

第一章 数列

1.3 数列递推式的处理

第一章 数列

1.3 数列递推式的处理

习 题

A 组

- 已知正项数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 前 n 项和为 G_n , 且 $S_n + \frac{1}{2}G_n = 1$, 求 a_4 .
- 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 > 1, S_3 = e^{S_1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 满足
(A) $0 < q \leq 1$ (B) $-1 < q \leq 0$ (C) $q > 1$ (D) $q \leq -1$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + 1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明:
 $a_{2026}(S_{2025} + 1) = 1$
- 【2025 “集英苑测试” (网络联考) 10】(多选) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} \geq a_n, a_n a_{n+1} a_{n+2} = 8^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则
(A) $a_{n+3} = 8a_n$ (B) $a_n > 0$ (C) $a_3^2 a_4 \leq 64$ (D) $a_1 \in [\frac{1}{2}, 2]$
- (多选) 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列说法正确的是
(A) 若 $S_n - a_n \geq 0$, 则 $a_n \geq 0$ (B) 若 $S_n - a_n \geq 0$, 则 $S_n \geq 0$
(C) 若 $S_n + a_n \geq 0$, 则 $S_n \geq a_2$ (D) 若 $S_n + a_n \geq 0$, 则 $S_2 \geq a_4$
- (多选) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+2} = \lambda a_{n+1}, \lambda \in \mathbf{R}$, 若 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{2024} = 2024$, 则 λ 的值可能为
(A) -1 (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) -2
- (多选) 称递推公式 Ψ 是专一的, 若无穷数列 $\{a_n\}$ 由 Ψ 唯一确定, 则下列递推公式中专一的有
(A) $\{(a_n, a_{n+1}) = \{2n-1, 2n+1\}, n \in \mathbb{N}^*\}$ (B) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ (a_{n+2} - a_{n+1})^2 = a_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
(C) $\begin{cases} a_2 = 2, \\ a_{n+1}a_n = a_n + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (D) $\begin{cases} a_1 + a_{n+1} = 2n, \\ a_na_{n+2} = 3n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
- 【2022 北京 15】(多选) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $a_n \cdot S_n = 9(n=1, 2, \dots)$, 下列命题中正确的是
(A) $a_2 < 3$ (B) $\{a_n\}$ 为等比数列
(C) $\{a_n\}$ 为递减数列 (D) $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项

9. 【2007 广东理 21】已知函数 $f(x) = x^2 + x - 1$, α, β 是方程 $f(x) = 0$ 的两个根 ($\alpha > \beta$), $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$).

(1) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $a_n > \alpha$;

(2) 记 $b_n = \ln \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

10. 【2006 天津文 21】已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = x_2 = 1$, 并且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \frac{x_n}{x_{n-1}}$ (λ 为非零参数, $n = 2, 3, 4, \dots$).

(1) 若 x_1, x_3, x_5 成等比数列, 求参数 λ 的值;

(2) 设 $0 < \lambda < 1$, 常数 $k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k \geq 3$, 证明: $\frac{x_{1+k}}{x_1} + \frac{x_{2+k}}{x_2} + \dots + \frac{x_{n+k}}{x_n} < \frac{\lambda^k}{1 - \lambda^k}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

11. 【2019 海南新高考适应性测试 22】已知数列 $\{a_n\}$ 的首项不为零, 其前 n 项和为 S_n , 满足 $2\sqrt{S_n} = a_n + c$.

(1) 证明: $c \leq 1$;

(2) 若 $c = 0$, 证明: $S_n \geq (n+1)^2$;

(3) 是否存在常数 c , 使得 $\{a_n\}$ 是等比数列? 若存在, 求出 c 的所有可能值, 否则请说明理由.

12. 【2026 成都二诊 19】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 是否存在常数 A, ω ($A > 0, 0 < \omega < 2\pi$), 使得 $a_n = A \cos \frac{\omega}{2^n}$? 若存在, 求 A 和 ω 的值, 否则请说明理由;

(2) 求 $[2S_1 + 1] + [2S_2 + 1] + \dots + [2S_n + 1]$.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.

8. 新答案（来源：1.29 数列综合.md）：

【解题思路】如下表.

选项	判断	解析
	正确	$a_1S_1=a_1^2=9$ ，则 $a_1=3$. 而 $a_2S_2=a_2(a_1+a_2)=9$ ，即 $a_2^2=9-a_1a_2<9$ ，所以 $a_2<3$.
	错误	反证法. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $a_n=3q^{n-1}$ ，其中 q 是公比， $S_n=\frac{3(1-q^n)}{1-q}$. 故 $a_nS_n=9$ 可以
	正确	$a_{n+1}-a_n=\frac{9}{S_{n+1}}-\frac{9}{S_n}=\frac{9(S_n-S_{n+1})}{S_nS_{n+1}}=-\frac{9a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}<0$.
	正确	反证法. 若 $\{a_n\}$ 每项都大于等于 $\frac{1}{100}$ ，则 $S_n\geq\frac{n}{100}$ ，于是 $9=a_nS_n\geq\frac{1}{100}\cdot\frac{n}{100}$ 对任意正整数 n

本题有错得 0 分，少选 1 个得 4 分，少选 2 个得 3 分.

【实测数据】本题平均分 2.94 分，标准差 1.28，得分率 0.588，鉴别指数 0.31.

得分	0	3	4	5
比率(%)	13.42	57.49	23.96	5.12

G_1 至 G_{10} 组得分率如下：

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}
得分率	0.37	0.45	0.50	0.54	0.57	0.61	0.64	0.67	0.72	0.80

- 9.
- 10.
- 11.
- 12.

第一章 数列

1.3 数列递推式的处理

B 组

1. 【2023 北京 10】

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则

- (A) $a_1 = 3 \quad \{a_n\} \quad M \leq 0 \quad a_n > M$
 (B) $a_1 = 5 \quad \{a_n\} \quad M \leq 6 \quad a_n < M$
 (C) $a_1 = 7 \quad \{a_n\} \quad M > 6 \quad a_n > M$
 (D) $a_1 = 9 \quad \{a_n\} \quad M > 0 \quad a_n < M$

2. 【2012 四川 16 改编】(多选) 设 a 为正整数, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = a, x_{n+1} = \left\lceil \frac{x_n + \left\lceil \frac{a}{x_n} \right\rceil}{2} \right\rceil (n \in \mathbb{N}^*)$.

则下列命题正确的是

- (A) 当 $a = 5$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 的前 3 项依次为 5, 3, 2
 (B) 对数列 $\{x_n\}$, 都存在正整数 k , 当 $n \geq k$ 时总有 $x_n = x_k$
 (C) 当 $n \geq 1$ 时, $x_n > \sqrt{a} - 1$
 (D) 对某个正整数 k , 若 $x_{k+1} \geq x_k$, 则 $x_k = \lceil \sqrt{a} \rceil$

3. 【2020 上海春 16】对于数列 $\{a_n\}$, 有 $a_{n+3} = a_n$, 且 $a_n a_{n+3} - a_{n+2} a_{n+1} = c$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$ 且常数 $c \in \mathbb{R}$, 下列选项中不可能的是

- (A) $a_1 = 1, c = 1$ (B) $a_1 = 2, c = 2$ (C) $a_1 = -1, c = 4$ (D) $a_2 = 2, c = 0$

4. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_2 \neq 0, |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $\frac{a_{10}}{a_9}$ 的最大可能值为? 最小可能值为?

5. 【2008 大纲卷 I 理 22】设函数 $f(x) = x - x \ln x$. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_1 < 1, a_{n+1} = f(a_n)$.

- (1) 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 是增函数;
 (2) 证明: $a_n < a_{n+1} < 1$;
 (3) 设 $b \in (a_1, 1)$, 整数 $k \geq \frac{a_1 - b}{a_1 \ln b}$. 证明: $a_{k+1} > b$.

1. **B.** 因为 $a_{n+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3$, 当 $a_1 < 6$ 时, $a_n - 6 < 0$ 恒成立; 当 $a_1 > 6$ 时, $a_n - 6 > 0$ 恒成立; 故只要 $a_1 \neq 6$, 那么 $a_n \neq 6$, 此时取以 2 为底的对数可得

$$\log_2 |a_{n+1} - 6| = 3 \log_2 |a_n - 6| - 2, \iff \log_2 |a_{n+1} - 6| - 1 = 3(\log_2 |a_n - 6| - 1).$$

因此 $\{\log_2 |a_{n+1} - 6| - 1\}$ 是公比为 3 的等比数列, 从而 $\log_2 |a_n - 6| - 1 = (\log_2 |a_1 - 6| - 1) \cdot 3^{n-1}$, 即

$$|a_n - 6| = 2 \times 2^{(\log_2 |a_1 - 6| - 1) \cdot 3^{n-1}} = 2 \times \left(\frac{1}{2|a_1 - 6|} \right)^{3^{n-1}}.$$

当 $a_1 = 3$ 时, $a_n = 6 - 2 \times \left(\frac{3}{2} \right)^{3^{n-1}}$, 故 $\{a_n\}$ 为递减数列, 但是 $a_n \rightarrow -\infty (n \rightarrow \infty)$, $\{a_n\}$ 没有下界, 故不存在常数 $M \leq 0$ 使得 $a_n > M$ 恒成立, 故 A 错误.

当 $a_1 = 5$ 时, $a_n = 6 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{3^{n-1}}$, 故 $\{a_n\}$ 为递增数列, 并且对常数 $M = 6$, 有 $a_n < 6$ 恒成立, 故 B 正确.

当 $a_1 = 7$ 时, $a_n = 6 + 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{3^{n-1}}$, 故 $\{a_n\}$ 为递减数列, 但是 $a_n \rightarrow 6 (n \rightarrow \infty)$, 故不存在大于 6 的常数 M 使得 $a_n > M$ 恒成立, 故 C 错误.

当 $a_1 = 9$ 时, $a_n = 6 + 2 \times \left(\frac{3}{2} \right)^{3^{n-1}}$, 故 $\{a_n\}$ 为递增数列, 但是 $a_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, $\{a_n\}$ 没有上界, 故不存在常数 $M > 0$ 使得 $a_n < M$ 恒成立, 故 D 错误.

【实测数据】 本题难度 0.52, 标准差 2.00, 区分度 0.46. 得分率较低, 说明考生的逻辑推理素养水平不乐观.

2. **ACD.** 根据取整函数的定义, $[x] \leq x < [x] + 1$. (*)

因为 $x_1 = a = 5$, $x_2 = \left[\frac{5 + \left[\frac{5}{5} \right]}{2} \right] = 3$, $x_3 = \left[\frac{3 + \left[\frac{5}{3} \right]}{2} \right] = 2$, 故 正确.

设 $a = 3$, 则 $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. 从第 2 项开始, $\{x_n\}$ 是以 2 为周期的数列, 所以此时不可能从某项开始就为常数列, 故 错误.

当 $n = 1$ 时显然正确. 当 $n \geq 2$ 时, 由 (*) 得

$$x_{n+1} = \left[\frac{x_n + \left[\frac{a}{x_n} \right]}{2} \right] \geq \left[\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \right] \geq \left[\frac{2\sqrt{a}}{2} \right] > \sqrt{a} - 1.$$

故 正确.

由 (*), $x_{k+1} \leq \frac{x_k + \left[\frac{a}{x_k} \right]}{2} \leq \frac{x_k + \frac{a}{x_k}}{2}$, 由于 $x_{k+1} \geq x_k$, 则 $x_k \leq \frac{x_k + \frac{a}{x_k}}{2}$, 化简得 $x_k^2 \leq a$, 因此 $x_k \leq \sqrt{a}$.

由 $x_k > \sqrt{a} - 1$, 根据 (*), 位于区间 $(\sqrt{a} - 1, \sqrt{a}]$ 的正整数只有 $[\sqrt{a}]$. 所以 正确.

3.

4.

5.

第一章 数列

1.3 数列递推式的处理

第一章 数列

1.3 数列递推式的处理