 4)	甲仅胜 (4, 6)	甲仅胜 (2, 6)	甲仅胜 (2, 4, 6)
得分	2	2	2	3
甲出牌情况	(3, 5, 1, 7) (3, 7, 1, 5) (5, 3, 1, 7) (5, 7, 1, 3) (7, 3, 1, 5) (7, 5, 1, 3) (7, 1, 3, 5)	(1, 5, 7, 3)	(3, 1, 7, 5) (5, 1, 7, 3) (7, 1, 5, 3)	(3, 5, 7, 1)
总数	7	1	3	1

两种方法计算得到的概率均为 $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

23. 48.

新答案 (来源: 1.33 排列与组合.md): D

【解题思路】 $|x_1|, \dots, |x_5|$ 的可能取值是 0 或 1. 由条件, $|x_1|, \dots, |x_5|$ 中取 1 的个数只能有 1, 2, 3 个.

如果 $|x_1|, \dots, |x_5|$ 中有一个数 $|x_k|$ 取 1, 则 x_k 可以取 1 或 -1, 其余取 0, 一共有 $5 \times 2 = 10$ 种情况.

如果 $|x_1|, \dots, |x_5|$ 中有两个数 $|x_j|, |x_k|$ 取 1, 则 x_j, x_k 可以取 1 或 -1, 其余取 0, 一共有 $C_5^2 \times 2^2 = 40$ 种情况.

如果 $|x_1|, \dots, |x_5|$ 中有三个数 $|x_j|, |x_k|, |x_l|$ 取 1, 则 x_j, x_k, x_l 可以取 1 或 -1, 其余取 0, 一共有 $C_5^3 \times 2^3 = 80$ 种情况.

24. 36. 将直线划分为三类: 顶/底面棱共 6 条, 侧棱 3 条, 侧面对角线 6 条, 依次计算异面直线对

异面直线对	顶/底面棱	侧棱	侧面对角线	总计
顶/底面棱 (6 条)	2	1	2	5
侧棱 (3 条)	2	0	2	4
侧面对角线 (6 条)	2	1	2	5

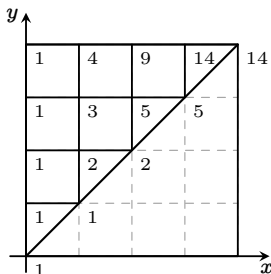
注意, 如此计算则每一对被重复计数为 2 次, 最终结果为 36.

25. 130.

26. 9.

27. 14. 如无思路, 请参考问题 1.5 (4.4).

原问题可转化为: 在平面直角坐标系中, 从原点出发到点 (4, 4), 每一步只能向上或向右走 1 个单位距离, 求不越过直线 $y = x$ 的不同的最短路径条数. 可知, 到达 (x, y) 的路径数由到达 $(x-1, y)$ 和到达 $(x, y-1)$ 的路径数决定, 按如下作图完成递推:



卡特兰数 (Catalan Numbers) 又称明安函数, 是一个特殊计数序列, 在组合数学与计算机科学中有着广泛应用. 记卡特兰数的第 n 项为 C_n , 它的前几项 (从第 0 项开始) 依次为

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$$

许多看似完全不相干的计数问题，其结果均为卡特兰数。这些问题一般可以划分为两类：

类型一典范：将凸 $t+2$ 边形分割成不重叠（边可以重叠，内部不可以）的 t 个三角形，这称为一个三角剖分。凸 $n+2$ 边形的三角剖分方案数为 C_n ；

类型二典范：在平面直角坐标系中，从原点出发到点 (n, n) ，每一步只能向上或向右走 1 个单位距离，证明：不越过直线 $y = x$ 的不同的最短路径条数为卡特兰数 C_n 。

下给出类型一的证明：

设凸 $t+2(t \in \mathbb{N}^*)$ 边形的三角剖分方案数为 p_t 。对凸 $n+2$ 边形，取它的一条固定边记为 $V_1 V_{n+2}$ ，从 V_1 开始逆时针将多边形的顶点依次记为 $V_1, V_2, \dots, V_{n+2}$ 。

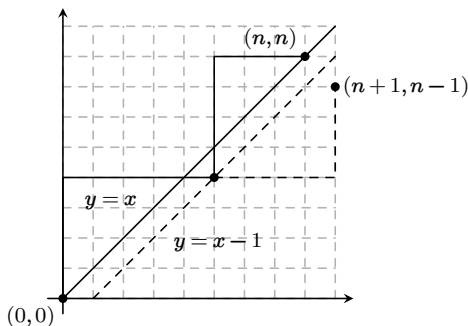
在任意一种三角剖分中，边 $V_1 V_{n+2}$ 一定恰好属于某一个三角形。设这个三角形的第三个顶点是 $V_i, i \in \{2, 3, \dots, n+1\}$ 。这个三角形将凸 $n+2$ 边形分割为凸 i 边形和凸 $n-i+3$ 边形两个部分。按照 i 的取值分类，由分步乘法原理可知，对两个较小规模的凸多边形进行三角剖分的方案数为 $p_{i-2} p_{n-i+1}$

故总三角剖分方案数为

$$p_n = \sum_{i=2}^{n+1} p_{i-2} p_{n-i+1} = \sum_{i=0}^{n+1} p_i p_{n-i-1}$$

称这一递推式为卡特兰数的卷积递推公式。

下给出类型二的证明：



证明. 考虑待求情况的反面，即计算越过直线 $y = x$ 的路径条数。对某越过直线 $y = x$ 的路径 L ，它一定在越过此直线后最先到达 $(1, 0), (2, 1), \dots, (n, n-1)$ 中的一点，这些点均位于 $y = x - 1$ 上。将位于 $y = x - 1$ 上方的路径沿该直线翻折，得到新路径 L' ， L' 是一条从 $(0, 0)$ 到 $(n+1, n-1)$ 的路径。

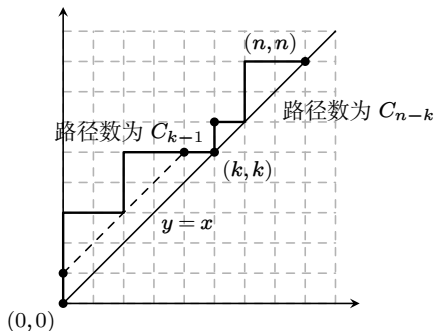
记从 $(0, 0)$ 到 $(n+1, n-1)$ 的路径构成集合 A ，从 $(0, 0)$ 到 (n, n) 的越过 $y = x$ 的路径构成集合 B 。可知，每一个 $x \in A$ 在 f 映射法则下对应唯一一个 $y \in B$ ，其中 f 映射法则为：

将路径沿直线 $y = x - 1$ 翻折

同样的，每一个 $y \in B$ 在 f 映射法则下对应唯一一个 $x \in A$ 。故 $|A| = |B|$ ，于是从 $(0, 0)$ 到 (n, n) 的越过 $y = x$ 的路径总数为 C_{2n}^{n+1} 因此题目所求路径总数为 $C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ 。

□

下探讨此方法与卡特兰数的卷积递推公式的联系。



对所有从 $(0,0)$ 到 (n,n) 且不越过直线 $y=x$ 的路径按其第一次经过点 (k,k) 的位置分类, 其中 $k=0, 1, \dots, n-1$ 。可知路径在 (k,k) 之前的部分是一条不触碰 (注意“不触碰”与“不越过”两种表述的区别) $y=x$ 的路径 L_k , 则路径第一步一定是从 $(0,0)$ 走到 $P(1,0)$, 走到 (k,k) 前的一步一定是从 $Q(k-1,k)$ 走到 (k,k) , P, Q 均位于直线 $y=x+1$ 上。于是 L_k 一定是从 P 到 Q 的不越过 $y=x+1$ 的路径, 路径数为 C_{k-1} 。到达 (k,k) 后的部分是一条不越过 $y=x$ 的路径, 路径数为 C_{n-k} , 据乘法原理有递推式:

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} = \sum_{k=0}^k C_k C_{n-k-1}$$

符合最初给出的卡特兰数的卷积递推公式。

28.

29. 24;112.

11	21	31	40		11	21	31	41		0	0	0	-1
12	22	33	42		12	22	32	42		0	0	1	0
13	22	33	43		13	23	33	43		0	-1	0	0
15	24	34	44		14	24	34	44		1	0	0	0

观察原数阵的数字, 可拆解为一个规则数阵 (右 1) 与一个误差修补数阵 (右 2)。在规则数阵中任取四个不同行同列的数字, 其和一定为 110。选取图中加粗数块, 此时有最大值 112。

30. 2;1093. 第一空略。对 1 到 127 按二进制长度分类。长度为 ℓ 的数, 其首位固定为 1, 设其余 $\ell-1$ 位中有 k 个 0, 此时 $2^{I(n)} = 2^k$, 满足条件的数的个数为 $C_{\ell-1}^k$, 因此长度为 ℓ 的数对最终答案的总贡献为

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} C_{\ell-1}^k 2^k = (1+2)^{\ell-1} = 3^{\ell-1}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{127} 2^{I(n)} = \sum_{\ell=1}^7 3^{\ell-1} = \frac{3^7-1}{2} = 1093.$$

31.

(1) 将 n 个人编号为 $1, 2, \dots, n$, 从左到右排成一列, 记其编号排列为 $i_1 i_2 \dots i_n$, 则

$$i_k i_{k+1} \dots i_n i_1 \dots i_{k-1} (\forall k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq n)$$

是同一种落座方式。故 n 个人不同的落座方式为 $\frac{1}{n} A_n^n$ 。

(2) A 选项的思路正确; 下分析 B 选项的错误:

“先把新来的 k 个人加入到原来的 n 个人中, 情况数为 A_n^k ” 这一句解释是错误的。

将新来的 k 个人插空到原来的 n 个人中, 共有 $n+1$ 个空位, 每个空位只插一人。若要这 k 个人不相邻, 那么其中两个人所插的位置不能位于头尾 (环排后接起来会相邻), 考虑反面: 其中两个人位于头尾, 情况数为 A_k^2 , 再将剩下的 $k-2$ 个人插在中间的 $n-1$ 个位置, 情况数为 A_{n-1}^{k-2} 。故情况数为 $A_{n+1}^k - A_k^2 A_{n-1}^{k-2}$ 。可以证明:

$$\frac{1}{n+k} A_n^n (A_{n+1}^k - A_k^2 A_{n-1}^{k-2}) = \frac{1}{n} A_n^n A_n^k$$

或利用**容斥原理**: 考虑将 k 个人插到前 n 个位置中, 情况数为 A_n^k ; 将 k 个人插到后 n 个位置中, 情况数为 A_n^k , **二者再插到中间 $n-1$ 个位置时出现重复**, 于是减去 A_{n-1}^k , 故情况数为 $2A_n^k - A_{n-1}^k$ 。可以证明:

$$\frac{1}{n+k} A_n^n (2A_n^k - A_{n-1}^k) = \frac{1}{n} A_n^n A_n^k$$

(3)

32. (1) 设三边为 $a < b < n$, $a+b > n$ 是可构成三角形的充要条件。

当 $n=2m$ 时, b 可取 $m+1, m+2, \dots, 2m-1$ 。确定 b 后, a 可取

$$n-b+1, n-b+2, \dots, b-1$$

共 $2b-2m-1$ 个。故

$$a_{2m} = \sum_{b=m+1}^{2m-1} (2b-2m-1) = (m-1)^2.$$

当 $n=2m+1$ 时, 同理可得

$$a_{2m+1} = \sum_{b=m+1}^{2m} (2b-2m-2) = m(m-1).$$

故

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 所求概率为 } \frac{\sum_{n=3}^{100} a_n}{C_{100}^3}, \text{ 由上式,} \\
 \sum_{n=3}^{100} a_n = \sum_{m=1}^{49} m(m-1) + \sum_{m=2}^{50} (m-1)^2 = 79625 \\
 \text{故所求概率为 } \frac{79625}{161700} = \frac{65}{132}
 \end{aligned}$$

33.

方法一：对于排列 $i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_n$ ，定义“ $(k, k+1)$ -旋转”为交换 i_k, i_{k+1} 在排列中所处的位置，例如对上述排列进行 $(k, k+1)$ -旋转后得到新排列 $i_1 i_2 \cdots i_{k+1} i_k \cdots i_n$

可以证明：如果 $i_k < i_{k+1}$ ，那么 $(k, k+1)$ -旋转得到的新排列相比原排列的逆序对数恰好增加 1（除 (a_{k+1}, a_k) 以外没有新的逆序对产生，也没有旧的逆序对消失）。

本题只需对 $1, 2, \cdots, n$ 这个排列施加两次旋转即可。

若第一次，第二次旋转的对象没有重合的，如下图所示：

$$a_1, a_2, \cdots, \underbrace{a_k, a_{k+1}}_{\text{旋转}}, \cdots, \underbrace{a_l, a_{l+1}}_{\text{旋转}}, \cdots, a_n$$

可以在 $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \cdots, (a_{n-1}, a_n)$ 这 $n-1$ 个旋转中选定不相邻的两个，共 C_{n-2}^2 种选法。

若第一次，第二次旋转的对象有重合的，例如先做 $(k, k+1)$ -旋转，再做 $(k+1, k+2)$ -旋转，此时可以发现：先做 $(k, k+1)$ -旋转，再做 $(k+1, k+2)$ -旋转与先做 $(k+1, k+2)$ -旋转，再做 $(k, k+1)$ -旋转交换得到的最终序列不同，情况数为 $2(n-2)$ ，总情况为

$$f_n(2) = C_{n-2}^2 + 2(n-2) = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

易求得 $f_3(2) = 2, f_4(2) = 5$ （通过列举也可得到答案）

方法二：对排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ ，考虑序列

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

其中 a_k 表示第 $i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}$ 中比 i_k 大的数的个数，只有两种情形：

情形一：存在唯一的 k 使得 $a_k = 2$ ，其余 $a_i = 0 (i \neq k)$ ，此时有 $n-1$ 种选法；

假设 $a_k = t$ ，则排列只有如下形式（不妨思考为何只可能有这一种形式？）：

$$1, 2, \cdots, t+1, t+2, t, t+3, \cdots, n$$

可知 $3 \leq t \leq n$ ，共 $n-2$ 种排列方式；

情形二：存在 k, l 使得 $a_k = a_l = 1$ ，其余 $a_i = 0 (i \neq k, l)$ 。

假设 $k < l, a_k = p, a_l = q$ ，则排列只有如下形式：

$$1, 2, \dots, p+1, p, p+2, \dots, q+1, q, q+2, \dots, n$$

其中 p, q 不相邻, 共 C_{n-1}^2 种排列方式;

故总情况数为

$$f_n(2) = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

方法三: 先构造 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 再将 $n+1$ 插入, 可知**新排列的逆序对数相比于原序列不减**。

情形一: 原排列没有逆序对: 此时排列一定为 $1, 2, \dots, n$, 要使得新排列有 2 个逆序对, 排列只能为

$$1, 2, \dots, n+1, n-1, n$$

共 1 种情况。

情形二: 原排列只有 1 个逆序对: 此时排列一定为 $1, 2, \dots, i+1, i, \dots, n$, 要使得新排列有 2 个逆序对, 则 $n+1$ **只能插在最后一个数的前面**, 共 $n-1$ 种情况;

情形三: 原排列有 2 个逆序对: 要使得新排列有两个逆序对, 则 $n+1$ **只能放在末尾**, 共 $f_n(2)$ 种情况; (注意: $f_3(2) = 2$)

故

$$\begin{aligned} f_{n+1}(2) &= n + f_n(2) = n + (n-1) + f_{n-1}(2) = \sum_{k=3}^n k + f_3(2) \\ &= \frac{n(n+1)-2}{2} \implies f_n(2) = \frac{n^2 - n - 2}{2} \end{aligned}$$

注: 根据方法三, 可以写出 $f_n(k)$ 的递推式, 但是没有简单的**闭式解** (用有限个标准运算和常见函数直接写出来的表达式, 不需要写成递推、求和、积分、生成函数系数提取这类“还要继续算”的形式)

第一章 计数原理与二项式定理

1.1 计数原理

B 组

1. 【2014 福建理 10】用 a 代表红球, b 代表蓝球, c 代表黑球, 由加法原理及乘法原理, 从 1 个红球和 1 个蓝球中取出若干个球的所有取法可由 $(1+a)(1+b)$ 的展开式 $1+a+b+ab$ 表示出来, 如: “1” 表示一个球都不取、“ a ” 表示取出一个红球, 而 “ ab ” 则表示把红球和蓝球都取出来。以此类推, 下列各式中, 其展开式可用来表示从 5 个无区别的红球、5 个无区别的蓝球 5 个有区别的黑球中取出若干个球, 且所有的蓝球都取出或都不取出的所有取法的是

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} (1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)(1+b^5)(1+c)^5 & \text{(B)} (1+a^5)(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c)^5 \\ \text{(C)} (1+a)^5(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)(1+c^5) & \text{(D)} (1+a^5)(1+b)^5(1+c+c^2+c^3+c^4+c^5) \end{array}$$

2. 对于五位数 $\overline{abcde}$, 若 $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$ 均为 4 的倍数 (后三者允许为 $\overline{00}, \overline{0x}$), 则称具有 “4 性质”, 则具有 “4 性质” 的五位数共有 (Δ) 个。

3. 【2007 湖北理 10】已知直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (a, b 是非零常数) 与圆 $x^2 + y^2 = 100$ 有公共点, 且公共点的横坐标均为整数, 那么这样的直线共有 (Δ) 条。

4. 设 $f(n)$ 为正整数 n 的各位数中出现的不同数字的个数, 例如 $f(2025) = 3$, $f(10001) = 2$, 若从集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的所有三元子集中任取一个, 记为 $\{a, b, c\}$, 则 $f[(10^a + 1)(10^b + 1)(10^c + 1)] = 3$ 的概率为 (Δ)

5.

6. 【2006 浙江理 10】函数 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 满足 $f(f(x)) = f(x)$, 则这样的函数个数共有 (Δ) 个。

7. 【1997 全国卷理 15】四面体的顶点和各棱中点共 10 个点, 在其中取 4 个不共面的点, 不同的取法共有 (Δ) 种。

8. 【2025 高联一试 B11】对整数 $n \geq 3$, 在一个棱长均为 1 的正 n 棱柱的所有 $3n$ 条棱中, 随机选取两条不同的棱 l_1, l_2 , 将事件 “ l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行” 发生的概率记为 P_n 。是否存在两个不同的正整数 $k, l (k, l \geq 3)$ 满足 $P_k = P_l$? 证明你的结论。

9. 【2023 年高联一试 8】八张标有 A, B, C, D, E, F, G, H 的正方形卡片构成下图, 现逐一取走这些卡片, 要求每次取走一张卡片时, 该卡片与剩下的卡片至多一张有公共边 (例如可按 D, A, B, E, C, F, G, H 的次序取走卡片, 但不可按 D, B, A, E, C, F, G, H 的次序取走卡片), 则取走这八张卡片的不同次序的数目为 (Δ)

A	B		
	C		D
E	F	G	H

10. 将一个平面 n 边形 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的每个顶点赋值 0 或 1，同时染红色或蓝色，若每一对相邻顶点所赋数字相同或所染颜色相同，则称 n 边形 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足性质 P。

- (1) 对四边形 A_1, A_2, A_3, A_4 的每个顶点随机赋值 0 或 1，同时随机染红色或蓝色，求四边形 A_1, A_2, A_3, A_4 满足性质 P 的概率；
- (2) 求 n 边形的所有满足性质 P 的不同的赋值与染色方法数（结果用 n 表示）。

11. 解答下述问题：

- (1) 从正 100 边形的顶点中随机选取 3 个，求以这 3 个点为顶点的三角形是锐角三角形或直角三角形的概率；
- (2) 平面上有 100 个点，这些点不与原点重合，对于这 100 个点与原点，其中的任意三点不共线。从这 100 个点中任选 3 个顶点，可以构成 C_{100}^3 个不同的三角形。若原点在三角形内部（含边界），则称该三角形为好三角形，求好三角形个数的最大值。

1. A.

新答案 (来源: 1.11 向量.md): D

【解题思路】由题意, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 0$, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 0$,

故 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD}) = 4\overrightarrow{OM}$.

2. 594. 初步判断 b, c, d, e 只能在 $0, 2, 4, 6, 8$ 中取。

若 e 取 $2, 6$, 那么为使 $4 \mid \overline{de}$, d 必须取奇数, 此时一定有 $4 \nmid \overline{cd}$, 不符题意, 故 c, d, e 只能在 $0, 4, 8$ 中取。

对于 b , 若 $b = 0, 4, 8$, 则 $a = 2, 4, 6, 8$; 若 $b = 2, 6$, 则 $a = 1, 3, 5, 7, 9$, 则 a, b 的选择共有 22 种。

故总情况为 $22 \times 27 = 594$

3. 60. 圆上的整点为 $(\pm 6, \pm 8), (\pm 6, \mp 8), (\pm 8, \pm 6), (\pm 8, \mp 6), (0, \pm 10), (\pm 10, 0)$ 。

直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 可以是不经过原点, 不平行于 x 轴或 y 轴的任意直线。

情况一, 直线与圆只有一个交点, 即相切: 共 8 种情况;

情况二, 直线与圆有两个交点: 连接任意两个整点, 可构成 C_{12}^2 条不同直线, 删去平行于 x 轴或 y 轴的直线, 共 10 条, 删去经过原点的不平行于 x 轴或 y 轴的直线, 共 4 条。

一共有 60 条直线满足题意。

4.

5. 1/4. 展开乘积得:

$$P = 1 + 10^a + 10^b + 10^c + 10^{a+b} + 10^{a+c} + 10^{b+c} + 10^{a+b+c}.$$

不妨设 $a < b < c$, 则 $a+b+c > b+c > a+c > a+b > b > a$ 且 $a+c > \boxed{c} > b$, 暂时无法确定 c 与 $a+b$ 的大小。

思考什么时候按十进制计数时会出现 3 种不同数字:

Question 1: 3 种不同的数字, 可能有哪些情况? $\boxed{\text{只可能是 } 0, 1, 2}$;

Question 2: 在什么情况下才可能出现数字 2 ? $\boxed{c = a + b}$;

于是有

$$(a, b, c) = (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 6)$$

满足出现数字 2 的情况。

其中, 后 5 个会使得数字 0 出现, 而 $(1, 2, 3)$ 则不会 (此时得到的数为 $11121111, f(P) = 2$), 排除此项, 所求概率为 $\frac{1}{4}$

6. 10. 设 $f(x) = y$, 由 $f(f(x)) = f(x)$ 可知 $\boxed{f(y) = y}$ 。

记 D 为函数 f 的像集, 那么 f 限制在像集上的映射是恒等映射。

情况一: $|D| = 1$, 则有三种情况: 分别为 $f(x) = 1, 2, 3$;

情况二： $|D| = 2$ ，设像集为 $\{y_1, y_2\}$ ，则 $f(y_1) = y_1, f(y_2) = y_2$ ，剩下那个元素可以映射到 y_1 或 y_2 。共 $3 \times 2 = 6$ 种情况；

情况三： $|D| = 3$ ，则 f 为恒等映射，共 1 种情况。

综上所述，共 10 种函数。

7. 141.

8.

9.

10. 392. 题目要求每次取走一张卡片时，这张卡片与剩下的卡片至多有一条公共边，考虑倒置取卡片顺序，可将问题转换为，从某个特定点开始，依次往图上加卡片，每次加入的卡片只能和已经放好的卡片有至多一个公共边，这类似于确定树根的遍历树的过程，遍历要求为：某结点被遍历时，其父亲结点一定已经被遍历过。

Hook-Length 公式： 对于一棵结点数为 n 的树 T ，若确定树根为结点 r ，那么从根开始的满足“父亲一定排在儿子前面”的遍历方式数为

$$\frac{n!}{\prod_v s_v}$$

其中 s_v 是以 v 为根的子树大小。

证明. 用第二数学归纳法。当 $n = 1$ 时，显然成立。

假设 $n < k$ 时命题成立，当 $n = k$ 时，设树根为 r ， r 必须排第一，删去根 r 后，树分成若干以 r 的儿子为根的子树，记这些子树的大小分别为 $n_1, n_2, \dots, n_k < k$ 每棵子树内部也必须满足题目要求的结构。

(1) 分别排列每棵子树，方法数为

$$F(T_1)F(T_2) \cdots F(T_k)$$

(2) 把这些子树中的排列交错合并（即保持各自元素相对顺序不变，进行合并），方法数为

$$\frac{(n-1)!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$$

于是

$$F(T) = \frac{(n-1)!}{n_1!n_2! \cdots n_k!} \prod_{i=1}^k F(T_i)$$

对每棵子树用归纳假设： $F(T_i) = \frac{n_i!}{\prod_{v \in T_i} s_v}$

代入得

$$F(T) = \frac{(n-1)!}{n_1! \cdots n_k!} \prod_{i=1}^k \frac{n_i!}{\prod_{v \in T_i} s_v} = \frac{(n-1)!}{\prod_{v \neq r} s_v}$$

又 $s_r = n$ ，所以

$$F(T) = \frac{n!}{\prod_v s_v}$$

□

根据对称性，利用 **Hook-Length** 公式，计算出以各结点为根的遍历方式数如下表：

作为根的结点	A, D	B, H	C, G	E	F
遍历方法数	4	28	84	20	140

故总方法数为 392。

11.

12.

第一章 计数原理与二项式定理

1.1 计数原理

第一章 计数原理与二项式定理

1.1 计数原理