
第一章 数列

第一章 数列

1.4 总复习题

A 组

- 【2001 上海春 16 改编】若数列 $\{a_n\}$ 前 8 项的值各异, 且对任意正整数 n , 有 $a_{n+8} = a_n$, 则下列数列中可取遍 $\{a_n\}$ 前 8 项值的是
 (A) $\{a_{3k+1}\}$ (B) $\{a_{4k+1}\}$ (C) $\{a_{5k+1}\}$ (D) $\{a_{6k+1}\}$
- 【2017 全国 I 卷 12】几位大学生响应国家的创业号召, 开发了一款应用软件. 为激发大家学习数学的兴趣, 他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动. 这款软件的激活码为下面数学问题的答案: 已知数列 $1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$, 其中第一项是 2^0 , 接下来的两项是 $2^0, 2^1$, 再接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$, 依次类推. 求满足如下条件的最小整数 N : $N > 100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂, 那么该款软件的激活码是
 (A) 440 (B) 330 (C) 220 (D) 110
- 【2010 湖南理 15】数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正整数 n , 只有有限个正整数 m 使得 $a_m < n$ 成立, 记这样的 m 的个数为 $(a_n)^*$, 得到一个新数列 $\{(a_n)^*\}$. 已知数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n^2$, 求 $(b_5)^*$ 的值与 $((a_n)^*)^*$ 的通项公式.
- 【2013 新课标 I 卷 12】设 $\triangle A_n B_n C_n$ 的三边长为 a_n, b_n, c_n , $\triangle A_n B_n C_n$ 的面积为 $S_n, n = 1, 2, 3, \dots$, 若 $b_1 > c_1, b_1 + c_1 = 2a_1, a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}, c_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2}$, 则
 (A) $\{S_n\}$ 为递减数列 (B) $\{S_n\}$ 为递增数列
 (C) $\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列, $\{S_{2n}\}$ 为递减数列 (D) $\{S_{2n-1}\}$ 为递减数列, $\{S_{2n}\}$ 为递增数列
- 【2013 湖南文 15】对于 $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ 的子集 $X = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$, 定义 X 的“特征数列”为 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$, 其中 $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 1$, 其余项均为 0. 若 E 的子集 P 的“特征数列” $p_1, p_2, \dots, p_{100}$ 满足 $p_i + p_{i+1} = 1, 1 \leq i \leq 99$, E 的子集 Q 的“特征数列” $q_1, q_2, \dots, q_{100}$ 满足 $q_1 = 1, q_j + q_{j+1} + q_{j+2} = 1, 1 \leq j \leq 98$, 求 $|P \cap Q|$.
- 【2026 汕头一模 14】排列 $1, 2, \dots, 37$ 这 37 个整数得到数列 $\{a_n\}$, 记其前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 37$, 且 $\forall 1 \leq n \leq 36, n \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} \mid S_n$, 求 a_{37} .
- 【2024 新高考 I 卷 19】设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 $a_j (i < j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) 可分数列.
 (1) 写出所有的 $(i, j), 1 \leq i < j \leq 6$, 使得数列 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 是 (i, j) 可分数列;
 (2) 当 $m \geq 3$ 时, 证明: $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 数列是 $(2, 13)$ 可分数列;
- 【2009 北京文 20】设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = pn + q$, 数列 $\{b_m\}$ 定义如下: 对于正整数 m , b_m 是使得不等式 $a_n \geq m$ 成立的所有 n 中的最小值.

- (1) 若 $p=2, q=-1$, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 $2m$ 项和公式;
 (2) 是否存在 p 和 q , 使得 $b_m=3m+2$? 若存在, 求 p 和 q 的取值范围, 否则请说明理由。

9. 【2014 安徽理 21】设实数 $c>0$, 整数 $p>1, n \in \mathbb{N}^*$ 。

- (1) 证明: 当 $x>-1$ 且 $x \neq 0$ 时, $(1+x)^p > 1+px$;
 (2) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > c^{\frac{1}{p}}, a_{n+1} = \frac{p-1}{p}a_n + \frac{c}{p}a_n^{1-p}$, 证明: $a_n > a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}$ 。

10. 【2009 湖南理 21】对于数列 $\{u_n\}$, 若存在常数 $M>0$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 恒有 $|u_{n+1}-u_n| + |u_n-u_{n-1}| + \cdots + |u_2-u_1| \leq M$, 则称数列 $\{u_n\}$ 为 B -数列。

- (1) 首项为 1, 公比为 q ($|q|<1$) 的等比数列是否为 B -数列? 请说明理由;
 (2) 设 S_n 是数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和, 给出下列两组论断:

A 组: (1) 数列 $\{x_n\}$ 是 B -数列 (2) 数列 $\{x_n\}$ 不是 B -数列

B 组: (3) 数列 $\{S_n\}$ 是 B -数列 (4) 数列 $\{S_n\}$ 不是 B -数列

请以其中一组中的一个论断为条件, 另一组中的一个论断为结论组成一个命题. 判断所给命题的真假, 并证明你的结论;

- (3) 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是 B -数列, 证明: 数列 $\{a_nb_n\}$ 也是 B -数列。

11. 【2008 江苏 19】

- (1) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是各项均不为零的 n ($n \geq 4$) 项等差数列, 且公差 $d \neq 0$. 若将此数列删去某一项得到的数列 (按原来的顺序) 是等比数列。

- i. 当 $n=4$ 时, 求 $\frac{a_1}{d}$ 的值;
 ii. 求 n 的所有可能值;

- (2) 求证: 对于给定的正整数 n ($n \geq 4$), 存在一个各项及公差都不为零的等差数列 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 其中任意三项 (按原来顺序) 都不能组成等比数列。

12. 【2019 江苏 20】定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“ M -数列”。已知数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n$ 。设 m 为正整数, 若存在“ M -数列 $\{c_n\}$ ”, 对任意正整数 k , 当 $k \leq m$ 时, 都有 $c_k \leq b_k \leq c_{k+1}$ 成立, 求 m 的最大值。

13. 【2015 上海理 22】已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n), n \in \mathbb{N}^*$ 。

- (1) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 求证: $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;
 (2) 设 $a_1=\lambda<0, b_n=\lambda^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 求 λ 的取值范围, 使得 $\{a_n\}$ 有最大值 M 与最小值 m , 且 $\frac{M}{m} \in (-2, 2)$ 。

1.

2. 思路 1: 当 $\frac{k(k+1)}{2} < n \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ 时, $a_n = 2^{n - \frac{k(k+1)}{2} - 1}$. 前 $\frac{k(k+1)}{2}$ 项和为:

$$S_{\frac{k(k+1)}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j 2^i = \sum_{j=0}^{k-1} (2^{j+1} - 1) = 2(2^k - 1) - k = 2^{k+1} - k - 2.$$

所以当 $\frac{k(k+1)}{2} < n \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ 时, 前 n 项和为

$$\begin{aligned} S_n &= S_{\frac{k(k+1)}{2}} + \sum_{i=\frac{k(k+1)}{2}+1}^n a_i \\ &= 2^{k+1} - k - 2 + \sum_{i=0}^{n - \frac{k(k+1)}{2} - 1} 2^i \\ &= 2^{k+1} - k - 2 + \left(2^{n - \frac{k(k+1)}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

由于 $n \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, 所以 $S_n \leq 2^{k+1} - k - 3 + 2^{k+1} < 2^{k+2}$, 另一方面 $n \geq \frac{k(k+1)}{2} + 1$, 且 $2^k = (1+1)^k \geq C_k^1 + C_k^0 = k+1$, 则 $S_n > 2^{k+1} - k - 2 + 1 = 2^k + 2^k - k - 1 \geq 2^k$, 所以 $2^k < S_n < 2^{k+2}$.

把前面的 n 换为 N , 要使得 S_N 为 2 的整数幂, 必须有 $S_N = 2^{k+1}$, 化简得

$$2N - \frac{k(k+1)}{2} = k+3, \Rightarrow N = \log_2(k+3) + \frac{k(k+1)}{2}.$$

由于 N 为正整数, 所以必须有 $k+3$ 是 2 的幂次, 即 $k \in \{1, 5, 13, 29, 61, \dots\}$, 相应地 $N \in \{3, 18, 82, 440, 1897, \dots\}$. 所以满足 $N > 100$ 的最小正整数 N 为 440.

思路 2: 由题意, 数列分段给出, 第 n 段是首项为 1、公比为 2 的等比数列, 因此前 n 段包含的项数为 $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, 这些项的和为

$$2^0 + (2^0 + 2^1) + \dots + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}) = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \dots + (2^n - 1) = 2^{n+1} - n - 2.$$

设所求的 N 项中包含完整的 n 段等比数列以及第 $n+1$ 段等比数列的前 k 项, 则

$$N = \frac{n(n+1)}{2} + k > 100,$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = n+2, \quad k < n+1,$$

且使得 N 的取值最小. 这等价于求 n 和 k 满足

$$N = \frac{n(n+1)}{2} + k > 100, \quad n+3 = 2^k, \quad k < n+1,$$

且使得 N 的取值最小.

于是, $n = 2^k - 3$, 故

$$N = \frac{(2^k - 3)(2^k - 2)}{2} + k.$$

要使得 $N > 100$ 且取值最小, 只需求 k 的最小值, 使得 $N > 100$. 当 $k=4$ 时, $N=95 < 100$, 不符合题意; 当 $k=5$ 时, $N=440$, 此时 $n=29$, 故满足条件的最小整数 N 为 440.

由于该款软件的激活码就是 N 的值, 因此该款软件的激活码为 440. 故选 A.

思路 3: 以 S_N 记数列的前 N 项和. 由题意, 数列的前 110 项为

$$2^0, 2^0, 2^1, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^{13}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4,$$

所以

$$\begin{aligned} S_{110} &= 2^0 + (2^0 + 2^1) + \dots + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{13}) + (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \\ &= (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \dots + (2^{14} - 1) + (2^5 - 1) \\ &= (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{14}) - 14 + 31 \\ &= 2^{15} + 15. \end{aligned}$$

这是一个奇数, 不可能是 2 的整数幂. 故选项 D 不正确.

同理,

$$S_{220} = 2^0 + (2^0 + 2^1) + \dots + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{19}) + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^9) = 2^{21} + 2^{10} - 23,$$

这是一个奇数, 不可能是 2 的整数幂. 故选项 C 不正确;

又

$$S_{330} = 2^0 + (2^0 + 2^1) + \dots + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{24}) + (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 2^{26} + 4,$$

也不是 2 的整数幂. 故选项 B 也不正确.

所以, 正确选项为 A.

【实测数据】阅卷数据如下.

地区	难度	区分度	选 A	选 B	选 C	选 D
河南理	0.20	0.16	19.84%	26.01%	40.56%	13.43%
福建理	0.26	0.15	25.71%	28.22%	33.03%	12.83%

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9. (1) 由题意得 $a_n = 2n - 1$. 对正整数 m , 由 $a_n \geq m$ 得 $n \geq \frac{m+1}{2}$.

根据 b_m 的定义可知, 当 $m = 2k - 1$ 时, $b_m = k (k \in \mathbb{N}^*)$; 当 $m = 2k$ 时, $b_m = k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$, 所以

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_{2m} &= (b_1 + b_3 + \dots + b_{2m-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{2m}) \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + m) + [2 + 3 + 4 + \dots + (m+1)] \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+3)}{2} \\ &= m^2 + 2m. \end{aligned}$$

- (2) 假设存在 p, q 满足条件, 由不等式 $pn + q \geq m$ 及 $p > 0$ 得 $n \geq \frac{m-q}{p}$.

因为 $b_m = 3m + 2 (m \in \mathbb{N}^*)$, 由 b_m 的定义可知, 对于任意的正整数 m 都有

$$3m + 1 < \frac{m - q}{p} \leq 3m + 2.$$

即 $-2p - q \leq (3p - 1)m < -p - q$ 对任意的正整数 m 都成立.

当 $3p - 1 > 0$ (或 $3p - 1 < 0$) 时, 得 $m < -\frac{p + q}{3p - 1}$ (或 $m \leq -\frac{2p + q}{3p - 1}$), 这与上述结论矛盾.

当 $3p - 1 = 0$, 即 $p = \frac{1}{3}$ 时, 得 $-\frac{2}{3} - q \leq 0 < -\frac{1}{3} - q$.

解得 $-\frac{2}{3} \leq q < -\frac{1}{3}$. (经检验符合题意)

所以存在 p 和 q , 使得 $b_m = 3m + 2 (m \in \mathbb{N}^*)$; p 和 q 的取值范围分别是 $p = \frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3} \leq q < -\frac{1}{3}$.

Fiddie 评: 实测数据如下:

本题文科难度为 0.12, 其中海淀区难度为 0.18. 得分分布如下:

	0	1	2	3	4	5	6
	50.87%	15.73%	3.52%	15.53%	4.92%	1.64%	1.40%
	7	8	9	10	11	12	13
	0.88%	3.04%	1.95%	0.10%	0.24%	0.07%	0.12%

全市满分人数为 33 人.

易错警示:

1. 第一问中不理解题意, 没有意识到 $b_m \in \mathbb{N}^*$, 得到 $b_3 = \frac{20}{3}$;
2. 第二问中得到 $2n - 1 \geq 2m$, 计算出 $n \geq \frac{2m + 1}{2}$;
3. 第二问中虽然得到了 $n \geq \frac{m + 1}{2}$, 但没有对 m 的奇偶进行讨论的意识, 或者讨论出错;
4. 一一列举出 “ $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \cdots + m + m + m + 1$ ”, 但最后通项出错, 或者还有尽管列举正确, 但是由于项数不清和公式不熟导致求和出错;
5. 对题目中 “ n 中的最小值” 理解不清, 第三问得到了 $n \geq \frac{m - q}{p}$, $\frac{m - q}{p} \leq 3m + 2$ 但没有考虑到 $\frac{m - q}{p} > 3m + 1$.

10. 新答案 (来源: 321-340 已有结论放缩与数列不等式.md):

- (1) 问一个思路是利用 (1) 问结论, 但说实话如果没做过类似的题目是很难看出联系的, 为了证明 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$, 需要对递推公式进行一定的变形来将 a_n 和 $c^{\frac{1}{p}}$ 更直观的联系起来, 再考虑到要证明 $\{a_n\}$ 单调递减, 由此想到对相邻两项作商, 这样既能便于证明 $\{a_n\}$ 单调递减, 还能 “剥离” 出一个 $\frac{c}{a_n^p}$ 的形式:

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): (1) 设满足题设的等比数列为 $\{a_n\}$, 则

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \text{ 于是}$$

$$|a_n - a_{n-1}| = \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right| = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, n \geq 2.$$

因此

$$|a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_2 - a_1| = \frac{3}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = 3 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] < 3.$$

故首项为 1, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列是 B-数列.

(2) 命题 1: 若数列 $\{x_n\}$ 是 B-数列, 则数列 $\{S_n\}$ 是 B-数列. 此命题为假命题.

事实上, 设 $x_n = 1, n \in \mathbb{N}^*$, 则数列 $\{x_n\}$ 是 B-数列. 但 $S_n = n$, 此时

$$|S_{n+1} - S_n| + |S_n - S_{n-1}| + \cdots + |S_2 - S_1| = n.$$

由 n 的任意性可知, 数列 $\{S_n\}$ 不是 B-数列.

命题 2: 若数列 $\{S_n\}$ 是 B-数列, 则数列 $\{x_n\}$ 是 B-数列. 此为真命题.

事实上, 因为数列 $\{S_n\}$ 是 B-数列, 所以存在正数 M , 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有

$$|S_{n+1} - S_n| + |S_n - S_{n-1}| + \cdots + |S_2 - S_1| \leq M,$$

即 $|x_{n+1}| + |x_n| + \cdots + |x_2| \leq M$. 于是

$$\begin{aligned} & |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_2 - x_1| \\ & \leq |x_{n+1}| + 2|x_n| + 2|x_{n-1}| + \cdots + 2|x_2| + |x_1| \leq 2M + |x_1|. \end{aligned}$$

所以数列 $\{x_n\}$ 是 B-数列.

(注: 按题中要求组成其他命题解答时, 仿上述解法.)

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是 B-数列, 则存在正数 M , 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有

$$|a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_2 - a_1| \leq M.$$

因为

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 + a_1| \\ &\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_2 - a_1| + |a_1| \leq M + |a_1|. \end{aligned}$$

记 $K = M + |a_1|$, 则有

$$|a_{n+1}^2 - a_n^2| = |(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n)| \leq (|a_{n+1}| + |a_n|)|a_{n+1} - a_n| \leq 2K|a_{n+1} - a_n|.$$

因此

$$|a_{n+1}^2 - a_n^2| + |a_n^2 - a_{n-1}^2| + \cdots + |a_2^2 - a_1^2| \leq 2KM.$$

故数列 $\{a_n^2\}$ 是 B-数列.

【解题思路】解第(1)问时, 只需写出等比数列的通项公式, 代入“B-数列”定义中不等式的左边, 再由等比数列的前 n 项和公式得出结论.

第(2)问是一个开放型问题, A, B 两组共组成八种命题, 考生可以根据自身的思维习惯任取一命题进行判断和证明, 若选 $\Rightarrow$, $\Rightarrow$ 两组真命题, 则对其证明要求比较高; 若选 $\Rightarrow$, 则只需举一个简单的反例即可判断并证明其真假, 如取 $x_n = 1$, 则 $\{x_n\}$ 是 B-数列, $\{S_n\}$ 不是 B-数列.

解第(3)问时, 首先证明 B-数列是有界数列, 然后根据

$$|a_n^2 - a_{n-1}^2| \leq (|a_n| + |a_{n-1}|)(|a_n - a_{n-1}|)$$

得出结论.

【实测数据】本论文科难度为 0.066.

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): 首先证明一个”基本事实”:

一个等差数列中, 若有连续三项成等比数列, 则这个数列的公差 $d_0 = 0$.

事实上, 设这个数列中的连续三项 $a - d_0, a, a + d_0$ 成等比数列, 则

$$a^2 = (a - d_0)(a + d_0),$$

由此得 $d_0 = 0$.

(1) () 当 $n = 4$ 时, 由于数列的公差 $d \neq 0$, 故由”基本事实”推知, 删去的项只可能为 a_2 或 a_3 .

若删去 a_2 , 则由 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 得 $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$.

因 $d \neq 0$, 故由上式得 $a_1 = -4d$, 即 $\frac{a_1}{d} = -4$, 此时数列为 $-4d, -3d, -2d, -d$, 满足题设.

若删去 a_3 , 则由 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 得 $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$.

因 $d \neq 0$, 故由上式得 $a_1 = d$, 即 $\frac{a_1}{d} = 1$. 此时数列为 $d, 2d, 3d, 4d$, 满足题设.

综上所述, $\frac{a_1}{d}$ 的值为 -4 或 1 .

() 若 $n \geq 6$, 则从满足题设的数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中删去一项后得到的数列, 必有原数列中的连续三项, 从而这三项既成等差数列又成等比数列, 故由”基本事实”知, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的公差必为 0 , 这与题设矛盾. 所以满足题设的数列的项数 $n \leq 5$. 又因题设 $n \geq 4$, 故 $n = 4$ 或 5 .

当 $n = 4$ 时, 由 () 中的讨论知存在满足题设的数列.

当 $n = 5$ 时, 若存在满足题设的数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , 则由”基本事实”知, 删去的项只能是 a_3 , 从而 a_1, a_2, a_4, a_5 成等比数列, 故

$$(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d),$$

及

$$(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 4d).$$

分别化简上述两个等式, 得 $a_1 d = d^2$ 及 $a_1 d = -5d^2$, 故 $d = 0$, 矛盾. 因此, 不存在满足题设的项数为 5 的等差数列.

综上所述, n 只能为 4 .

(2) 假设对于某个正整数 n , 存在一个公差为 d' 的 n 项等差数列 $b_1, b_1 + d', \dots, b_1 + (n-1)d'$ ($b_1 d' \neq 0$), 其中三项 $b_1 + m_1 d', b_1 + m_2 d', b_1 + m_3 d'$ 成等比数列, 这里 $0 \leq m_1 < m_2 < m_3 \leq n-1$. 则有

$$(b_1 + m_2 d')^2 = (b_1 + m_1 d')(b_1 + m_3 d'),$$

化简得

$$(m_1 + m_3 - 2m_2)b_1 d' = (m_2^2 - m_1 m_3)(d')^2.$$

(*)

由 $b_1 d' \neq 0$ 知, $m_1 + m_3 - 2m_2$ 与 $m_2^2 - m_1 m_3$ 或同时为零, 或均不为零.

若 $m_1 + m_3 - 2m_2 = 0$, 且 $m_2^2 - m_1 m_3 = 0$, 则有 $\left(\frac{m_1 + m_3}{2}\right)^2 - m_1 m_3 = 0$,

即 $(m_1 - m_3)^2 = 0$, 得 $m_1 = m_3$, 从而 $m_1 = m_2 = m_3$, 矛盾.

因此, $m_1 + m_3 - 2m_2$ 与 $m_2^2 - m_1m_3$ 都不为零, 故由 (*) 得

$$\frac{b_1}{d'} = \frac{m_2^2 - m_1m_3}{m_1 + m_3 - 2m_2}.$$

因为 m_1, m_2, m_3 均为非负整数, 所以上式右边为有理数, 从而 $\frac{b_1}{d'}$ 是一个有理数.

于是, 对于任意的正整数 $n \geq 4$, 只要取 $\frac{b_1}{d'}$ 为无理数, 则相应的数列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 就是满足要求的数列. 例如, 取 $b_1 = 1, d' = \sqrt{2}$, 那么, n 项数列 $1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + (n-1)\sqrt{2}$ 满足要求.

【解题思路】第(2)问在解答时也可以先给出数列 $1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + (n-1)\sqrt{2}$ (只要公差为无理数均可), 然后再证明其中任意三项都不构成等比数列 (最终会得出 $\sqrt{2}$ 等于一个有理数的形式, 就导出矛盾).

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q , 所以 $a_1 \neq 0, q \neq 0$.

由

$$\begin{cases} a_2 a_4 = a_5, \\ a_3 - 4a_2 + 4a_1 = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a_1^2 q^4 = a_1 q^4, \\ a_1 q^2 - 4a_1 q + 4a_1 = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2. \end{cases}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 为 "M-数列".

(2) 因为 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{b_n} - \frac{2}{b_{n+1}}$, 所以 $b_n \neq 0$.

由 $b_1 = 1, S_1 = 1$, 得 $\frac{1}{1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{b_2}$, 则 $b_2 = 2$.

由 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{b_n} - \frac{2}{b_{n+1}}$, 得 $S_n = \frac{b_n b_{n+1}}{2(b_{n+1} - b_n)}$,

当 $n \geq 2$ 时, 由 $b_n = S_n - S_{n-1}$, 得 $b_n = \frac{b_n b_{n+1}}{2(b_{n+1} - b_n)} - \frac{b_{n-1} b_n}{2(b_n - b_{n-1})}$,

整理得 $b_{n+1} + b_{n-1} = 2b_n$.

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项和公差均为 1 的等差数列.

因此, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n (n \in \mathbb{N}^*)$.

由 知, $b_k = k, k \in \mathbb{N}^*$.

因为数列 $\{c_n\}$ 为 "M-数列", 设公比为 q , 所以 $c_1 = 1, q > 0$.

因为 $c_k \leq b_k \leq c_{k+1}$, 所以 $q^{k-1} \leq k \leq q^k$, 其中 $k = 1, 2, 3, \dots, m$.

当 $k = 1$ 时, 有 $q \geq 1$;

当 $k = 2, 3, \dots, m$ 时, 有 $\frac{\ln k}{k} \leq \ln q \leq \frac{\ln k}{k-1}$.

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 1$), 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = e$. 列表如下:

x	$(1, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

因为 $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 8}{6} < \frac{\ln 9}{6} = \frac{\ln 3}{3}$, 所以 $f(k)_{\max} = f(3) = \frac{\ln 3}{3}$.

取 $q = \sqrt[3]{3}$, 当 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 时, $\frac{\ln k}{k} \leq \ln q$, 即 $k \leq q^k$, 经检验知 $q^{k-1} \leq k$ 也成立. 因此所求 m 的最大值不小于 5.

若 $m \geq 6$, 分别取 $k = 3, 6$, 得 $3 \leq q^3$, 且 $q^5 \leq 6$, 从而 $q^{15} \geq 243$, $q^{15} \leq 216$, 所以 q 不存在. 因此所求 m 的最大值小于 6.

综上, 所求 m 的最大值为 5.

新答案 (来源: 321-340 已有结论放缩与数列不等式.md):

$$(1) \text{ 令 } f(x) = (1+x)^p - px - 1, \quad f'(x) = p[(1+x)^{p-1} - 1].$$

2.

3. 首先证明一个“基本事实”: 一个等差数列中, 若有连续三项成等比数列, 则这个数列的公差 $d_0 = 0$. 证明如下:

设这个数列中的连续三项 $a-d_0, a, a+d_0$ 成等比数列, 则

$$a^2 = (a-d_0)(a+d_0),$$

由此得 $d_0 = 0$.

(1.i) 当 $n = 4$ 时, 由于数列的公差 $d \neq 0$, 故由“基本事实”推知, 删去的项只可能为 a_2 或 a_3 .

若删去 a_2 , 则由 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 得 $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$.

因 $d \neq 0$, 故由上式得 $a_1 = -4d$, 即 $\frac{a_1}{d} = -4$, 此时数列为 $-4d, -3d, -2d, -d$, 满足题设.

若删去 a_3 , 则由 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 得 $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$.

因 $d \neq 0$, 故由上式得 $a_1 = d$, 即 $\frac{a_1}{d} = 1$. 此时数列为 $d, 2d, 3d, 4d$, 满足题设.

综上可知, $\frac{a_1}{d}$ 的值为 -4 或 1 .

(1.ii) 若 $n \geq 6$, 则从满足题设的数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中删去一项后得到的数列, 必有原数列中的连续三项, 从而这三项既成等差数列又成等比数列, 故由“基本事实”知, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的公差必为 0, 这与题设矛盾. 所以满足题设的数列的项数 $n \leq 5$. 又因题设 $n \geq 4$, 故 $n = 4$ 或 5 .

当 $n = 4$ 时, 由 (1.i) 中的讨论知存在满足题设的数列.

当 $n=5$ 时, 若存在满足题设的数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , 则由“基本事实”知, 删去的项只能是 a_3 , 从而 a_1, a_2, a_4, a_5 成等比数列, 故

$$(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d),$$

及

$$(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 4d).$$

分别化简上述两个等式, 得 $a_1 d = d^2$ 及 $a_1 d = -5d^2$, 故 $d=0$, 矛盾. 因此, 不存在满足题设的项数为 5 的等差数列.

综上所述, n 只能为 4.

(2) 假设对于某个正整数 n , 存在一个公差为 d' 的 n 项等差数列 $b_1, b_1 + d', \dots, b_1 + (n-1)d'$ ($b_1 d' \neq 0$), 其中三项 $b_1 + m_1 d', b_1 + m_2 d', b_1 + m_3 d'$ 成等比数列, 这里 $0 \leq m_1 < m_2 < m_3 \leq n-1$. 则有

$$(b_1 + m_2 d')^2 = (b_1 + m_1 d')(b_1 + m_3 d'),$$

化简得

$$(m_1 + m_3 - 2m_2)b_1 d' = (m_2^2 - m_1 m_3)(d')^2. \quad (*)$$

由 $b_1 d' \neq 0$ 知, $m_1 + m_3 - 2m_2$ 与 $m_2^2 - m_1 m_3$ 或同时为零, 或均不为零.

若 $m_1 + m_3 - 2m_2 = 0$, 且 $m_2^2 - m_1 m_3 = 0$, 则有 $\left(\frac{m_1 + m_3}{2}\right)^2 - m_1 m_3 = 0$, 即 $(m_1 - m_3)^2 = 0$, 得 $m_1 = m_3$, 从而 $m_1 = m_2 = m_3$, 矛盾.

因此, $m_1 + m_3 - 2m_2$ 与 $m_2^2 - m_1 m_3$ 都不为零, 故由 (*) 得

$$\frac{b_1}{d'} = \frac{m_2^2 - m_1 m_3}{m_1 + m_3 - 2m_2}.$$

因为 m_1, m_2, m_3 均为非负整数, 所以上式右边为有理数, 从而 $\frac{b_1}{d'}$ 是一个有理数.

于是, 对于任意的正整数 $n \geq 4$, 只要取 $\frac{b_1}{d'}$ 为无理数, 则相应的数列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 就是满足要求的数列. 例如, 取 $b_1 = 1$, $d' = \sqrt{2}$, 那么, n 项数列 $1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + (n-1)\sqrt{2}$ 满足要求.

评: 第 (2) 问在解答时也可以先给出数列 $1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + (n-1)\sqrt{2}$ (只要公差为无理数均可), 然后再证明其中任意三项都不构成等比数列 (最终会得出 $\sqrt{2}$ 等于一个有理数的形式, 就导出矛盾).

4.

5.

第一章 数列

习题组 II

- 【2009 上海理 23】已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.
 - 若 $\{a_n\} = 3n + 1$, 是否存在 $m, k \in \mathbb{N}^*$, 有 $a_m + a_{m+1} = a_k$? 请说明理由;
 - 找出所有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 使对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$, 并说明理由;
 - 若 $a_1 = 5, d = 4, b_1 = q = 3$, 试确定所有的 p , 使数列 $\{a_n\}$ 中存在某个连续 p 项的和是数列 $\{b_n\}$ 中的一项, 请证明.
- 【2011 湖南理 22】已知函数 $f(x) = x^3, g(x) = x + \sqrt{x}$.
 - 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数, 并说明理由;
 - 设数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 满足 $a_1 = a$ ($a > 0$), $f(a_{n+1}) = g(a_n)$, 证明: 存在常数 M , 使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n \leq M$.
- 【2019 上海 21】数列 $\{a_n\}$ 有 100 项, $a_1 = a$, 对任意 $n \in [2, 100]$, 存在 i 使得 $a_n = a_i + d$, $i \in [1, n-1]$, 若 a_k 与之前中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P .
 - 若 $a_1 = 1, d = 2$, 求 a_4 所有可能的值;
 - 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 求证: $\{a_n\}$ 中存在具有性质 P 的项;
 - 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P , 这三项和为 C , 试用 a, d, c 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$.
- 【2024 深圳二模 19】无穷数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 的定义如下: 如果 n 是偶数, 就对 n 尽可能多次地除以 2, 直到得出一个奇数, 这个奇数就是 a_n ; 如果 n 是奇数, 就对 $3n+1$ 尽可能多次地除以 2, 直到得出一个奇数, 这个奇数就是 a_n .
 - 如果 $a_n = m$ 且 $a_m = n$, 求 m, n 的值.
 - 记 $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}_+$, 求一个正整数 n , 满足

$$n < f(n) < f(f(n)) < \cdots < \underbrace{f(f(\cdots f(n)\cdots))}_{2024 \text{ 个 } f}$$
- 【2013 安徽理 20】设函数 $f(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2}$ ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$), 证明:
 - 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在唯一的 $x_n \in [\frac{2}{3}, 1]$, 满足 $f(x_n) = 0$;
 - 对任意 $p \in \mathbb{N}^*$, 由 (1) 中 x_n 构成的数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$.
- 【2011 北京理 20】若数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) 满足 $|a_{k+1} - a_k| = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), 则称 A_n 为 E 数列. 记 $S(A_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
 - 写出一个满足 $a_1 = a_5 = 0$, 且 $S(A_5) > 0$ 的 E 数列 A_5 ;
 - 若 $a_1 = 12, n = 2000$, 证明: E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$;
 - 对任意给定的整数 n ($n \geq 2$), 是否存在首项为 0 的 E 数列 A_n , 使得 $S(A_n) = 0$? 如果存在, 写出一个满足条件的 E 数列 A_n ; 如果不存在, 说明理由.

7. 【2011 江苏 20】设 M 为部分正整数组成的集合, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n , 已知对任意整数 $k \in M$, 当整数 $n > k$ 时, $S_{n+k} + S_{n-k} = 2(S_n + S_k)$ 都成立。

(1) 设 $M = \{1\}$, $a_2 = 2$, 求 a_5 的值;

(2) 设 $M = \{3, 4\}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

8. 【2017 江苏 19】对于给定的正整数 k , 若数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_{n-k} + a_{n-k+1} + \cdots + a_{n-1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k-1} + a_{n+k} = 2ka_n$$

对任意正整数 $n(n > k)$ 总成立, 则称数列是 “ $P(k)$ 数列”。若数列 $\{a_n\}$ 既是 “ $P(2)$ 数列”, 又是 “ $P(3)$ 数列”, 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列。

9. 【2015 江苏 20】设 a_1, a_2, a_3, a_4 是各项为正数且公差为 $d(d \neq 0)$ 的等差数列。

(1) 是否存在 a_1, d , 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列? 并说明理由;

(2) 是否存在 a_1, d 及正整数 n, k , 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列? 并说明理由。

10. 【2013 北京理 20】已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列, 该数列前 n 项的最大值记为 A_n , 第 n 项之后各项 $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots$ 的最小值记为 B_n , $d_n = A_n - B_n$ 。

(1) 若 $\{a_n\}$ 为 $2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, \cdots$, 是一个周期为 4 的数列 (即对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+4} = a_n$), 写出 d_1, d_2, d_3, d_4 的值;

(2) 设 d 是非负整数, 证明: $d_n = -d (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列;

(3) 证明: 若 $a_1 = 2, d_n = 1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或者 2, 且有无穷多项为 1。

11. 【2012 江苏 20】已知各项均为正数的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 设 $b_{n+1} = 1 + \frac{b_n}{a_n}, n \in \mathbb{N}^*$, 求证: 数列 $\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\right\}$ 是等差数列;

(2) 设 $b_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \frac{b_n}{a_n}, n \in \mathbb{N}^*$, 且 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求 a_1 和 b_1 的值。

12. 【2008 北京理 20】对于每项均是正整数的数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$, 定义变换 T_1 , T_1 将数列 A 变换成数列 $T_1(A): n, a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_n - 1$. 对于每项均是非负整数的数列 $B: b_1, b_2, \cdots, b_m$, 定义变换 T_2 , T_2 将数列 B 各项从大到小排列, 然后去掉所有为零的项, 得到数列 $T_2(B)$; 又定义 $S(B) = 2(b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m) + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2$. 设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列, 令 $A_{k+1} = T_2(T_1(A_k)) (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 。

(1) 如果数列 A_0 为 $5, 3, 2$, 写出数列 A_1, A_2 ;

(2) 对于每项均是正整数的有穷数列 A , 证明 $S(T_1(A)) = S(A)$;

(3) 证明: 对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0 , 存在正整数 K , 当 $k \geq K$ 时, $S(A_{k+1}) = S(A_k)$ 。

13. 【2006 上海理 21】已知有穷数列 $\{a_n\}$ 共有 $2k$ 项 (整数 $k \geq 2$), 首项 $a_1 = 2$. 设该数列的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = (a-1)S_n + 2 (n = 1, 2, \cdots, 2k-1)$, 其中常数 $a > 1$ 。

- (1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;
- (2) 若 $a = 2^{\frac{2}{2k-1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{n} \log_2(a_1 a_2 \cdots a_n)$ ($n = 1, 2, \dots, 2k$), 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (3) 若 (2) 中的数列 $\{b_n\}$ 满足不等式 $\left|b_1 - \frac{3}{2}\right| + \left|b_2 - \frac{3}{2}\right| + \cdots + \left|b_{2k-1} - \frac{3}{2}\right| + \left|b_{2k} - \frac{3}{2}\right| \leq 4$, 求 k 的值.
14. 【2019 北京理 20】已知数列 $\{a_n\}$ 从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、 $\dots$ 、第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \cdots < i_m$), 若 $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_m}$, 则称新数列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列. 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.
- (1) 写出数列 1, 8, 3, 7, 5, 6, 9 的一个长度为 4 的递增子列;
- (2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0} , 长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0} . 若 $p < q$, 求证: $a_{m_0} < a_{n_0}$;
- (3) 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且任意两项均不相等. 若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$, 且长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 ($s = 1, 2, \dots$), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
15. 【2018 上海 21】给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $|b_n - a_n| \leq 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”.
- (1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n = a_{n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M = \{x \mid x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m ;
- (3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列. 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.
16. 【2018 江苏 20】设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为 b_1 , 公比为 q 的等比数列.
- (1) 设 $a_1 = 0, b_1 = 1, q = 2$, 若 $|a_n - b_n| \leq b_1$ 对 $n = 1, 2, 3, 4$ 均成立, 求 d 的取值范围;
- (2) 若 $a_1 = b_1 > 0, m \in \mathbb{N}^*, q \in (1, \sqrt[m]{2}]$, 证明: 存在 $d \in \mathbb{R}$, 使得 $|a_n - b_n| \leq b_1$ 对 $n = 2, 3, \dots, m+1$ 均成立, 并求 d 的取值范围 (用 b_1, m, q 表示).
17. 【2017 北京理 20】设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列, 记 $c_n = \max\{b_1 - a_1 n, b_2 - a_2 n, \dots, b_n - a_n n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 其中 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 这 s 个数中最大的数.
- (1) 若 $a_n = n, b_n = 2n - 1$, 求 c_1, c_2, c_3 的值, 并证明 $\{c_n\}$ 是等差数列;
- (2) 证明: 或者对任意正数 M , 存在正整数 m , 当 $n \geq m$ 时, $\frac{c_n}{n} > M$; 或者存在正整数 m , 使得 $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ 是等差数列.
18. 【2016 上海理 23】若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 只要 $a_p = a_q$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$), 必有 $a_{p+1} = a_{q+1}$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 P .
- (1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 P . 且 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 + a_7 + a_8 = 21$, 求 a_3 ;

(2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $b_1 = c_5 = 1$, $b_5 = c_1 = 81$, $a_n = b_n + c_n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列, 已知 $a_{n+1} = b_n + \sin a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求证: “对任意 a_1 , $\{a_n\}$ 都具有性质 P ” 的充要条件为 “ $\{b_n\}$ 是常数列”。

19. 【2015 浙江理 20】设数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_N$ ($N \geq 2$). 如果对小于 n ($2 \leq n \leq N$) 的每个正整数 k 都有 $a_k < a_n$, 则称 n 是数列 A 的一个 “ G 时刻”. 记 $G(A)$ 是数列 A 的所有 “ G 时刻” 组成的集合。

(1) 对数列 $A: -2, 2, -1, 1, 3$, 写出 $G(A)$ 的所有元素;

(2) 证明: 若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n > a_1$, 则 $G(A) \neq \emptyset$;

(3) 证明: 若数列 A 满足 $a_n - a_{n-1} \leq 1$ ($n = 2, 3, \dots, N$), 则 $G(A)$ 的元素个数不小于 $a_N - a_1$ 。

20. 【2014 江苏 20】设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若对任意正整数 n , 总存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是 “ H 数列”。

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 证明: $\{a_n\}$ 是 “ H 数列”;

(2) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其首项 $a_1 = 1$, 公差 $d < 0$. 若 $\{a_n\}$ 是 “ H 数列”, 求 d 的值;

(3) 证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个 “ H 数列” $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 成立。

1.

2. 新答案 (来源: 041-060 简单极值最值与极值点零点.md):

(1) $h'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$, $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增 $h'\left(\frac{1}{2}\right) < 0, h'(1) > 0$, $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一零点 $x=t$, 且 $0 < x < t$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, $x > t$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增. $h(0) = 0, h(t) < h(0) = 0, h(2) > 0$, $x=0$ 是 $h(x)$ 的零点, $h(x)$ 在 $(t, 2)$ 上有一个零点, 综上 $h(x)$ 共有两个零点.(2) 由 (1) 过程知 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点 x_0

$$a = x_0$$

 $f(a_2) = g(x_0)$, 由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增且 $f(x_0) = g(x_0)$ 可得 $a_2 = x_0$, 以此类推 $\{a_n\}$ 的每一项都为 x_0 , $\exists M = x_0$ 满足题意;

$$0 < a < x_0$$

由 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增可得 $f(a_2) = g(a) < g(x_0) = f(x_0)$, 进而 $a_2 < x_0$, 以此类推 $\{a_n\}$ 的每一项都小于 x_0 , $M = x_0$ 满足题意;

$$a > x_0$$

由 (1) 过程知 $0 < x < x_0$ 时 $h(x) < 0$ 即 $f(x) < g(x)$, $x > x_0$ 时 $h(x) > 0$ 即 $f(x) > g(x)$ 于是 $f(a_2) = g(a) < f(a)$, 进而 $a_2 < a$, 以此类推 $\{a_n\}$ 的每一项都小于 a , $\exists M = a$ 满足题意.综上, 存在 M 满足题意.

新答案 (来源: 041-060 简单极值最值与极值点零点.md):

(1) 显然 $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f_n(1) = -1 + 1 = 0$, 只需证 $f_n\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0$:当 $x > 0$ 时,

$$f_n(x) \leq -1 + x + \frac{x^2 + x^3 + \cdots + x^n}{2^2} = -1 + x + \frac{x^2(1 - x^{n-1})}{4(1-x)} < -1 + x + \frac{x^2}{4(1-x)}$$

$$\text{因此 } f_n\left(\frac{2}{3}\right) < -1 + \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4\left(1-\frac{2}{3}\right)} = 0.$$

(2) 由 $f_{n+p}(x_n) > f_n(x_n) = f_{n+p}(x_{n+p})$ 以及 $f_{n+p}(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增可知

$$x_n > x_{n+p}, \text{ 下证 } x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}:$$

$$\begin{aligned} f_n(x_n) - f_{n+p}(x_{n+p}) = 0 &\Rightarrow x_n - x_{n+p} + \frac{x_n^2 - x_{n+p}^2}{2^2} + \frac{x_n^3 - x_{n+p}^3}{3^2} + \cdots + \frac{x_n^n - x_{n+p}^n}{n^2} \\ &= \frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x_{n+p}^{n+2}}{(n+2)^2} \cdots + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2} \end{aligned}$$

由 $x_n > x_{n+p}$ 可得

$$x_n - x_{n+p} < \frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x_{n+p}^{n+2}}{(n+2)^2} \cdots + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x_{n+p}^{n+2}}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
& < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
& = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

综上 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$.

新答案 (来源: 3.2 性质的证明 (2) 数列.md): (1) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 设其公差为 d , 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$,

从而, 当 $n \geq 4$ 时,

$$\begin{aligned}
a_{n-k} + a_{n+k} &= a_1 + (n-k-1)d + a_1 + (n+k-1)d = 2a_1 + 2(n-1)d = 2a_n, \\
& k = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

所以 $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 6a_n$. 因此等差数列 $\{a_n\}$ 是 "P(3) 数列".

(2) 数列 $\{a_n\}$ 既是 "P(2) 数列", 又是 "P(3) 数列", 因此,

当 $n \geq 3$ 时, $a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n+1} + a_{n+2} = 4a_n$,

当 $n \geq 4$ 时, $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 6a_n$.

由 知, $a_{n-3} + a_{n-2} = 4a_{n-1} - (a_n + a_{n+1})$,

$$a_{n+2} + a_{n+3} = 4a_{n+1} - (a_{n-1} + a_n).$$

将 代入, 得 $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$, 其中 $n \geq 4$.

所以 $a_3, a_4, a_5, \dots$ 是等差数列, 设公差为 d' .

在 中, 取 $n=4$, 则 $a_2 + a_3 + a_5 + a_6 = 4a_4$, 所以 $a_2 = a_3 - d'$,

在 中, 取 $n=3$, 则 $a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = 4a_3$, 所以 $a_1 = a_3 - 2d'$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

新答案 (来源: 061-080 极值零点数列与切割函数图像.md):

(1) 显然构成公比为 2^d 的等比数列, 过程略.

(2) 假设存在 a_1, d 满足题意.

a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列且均为正数因此

$\ln a_1, 2 \ln(a_1 + d), 3 \ln(a_1 + 2d), 4 \ln(a_1 + 3d)$ 依次构成等差数列, 设其公差为 d_1 .

令 $b = \ln a_1$, 则 $n \ln[a_1 + (n-1)d] = b + (n-1)d_1$ ($n = 1, 2, 3, 4$)

即方程 $\ln[a_1 + (x-1)d] = \frac{b-d_1}{x} + d_1$ 至少存在四个解 $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$

令 $\varphi(x) = \ln[a_1 + (x-1)d] - \frac{b-d_1}{x} - d_1$ ($1 \leq x \leq 4$), 则 $\varphi(x)$ 至少有 4 个零点.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{a_1 + (x-1)d} + \frac{b-d_1}{x^2} = \frac{dx^2 + (b-d_1)[a_1 + (x-1)d]}{x^2[a_1 + (x-1)d]}$$

显然 $x \geq 1$ 时 $x^2[a_1 + (x-1)d] > 0$.

令 $g(x) = dx^2 + (b-d_1)[a_1 + (x-1)d]$, $g(x)$ 是二次函数至多有 2 个变号零点, 进而 $\varphi(x)$ 至多有 3 个单调区间, 即 $\varphi(x)$ 至多有 3 个零点, 矛盾.

综上不存在 a_1, d 满足题意.

(3) 问与 (2) 问做法如出一辙:

假设存在 a_1, d 以及正整数 n, k 满足题意.

$a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列且均为正数因此

$n \ln a_1, (n+k) \ln(a_1+d), (n+2k) \ln(a_1+2d), (n+3k) \ln(a_1+3d)$ 依次构成等差数列, 设其公差为 d_2 .

令 $b = n \ln a_1$, 则 $[n + (i-1)k] \ln[a_1 + (i-1)d] = b + (i-1)d_2$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

即方程 $\ln(a_1 + dx) = \frac{b+d_2x}{n+kx}$ 至少存在四个解 $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$

令 $\phi(x) = \ln(a_1 + dx) - \frac{b+d_2x}{n+kx}$ ($0 \leq x \leq 3$), 则 $\phi(x)$ 至少有 4 个零点.

$$\phi'(x) = \frac{d}{a_1 + dx} + \frac{bk - d_2n}{(n+kx)^2} = \frac{d(n+kx)^2 + (bk - d_2n)(a_1 + dx)}{(n+kx)^2(a_1 + dx)}$$

显然 $x \geq 0$ 时 $(n+kx)^2(a_1 + dx) > 0$

令 $h(x) = d(n+kx)^2 + (bk - d_2n)(a_1 + dx)$, $h(x)$ 是二次函数至多有 2 个变号零点, 进而 $\phi(x)$ 至多有 3 个单调区间, 即 $\phi(x)$ 至多有 3 个零点, 矛盾.

综上, 不存在 a_1, d 以及正整数 n, k 满足题意.

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): (1) 解: $A_0: 5, 3, 2$,

$T_1(A_0): 3, 4, 2, 1$,

$A_1 = T_2(T_1(A_0)): 4, 3, 2, 1$;

$T_1(A_1): 4, 3, 2, 1, 0$,

$A_2 = T_2(T_1(A_1)): 4, 3, 2, 1$.

(2) 证明: 设每项均是正整数的有穷数列 A 为 $a_1, a_2, \dots, a_n$.

则 $T_1(A)$ 为 $n, a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1$.

从而

$$S(T_1(A)) = 2[n + 2(a_1 - 1) + 3(a_2 - 1) + \dots + (n+1)(a_n - 1)] + n^2 + (a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + \dots + (a_n - 1)^2$$

又 $S(A) = 2(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n) + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, 所以

$$S(T_1(A)) - S(A) = 2[n - 2 - 3 - \dots - (n+1)] + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$+n^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n = -n(n+1) + n^2 + n = 0,$$

故 $S(T_1(A)) = S(A)$.

(3) 证明: 设 A 是每项均为非负整数的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

当存在 $1 \leq i < j \leq n$, 使得 $a_i \leq a_j$ 时, 交换数列 A 的第 i 项和第 j 项后得到数列 B . 则

$$S(B) - S(A) = 2(ia_j + ja_i - ia_i - ja_j) = 2(i-j)(a_j - a_i) \leq 0.$$

当存在 $1 \leq m < n$, 使得 $a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_n = 0$ 时, 若记数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 C , 则 $S(C) = S(A)$.

所以 $S(T_2(A)) \leq S(A)$.

从而对于任意给定的数列 A_0 , 由 $A_{k+1} = T_2(T_1(A_k)) (k=0, 1, 2, \cdots)$ 可知

$$S(A_{k+1}) \leq S(T_1(A_k)).$$

又由 (2) 可知 $S(T_1(A_k)) = S(A_k)$, 所以 $S(A_{k+1}) \leq S(A_k)$.

即对于 $k \in \mathbb{N}$, 要么有 $S(A_{k+1}) = S(A_k)$, 要么有 $S(A_{k+1}) \leq S(A_k) - 1$.

因为 $S(A_k)$ 是大于 2 的整数, 所以经过有限步后, 必有

$$S(A_k) = S(A_{k+1}) = S(A_{k+2}) = \cdots.$$

即存在正整数 K , 当 $k \geq K$ 时, $S(A_{k+1}) = S(A_k)$.

【实测数据】 本题难度系数为 0.07, 区分度为 0.56

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): (1) 由条件, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $b_n = \frac{1}{2^n} + 1$.

由于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$,

$$\text{所以 } |b_n - a_n| = \left| \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right| = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

故 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”.

(2) 因为 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$, 且 $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列,

所以 $0 \leq b_1 \leq 2$, $1 \leq b_2 \leq 3$, $3 \leq b_3 \leq 5$, $7 \leq b_4 \leq 9$. 从而 $b_1 \leq b_2 \leq b_3 < b_4$.

若 $b_1 = b_2$, 则 $b_1, b_2 \in [1, 2]$, $b_1 = b_2 < b_3 < b_4$, 所以 M 中元素个数为 3;

若 $b_2 = b_3$, 则 $b_2 = b_3 = 3$, $b_1 < b_2 = b_3 < b_4$, 所以 M 中元素个数为 3;

若 b_1, b_2, b_3 两两不同, 则 M 中元素个数为 4.

综上, m 的值为 3 或 4.

(3) 若 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 则 $|b_n - a_n| \leq 1$, 即 $-1 + a_n \leq b_n \leq a_n + 1$. 所以

$$-a_n - 1 \leq -b_n \leq -a_n + 1,$$

$$-1 + a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} + 1,$$

两式相加可得

$$a_{n+1} - a_n - 2 \leq b_{n+1} - b_n \leq a_{n+1} - a_n + 2,$$

即 $d - 2 \leq b_{n+1} - b_n \leq d + 2$.

若 $d \leq -2$, 则 $b_{n+1} - b_n \leq d + 2 \leq 0 (n = 1, 2, \cdots, 200)$,

所以 $b_2 - b_1, \dots, b_{201} - b_{200}$ 没有正数.

若 $d > 2$, 则 $b_{n+1} - b_n \geq d - 2 > 0 (n = 1, 2, \dots, 200)$,

所以 $b_2 - b_1, \dots, b_{201} - b_{200}$ 全部都是正数.

若 $-2 < d \leq 2$, 取 p 使得 $d + 2p > 0$ 且 $p < 1$, 即 $-\frac{d}{2} < p < 1$, 例如可以取区间 $\left[-\frac{d}{2}, 1\right]$ 的中点:

$$p = \frac{1 - \frac{d}{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{d}{4}.$$

定义 $b_{2k} = a_{2k} + p (k = 1, 2, \dots, 100)$, $b_{2k+1} = a_{2k+1} - p (k = 0, 1, \dots, 100)$, 则 $|b_n - a_n| = p = \frac{1}{2} - \frac{d}{4} < 1$,

所以存在数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”. 另一方面,

$$b_{2k} - b_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k-1} + 2p = d + 2p > 0,$$

所以至少有 100 个数是正数.

综上, d 取值范围是 $(-2, +\infty)$.

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): (1) 解法 1: $c_1 = b_1 - a_1 = 1 - 1 = 0$,

$$c_2 = \max\{b_1 - 2a_1, b_2 - 2a_2\} = \max\{1 - 2 \times 1, 3 - 2 \times 2\} = -1,$$

$$c_3 = \max\{b_1 - 3a_1, b_2 - 3a_2, b_3 - 3a_3\} = \max\{1 - 3 \times 1, 3 - 3 \times 2, 5 - 3 \times 3\} = -2.$$

当 $n \geq 3$ 时,

$$(b_{k+1} - na_{k+1}) - (b_k - na_k) = (b_{k+1} - b_k) - n(a_{k+1} - a_k) = 2 - n < 0,$$

所以 $b_k - na_k$ 关于 $k \in \mathbb{N}^*$ 单调递减.

$$\text{所以 } c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\} = b_1 - a_1n = 1 - n.$$

所以对任意 $n \geq 1$, $c_n = 1 - n$, 于是 $c_{n+1} - c_n = -1$.

所以 $\{c_n\}$ 是等差数列.

$$\text{解法 2: } c_1 = b_1 - a_1 = 1 - 1 = 0,$$

$$c_2 = \max\{b_1 - 2a_1, b_2 - 2a_2\} = \max\{1 - 2 \times 1, 3 - 2 \times 2\} = -1,$$

$$c_3 = \max\{b_1 - 3a_1, b_2 - 3a_2, b_3 - 3a_3\} = \max\{1 - 3 \times 1, 3 - 3 \times 2, 5 - 3 \times 3\} = -2.$$

当 $n \geq 3$ 时, $(b_k - na_k) - (b_1 - na_1) = (k-1)(2-n) \leq 0$,

$$\text{所以 } c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\} = b_1 - a_1n = 1 - n.$$

所以对任意 $n \geq 1$, $c_n = 1 - n$, 于是 $c_{n+1} - c_n = -1$.

所以 $\{c_n\}$ 是等差数列.

(2) 解法 1: 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 , 则

$$b_k - na_k = b_1 + (k-1)d_2 - [a_1 + (k-1)d_1]n = b_1 - a_1n + (d_2 - nd_1)(k-1).$$

$$\text{所以 } c_n = \begin{cases} b_1 - a_1n + (n-1)(d_2 - nd_1), & \text{当 } d_2 > nd_1 \text{ 时,} \\ b_1 - a_1n, & \text{当 } d_2 \leq nd_1 \text{ 时.} \end{cases} \quad \text{当 } d_1 > 0 \text{ 时,}$$

取正整数 $m > \frac{d_2}{d_1}$, 则当 $n \geq m$ 时, $nd_1 > d_2$, 因此 $c_n = b_1 - a_1 n$.

此时, $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ 是等差数列.

当 $d_1 = 0$ 时, 对任意 $n \geq 1$,

$$c_n = b_1 - a_1 n + (n-1) \max\{d_2, 0\} = b_1 - a_1 + (n-1)(\max\{d_2, 0\} - a_1).$$

此时, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ 是等差数列.

当 $d_1 < 0$ 时,

当 $n > \frac{d_2}{d_1}$ 时, 有 $nd_1 < d_2$. 所以

$$\frac{c_n}{n} = \frac{b_1 - a_1 n + (n-1)(d_2 - nd_1)}{n} = n(-d_1) + d_1 - a_1 + d_2 + \frac{b_1 - d_2}{n} \geq n(-d_1) + d_1 - a_1 + d_2 - |b_1 - d_2|.$$

对任意正数 M , 取正整数 $m > \max\left\{\frac{M + |b_1 - d_2| + a_1 - d_1 - d_2}{-d_1}, \frac{d_2}{d_1}\right\}$.

故当 $n \geq m$ 时, $\frac{c_n}{n} > M$.

解法 2: 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 , 定义 $e_k = b_k - na_k = (b_1 - a_1 n) + (d_2 - nd_1)(k-1)$,

则 $e_{k+1} - e_k = d_2 - nd_1$,

所以当 $d_2 - nd_1 > 0$ 时, $c_n = e_n$;

当 $d_2 - nd_1 \leq 0$ 时, $c_n = e_1 = b_1 - a_1 n$.

当 $d_1 > 0$ 时,

取 $m = \left\lfloor \frac{|d_2|}{d_1} \right\rfloor + 1$, 则当 $n > m$ 时, $c_n = b_1 - a_1 n$.

此时, $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ 是等差数列.

当 $d_1 = 0$ 时,

若 $d_2 > 0$, $c_n = e_n = b_1 - a_1 + (d_2 - a_1)(n-1)$;

若 $d_2 \leq 0$, $c_n = e_1 = b_1 - a_1 n$.

两种情况下, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ 均是等差数列.

当 $d_1 < 0$ 时,

$$\frac{c_n}{n} \geq \frac{e_n}{n} = \frac{b_1 - a_1 n + (n-1)(d_2 - nd_1)}{n} \geq -d_1(n-1) - |b_1| - |a_1| - |d_2|.$$

对任意正数 M , 取 $m = \left\lfloor \frac{M + |b_1| + |d_2| + |a_1|}{-d_1} \right\rfloor + 1$, 当 $n \geq m$ 时, $\frac{c_n}{n} > M$.

【实测数据】 本题理科难度为 0.19, 相关系数为 0.56. 阅卷数据如下.

题号	满分	平均值	标准差	得分率	鉴别指数	相关系数
20(1)	6	2.35	1.78	0.39	0.45	—
20(2)	7	0.14	0.68	0.02	0.07	—
20	13	2.49	2.08	0.19	0.25	0.56

本题七组学生的得分率如下:

题号	第 1 组	第 2 组	第 3 组	第 4 组	第 5 组	第 6 组	第 7 组	总体
20	0.07	0.11	0.14	0.16	0.19	0.25	0.41	0.19

本题得分情况如下：

分值	0	1	2	3	4	5	6
人数	4450	9782	4112	3391	7525	728	1530
比率	13.61%	29.91%	12.57%	10.37%	23.01%	2.23%	4.68%
平均分	95.94	117.85	111.14	121.20	127.56	135.12	138.10
分值	7	8	9	10	11	12	13
人数	427	189	185	155	95	113	18
比率	1.31%	0.58%	0.57%	0.47%	0.29%	0.35%	0.06%
平均分	140.76	141.81	143.88	144.82	146.31	146.90	149.61

【易错警示】理解错误.不能准确理解 $c_n = \max \{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的含义.

字母 n, k 书写混淆, 例如, $c_n = \max \{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\}$ 中的第 k 项写成 $b_k - ka_k$.

在求 $b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn$ 的最大值时, 误解为在 n 不同取值下, 比较 $b_n - a_nn$ 的大小.

论证不够严谨. 数学归纳法猜想证明时步骤不完善, 部分答案以直观感知、归纳猜想替代严格证明.

第 (2) 问不能抓住影响 $\{c_n\}$ 的主要矛盾, 即 $\{a_n\}$ 公差的正负进行分类, 出现根据 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 两个等差数列的公差的相对大小进行分类, 发现问题不能解决, 再对公差正负进行分类, 分类较多造成逻辑推理混乱.

第二问分类不能做到不重不漏, 如 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 两个等差数列的公差为零的情况反复讨论或疏漏没有考虑.

不能完备论证存在正整数 m , 当 $n \geq m$ 时, $\frac{c_n}{n} > M$ 或者存在正整数, 使得 $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ 为等差数列, 没有明确求出 $m > \frac{d_2}{d_1}$, 仅从变化趋势予以说明, 即在论证过程中没有给出一个足以保证 $\frac{c_n}{n} > M$ 或 $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ 成立的 m 值.

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): (1) 由已知, 当 $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$.

于是对任意的正整数 n , 总存在正整数 $m = n + 1$, 使得 $S_n = 2^n = a_m$.

所以 $\{a_n\}$ 是“H 数列”.

(2) 方法 1: 由已知, 得 $S_2 = 2a_1 + d = 2 + d$.

因为 $\{a_n\}$ 是“H 数列”, 所以存在正整数 m , 使得 $S_2 = a_m$.

即 $2 + d = 1 + (m - 1)d$, 于是 $(m - 2)d = 1$.

因为 $d < 0$, 所以 $m - 2 < 0$, 于是 $m = 1$. 从而 $d = -1$.

当 $d = -1$ 时, $a_n = 2 - n$, $S_n = \frac{n(3-n)}{2}$ 是小于 2 的整数, $n \in \mathbb{N}^*$.

于是对任意的正整数 n , 总存在正整数 $m = 2 - S_n = \frac{1}{2}n(n-3) + 2$, 使得 $S_n = 2 - m = a_m$.

所以 $\{a_n\}$ 是“H 数列”.

因此 d 的值为 -1 .

方法 2: 由已知, $a_n = 1 + (n-1)d$.

当 $n = 2$ 时, $S_2 = 2a_1 + d = 2 + d$.

因为 $d < 0$, 所以对任意 $n \geq 3$, $a_n < a_2$.

又 $S_2 = 1 + a_2 > a_2$, 所以对任意 $n \geq 2$, $S_2 > a_n$.

因为数列 $\{a_n\}$ 是“H 数列”, 所以 $S_2 = a_1 = 1$, 解得 $d = -1$.

当 $d = -1$ 时, $a_n = 2 - n$, $S_n = \frac{n(3-n)}{2}$ 是小于 2 的整数, $n \in \mathbb{N}^*$.

于是对任意的正整数 n , 总存在正整数 $m = 2 - S_n = \frac{1}{2}n(n-3) + 2$, 使得 $S_n = 2 - m = a_m$.

所以 $\{a_n\}$ 是“H 数列”.

因此 d 的值为 -1 .

方法 3: 由已知, $S_n = n + \frac{n(n-1)}{2}d$, $a_m = 1 + (m-1)d$.

因为数列 $\{a_n\}$ 是“H 数列”, 所以对任意正整数 n , 存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 从而

$$d(n^2 - n + 2 - 2m) = 2(1 - n).$$

令 $n > 1$, 则 $1 - n < 0$, 因为 $d < 0$, 从而 $n^2 - n + 2 - 2m > 0$, 即 $m < \frac{n^2 - n + 2}{2}$.

当 $n = 2$ 时, 有 $0 < m < 2$, 从而 $m = 1$, 则 $d = -1$.

当 $d = -1$ 时, $a_n = 2 - n$, $S_n = \frac{n(3-n)}{2}$ 是小于 2 的整数, $n \in \mathbb{N}^*$.

于是对任意的正整数 n , 总存在正整数 $m = 2 - S_n = \frac{1}{2}n(n-3) + 2$, 使得 $S_n = 2 - m = a_m$,

所以 $\{a_n\}$ 是“H 数列”.

因此 d 的值为 -1 .

(3) 方法 1: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_n = a_1 + (n-1)d = na_1 + (n-1)(d-a_1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

令 $b_n = na_1$, $c_n = (n-1)(d-a_1)$, 则 $a_n = b_n + c_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

下证 $\{b_n\}$ 是“H 数列”.

设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 $T_n = \frac{n(n+1)}{2}a_1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

于是对任意的正整数 n , 总存在正整数 $m = \frac{n(n+1)}{2}$, 使得 $T_n = b_m$.

所以 $\{b_n\}$ 是“H 数列”.

同理可证 $\{c_n\}$ 也是“H 数列”.

所以, 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个“H 数列” $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 成立.

(类似的, $b_n = \frac{(a_1+d)n}{2}$, $c_n = \frac{(d-a_1)(n-2)}{2}$ 也满足题意. 这样的分组方法有无数种)

方法 2: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = An + B (n \in \mathbb{N}^*)$.

令 $b_n = \frac{A-B}{2}n + \frac{B-A}{2}$, $c_n = \frac{A+B}{2}n + \frac{A+B}{2}$, 则 $a_n = b_n + c_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

下证 $\{b_n\}$ 是“H 数列”.

令 $\frac{A-B}{2} = C$, 则 $b_n = C(n-1)$.

设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 $T_n = \frac{n(n-1)}{2} \times C (n \in \mathbb{N}^*)$.

令 $m = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, 则 $m \in \mathbb{N}^*$, 于是对任意的正整数 n , 总存在正整数 $m = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, 使得 $T_n = b_m$.

所以 $\{b_n\}$ 是“H 数列”. 同理可证 $\{c_n\}$ 也是“H 数列”.

所以, 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个“H 数列” $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 成立.

【实测数据】本题阅卷数据如下.

层次	全体	第一层次	第二层次	第三层次
难度	0.17	0.27	0.18	0.05
区分度	0.72	0.40	0.27	0.47

得分比率:

得分	0	1	2	3	4	5	6	7	8
比率	25.85%	2.91%	20.16%	5.27%	34.67%	4.54%	3.09%	1.47%	1.85%
得分	9	10	11	12	13	14	15	16	
比率	0.01%	0.02%	0.01%	0.05%	0.01%	0.03%	0.01%	0.04%	—

【易错警示】(1) 错误: 在由 $S_n = 2^n$ 计算出 $a_n = \begin{cases} 2, & n=1, \\ 2^{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 后, 不能理解题意, 进而得到问题的正确证明.

(2) 错误 1: 直接写出结果 $d = -1$, 缺少必要的逻辑推理.

错误 2: 根据题目意思, 直接翻译, 即由 $\{a_n\}$ 是“H 数列”得到 $S_n = a_m$, 即 $na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = a_1 + (m-1)d$, 进而从这个式子中分离出 d , m 或者 n . 由于对式子的理解和变形不清楚, 导致得不到正确的结果.

新答案 (来源: 241-260 对数单身狗指数找基友与对称化构造.md):

$$(1) f'(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2} \quad (x > 0).$$

若 $a \leq 2$, $x \neq 1$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

若 $a > 2$, $0 < x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

$x > \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

(2)

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - \frac{1}{x_2} - a \ln x_2 - x_1 + \frac{1}{x_1} + a \ln x_1}{x_2 - x_1} = 1 + \frac{1}{x_1 x_2} - a \cdot \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}.$$

由 (1) 过程知 x_1, x_2 是 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两个正根, 因此 $x_1 x_2 = 1$, 设 $0 < x_1 < 1 < x_2$. 进而

$$k = 2 - a \cdot \left(\frac{\ln x_2 - \ln \frac{1}{x_2}}{x_2 - \frac{1}{x_2}} \right) = 2 - a \left(\frac{2 \ln x_2}{x_2 - \frac{1}{x_2}} \right).$$

假设存在 a 使得 $k = 2 - a$ 则 $\frac{2 \ln x_2}{x_2 - \frac{1}{x_2}} = 1$ 也即 $x_2 - \frac{1}{x_2} - 2 \ln x_2 = 0$.

令 $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$, 由 (1) 问知 $g(x)$ 单调递增, $g(x_2) > g(1) = 0$, 矛盾, 因此不存在 a 使得 $k = 2 - a$.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

第一章 数列

总复习题

1. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在实数 C , 对任意大于 2 的正整数 n , 有

$$|a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_2 - a_1| < C$$

则称数列 $\{a_n\}$ 为有限稳定数列, 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和, 证明或反驳:

- (1) 若数列 $\{S_n\}$ 是有限稳定数列, 则数列 $\{a_n\}$ 是有限稳定数列
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq \frac{1}{n}$, 则数列 $\{a_n\}$ 是有限稳定数列

1.

第一章 数列