

第一章 数列

1.2 数列的求和与放缩

第一章 数列

1.2 数列的求和与放缩

习 题

A 组

1. 解答下述问题:

- (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 8, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$. 证明 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 为等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, \frac{1}{S_n} = \frac{2}{b_n} - \frac{2}{b_{n+1}}$, 其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (3) 【2011 安徽理 18 文 20 (1)】在数 1 和 100 之间插入 n 个实数, 使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列, 将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n , 再令 $a_n = \lg T_n, n \geq 1$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (4) 【2006 江西文 22 (1)】已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 3$, 且 $\frac{2a_{n+1} - a_n}{2a_n - a_{n+1}} = a_n a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

2. 【2019 天津理 19】已知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 3n+1, b_n = 3 \times 2^n$. 数列 $\{c_n\}$ 满足

$$c_1 = 1, c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1}, \\ b_k, & n = 2^k, \end{cases} \text{ 其中 } k \in \mathbb{N}^*$$

求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式与 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$.

3. 【2015 安徽理 18】证明:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdots \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \geq \frac{1}{4n}$$

4. 【2006 安徽 21】数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , 已知 $a_1 = \frac{1}{2}, S_n = n^2 a_n - n(n-1), n = 1, 2, \cdots$.

(1) 写出 S_n 与 S_{n-1} 的递推关系式, 并求 S_n 关于 n 的表达式;

(2) 设 $f_n(x) = \frac{S_n}{n} x^{n+1}, b_n = f'_n(p), (p \in \mathbb{R})$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前项和 T_n .

5. 【2006 江西文 22】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{2^{n+2}}{3} (n \in \mathbb{N}^*)$. 设

$$S_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, T_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}$$

求 $S_n + T_n$, 并确定最小正整数 n , 使 $S_n + T_n$ 为整数.

6. 【2009 广东理 21】已知曲线 $C_n: x^2 - 2nx + y^2 = 0 (n = 1, 2, \cdots)$. 从点 $P(-1, 0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 $k_n (k_n > 0)$ 的切线 l_n , 切点为 $P_n(x_n, y_n)$. 证明:

$$x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdots x_{2n-1} < \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} < \sqrt{2} \sin \frac{x_n}{y_n}$$

7. 【2007 浙江理 21】已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_{2k-1}, a_{2k} 是关于 x 的方程 $x^2 - (3k+2^k)x + 3k \cdot 2^k = 0$ 的两个根, 且 $a_{2k-1} \leq a_{2k}$ ($k=1, 2, 3, \dots$)。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} ;

(2) 记 $f(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{|\sin n|}{\sin n} + 3 \right)$, $T_n = \frac{(-1)^{f(2)}}{a_1 a_2} + \frac{(-1)^{f(3)}}{a_3 a_4} + \frac{(-1)^{f(4)}}{a_5 a_6} + \dots + \frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1} a_{2n}}$

求证: $\frac{1}{6} \leq T_n \leq \frac{5}{24}$ 。

8. 【2026 “神算杯” 模 (A 卷) (网络联考) 18】已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n \cdot 2^n$, 记 $S_n(1) = \sum_{i=2}^n a_i$ 并规定 $S_1(1) = 0$, 且对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$, $S_n(k+1) = \sum_{i=1}^n S_i(k) - a_{k+1}$ 。

(1) 求 $S_n(1), S_n(2)$;

(2) 设常数 $t \in \mathbb{N}^*$, 证明: 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^t S_n(i) > -4^t$ 。

9. 【2008 福建理 22】已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$. 记 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 上的最小值为 b_n , 令 $a_n = \ln(1+n) - b_n$ 。

(1) 如果对一切 n , 不等式 $\sqrt{a_n} < \sqrt{a_{n+2}} - \frac{c}{\sqrt{a_{n+2}}}$ 恒成立, 求实数 c 的取值范围;

(2) 求证:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} + \dots + \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2n}} < \sqrt{2a_n + 1} - 1$$

10. 【2009 天津理 22】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$), 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ($q > 1$). 设 $S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$, $T_n = a_1 b_1 - a_2 b_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 若 $b_1 = 1$, 证明:

$$(1-q)S_n - (1+q)T_n = \frac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

(2) 若正整数 n 满足 $2 \leq n \leq q$, 设 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 和 $l_1, l_2, \dots, l_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的两个不同的排列, $c_1 = a_{k_1} b_1 + a_{k_2} b_2 + \dots + a_{k_n} b_n$, $c_2 = a_{l_1} b_1 + a_{l_2} b_2 + \dots + a_{l_n} b_n$, 证明 $c_1 \neq c_2$ 。

11. 【2010 天津理 22】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, 且对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ 成等差数列, 其公差为 d_k 。

(1) 若 $d_k = 2k$, 证明 $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ 成等比数列 ($k \in \mathbb{N}^*$);

(2) 若对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ 成等比数列, 其公比为 q_k :

i. 设 $q_1 \neq 1$. 证明 $\left\{ \frac{1}{q_k - 1} \right\}$ 是等差数列;

ii. 若 $a_2 = 2$, 证明 $\frac{3}{2} < 2n - \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{a_k} \leq 2$ ($n \geq 2$)。

1.

2.

3.

4.

5.

6. 新答案 (来源: 321-340 已有结论放缩与数列不等式.md):

$$(1) \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{2n+1}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \sqrt{2} \sin \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

新答案 (来源: 321-340 已有结论放缩与数列不等式.md):

$$(1) \text{ 令 } C_n \text{ 圆心为 } D_n(n, 0), \text{ 依题意, } P_n P \perp P_n D_n, \text{ 进而 } \frac{y_n}{x_n+1} \cdot \frac{y_n}{x_n-n} = -1.$$

2.

3. 新答案 (来源: 321-340 已有结论放缩与数列不等式.md):

$$(1) \text{ 问的背景是点火公式, 形如 } \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \text{ 的分式, 我们可以利用 } (2n-1)(2n+1) < 4n^2 \text{ 来进行放缩:}$$

新答案 (来源: 321-340 已有结论放缩与数列不等式.md):

$$(1) \text{ 由 (1) 问可知 } b_n = f(n) = \ln(1+n) - n, \quad a_n = n.$$

新答案 (来源: 321-340 已有结论放缩与数列不等式.md):

$$2. \quad (1) f'(x) = -\frac{x}{1+x} \quad (x > -1).$$

3.

4.

第一章 数列

1.2 数列的求和与放缩

B 组

1. 求和:

$$\sum_{k=1}^n k^2 2^k$$

2. 【2011 安徽理 18 文 20】求和

$$\sum_{k=1}^n \tan(k+2) \cdot \tan(k+3)$$

3. 【2020 天津 19】已知数列 $\{c_n\}$ 的通项公式为

$$c_n = \begin{cases} \frac{(3n-2) \cdot 2^{n-1}}{n(n+2)} & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n-1}{2^n} & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

求 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和。

4. 【2025 天津 19】已知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 3n - 1, b_n = 2^n$, 设

$$T_n = \{p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \cdots + p_n a_n b_n \mid p_1, p_2, \cdots, p_n \in \{0, 1\}\}$$

(1) 求证: 对任意实数 $t \in T_n$, 均有 $t < a_{n+1} b_{n+1}$;

(2) 求 T_n 中所有元素之和。

5. 【2011 天津理 20】已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足: $b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0, b_n = \frac{3 + (-1)^n}{2}, n \in \mathbb{N}^*$, 且 $a_1 = 2, a_2 = 4$ 。

(1) 求 a_3, a_4, a_5 ;

(2) 设 $c_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\{c_n\}$ 是等比数列;

(3) 设 $S_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}, k \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} < \frac{7}{6} (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

第一章 数列

1.2 数列的求和与放缩

第一章 数列

1.2 数列的求和与放缩