

第一章 数列

1.1 数列的基本概念

1.1.1 等差数列与等比数列

第一章 数列

1.1 数列的基本概念

习 题

A 组

- 【2016 浙江学考 14】若 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, 则下列数列可能不是等比数列的是
 (A) $\{a_{2n}\}$ (B) $\{a_{2n-1}\}$ (C) $\{a_n a_{n+1}\}$ (D) $\{a_n + a_{n+1}\}$
- 【2014 辽宁 8】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若数列 $\{2^{a_1 a_n}\}$ 是严格递减数列, 则
 (A) $d < 0$ (B) $d > 0$ (C) $a_1 d < 0$ (D) $a_1 d > 0$
- 【2020 全国 II 卷理 4】北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所, 分上、中、下三层。上层中心有一块圆形石板 (称为天心石), 环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环, 向外每环依次增加 9 块。下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块, 向外每环依次也增加 9 块。已知每层环数相同, 且下层比中层多 729 块, 则三层共有多少块扇面形石板 (不含天心石)?
- 【2015 福建理 8 文 16】若 a, b 是函数 $f(x) = x^2 - px + q (p, q > 0)$ 的两个不同的零点, 且 $a, b, -2$ 这三个数经过适当排序后可构成等差数列与等比数列, 求 $p + q$ 。
- 【2012 上海理 18】设 $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{25}, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 求 $S_1, S_2, \dots, S_{100}$ 中正数的个数。
- 【2005 湖南文 5】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n + 1}$, 求 a_{20} 。
- 【2017 上海 15】已知 a, b, c 为实常数, 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n = an^2 + bn + c, n \in \mathbb{N}^*$, 则“存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $x_{100+k}, x_{200+k}, x_{300+k}$ 成等差数列”的一个必要条件是
 (A) $a \geq 0$ (B) $b \leq 0$ (C) $c = 0$ (D) $a - 2b + c = 0$
- 【2023 全国乙卷 10】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 集合 $S = \{\cos a_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ 。若 $d = \frac{2\pi}{3}, S = \{a, b\}$, 求 ab ;
- 【2010 安徽理 10】设 $\{a_n\}$ 是任意等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 对任意正整数 n , 下列命题中正确的是
 (A) $S_n + S_{3n} = S_{2n}$ (B) $S_{2n}(S_{2n} - S_n) = S_{3n}(S_{3n} - S_n)$
 (C) $S_{2n}^2 = S_n S_{3n}$ (D) $S_{2n}(S_{2n} - S_n) = S_n(S_{3n} - S_n)$
- 【2021 “数海漫游一横”(网络联考) 10】已知实数 x, y, z 满足 $0 < x < y < z < \pi$, 且 $\sin x, \sin y, \sin z$ 可以按照某个顺序排成等差数列, 则
 (A) $\sin x$ 不可能是等差中项 (B) $\sin y$ 不可能是等差中项
 (C) $\sin z$ 不可能是等差中项 (D) $\sin x, \sin y, \sin z$ 都可能是等差中项

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 17n - 4, b_n = -2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n$, 问数列 $\{a_n b_n\}$ 是否有最大项和最小项。
12. 【2025 成都一诊 8】等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 3$, 求 a_1 。
13. 【2007 湖北理 8】已知等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n , 且 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{7n+45}{n+3}$, 求所有使得 $\frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Z}$ 的正整数 n 。
14. 【2013 福建理 9】已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 记 $b_n = a_{m(n-1)+1} + a_{m(n-1)+2} + \cdots + a_{m(n-1)+m}, c_n = a_{m(n-1)+1} \cdot a_{m(n-1)+2} \cdots a_{m(n-1)+m}, (m, n \in \mathbb{N}^*)$, 则下述命题中正确的是
- (A) 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 公差为 q^m (B) 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{2m}
 (C) 数列 $\{c_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{m^2} (D) 数列 $\{c_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{m^m}
15. 【2004 湖北理 8】设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = a \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] - b \left[2 - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$ ($n = 1, 2, \cdots$), 其中 a, b 是非零常数. 则存在数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 使得
- (A) $a_n = x_n + y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数列, $\{y_n\}$ 为等比数列
 (B) $a_n = x_n + y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等差数列
 (C) $a_n = x_n \cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数列, $\{y_n\}$ 为等比数列
 (D) $a_n = x_n \cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等比数列
16. 【2002 上海 16】设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 < S_6, S_6 = S_7 > S_8$, 则下列结论错误的是
- (A) $d < 0$ (B) $a_7 = 0$
 (C) $S_9 > S_5$ (D) S_6 和 S_7 均为 S_n 的最大值
17. 【2011 上海理 18】设 $\{a_n\}$ 是正项无穷数列, $A_i = a_i a_{i+1} (i = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{A_n\}$ 为等比数列的充要条件是
- (A) $\{a_n\}$ 是等比数列
 (B) $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 或 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 是等比数列
 (C) $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 和 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 均是等比数列
 (D) $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 和 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 均是等比数列, 且公比相同
18. (多选) 设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, q 为 $\{a_n\}$ 的公比, 则
- (A) $\{a_n^2\}$ 为等比数列 (B) $\{qS_n\}$ 为等比数列
 (C) 若 $q = -1$, 则存在 $m \in \mathbb{N}^*$ 使得 $S_m = 0$ (D) 若存在 $m \in \mathbb{N}^*$ 使得 $S_m = 0$, 则 $q = -1$
19. 【2025 “漫游数海” 回归课本联赛 10】(多选) 已知 a, b, c 均为正整数, 关于 x 的一元二次方程 $(a-b)x^2 + (a-c)x + (b-c) = 0$ 仅有一个实根 $x = x_0$, 则
- (A) a, b, c 成等差数列 (B) a, b, c 成等比数列

(C) x_0^a, x_0^b, x_0^c 成等比数列(D) $a^{x_0}, b^{x_0}, c^{x_0}$ 成等差数列

20. 【2004 上海文 12】(多选) 若干个能唯一确定一个数列的量称为该数列的“基本量”. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 下列 $\{a_n\}$ 的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是

(A) S_1 与 S_2 (B) a_2 与 S_3 (C) a_1 与 a_n (D) q 与 a_n .

21. 【2016 上海 11】无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意正整数 $n, S_n \in \{2, 3\}$, 求 k 的最大值.

22. 【2021 新高考 I 卷 16】规格为 20×12 的长方形纸对折 1 次一共可以得到 $10 \times 12, 20 \times 6$ 这两种规格的图形, 它们的面积之和 $S_1 = 240$, 对折 2 次共可以得到 $5 \times 12, 10 \times 6, 20 \times 3$ 这三种规格的图形, 它们的面积之和 $S_2 = 180 \cdots$ 求 $\sum_{k=1}^n S_k$.

23. 【2011 浙江文 17】若数列 $\left\{n(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ 中的最大项是第 k 项, 求 k .

24. 互不相等的正数 a, b, c 构成等比数列, 若 $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ 成等差数列, 求其公差.

25. 对下列题设, 判断命题 p 是命题 q 的充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件, 还是既不充分也不必要条件.

(1) 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 命题 $p: q > 0$; 命题 $q: \{a_n\}$ 递增.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列: 命题 $p: \text{对任意正整数 } n, a_{n+2} > a_n$; 命题 $q: \{a_n\}$ 递增.

(3) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad n \geq 3$: 命题 $p: a_1, a_2, \dots, a_n$ 成等比数列; 命题 $q: (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)^2$

(4) 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n : 命题 $p: a_1 a_2 > a_2^2$; 命题 $q: S_n$ 既无最大值也无最小值

(5) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列: 命题 $p: a_{2024} = 1$; 命题 $q: \text{对任意正整数 } n, a_1 a_2 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_{4047-n}$

(6) 已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列 命题 $p: \{a_n\}$ 存在最小项; 命题 $q: \{a_n + a_{n+1}\}$ 存在最小项

(7) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列: 命题 $p: a_5, a_7, a_8$ 构成公比不为 1 的等比数列; 命题 $q: a_9 = 0$

(8) 已知正整数 i, j , 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和: 命题 $p: a_{2i+1} < 0$; 命题 $q: S_{2j+1} < 0$

(9) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均不为 0, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和: 命题 $p: "a_4 a_6 < 0"$; 命题 $q: \text{对任意正整数 } n, \frac{S_5}{a_5} \leq \frac{S_n}{a_n}$

26. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n - 1, & a_n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

(1) 若 $a_1 = 6$, 求 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2024}$;

(2) 若 $a_6 = 5$, 求 a_1 的所有可能的取值;

(3) 若 $a_1 \in \mathbb{N}^*$, 是否一定存在 $m \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_m = 1$? 试说明理由.

27. 等差数列 $\{a_n\}$ 与等比数列 $\{b_n\}$ 均为无穷正项实数列, 且满足 $a_1 = b_1, a_2 = b_2$, 证明:

$$(a). a_{n+1} \geq a_n \quad (b). a_n \leq b_n$$

28. 【2005 湖南理 20】自然状态下的鱼类是一种可再生的资源, 为持续利用这一资源, 需从宏观上考察其再生能力及捕捞强度对鱼群总量的影响. 用 x_n 表示某鱼群在第 n 年年初时的总量, $n \in \mathbb{N}^*$, 且 $x_1 > 0$, 不考虑其他因素, 设在第 n 年内鱼群的繁殖量及被捕捞量都与 x_n 成正比, 死亡量与 x_n^2 成正比, 这些比例系数依次为正常数 a, b, c .

(1) 求 x_n 与 x_{n+1} 的递推关系式;

(2) 猜测: 当且仅当 x_1, a, b, c 满足什么条件时, 每年年初鱼群的总量保持不变 (不要求证明);

(3) 设 $a = 2, c = 1$, 为保证对一切 $x_1 \in (0, 2)$ 的值, 都有 $x_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$, 求捕捞强度 b 的最大允许值.

29. 【2007 安徽文 21】某国采用养老储备金制度. 公民在就业的第一年就交纳养老储备金, 数目为 a_1 , 以后每年交纳的数目均比上一年增加 d ($d > 0$), 因此, 历年所交纳的储备金数目 $a_1, a_2, \dots$ 是一个公差为 d 的等差数列, 与此同时, 国家给予优惠的计息政策, 不仅采用固定利率, 而且计算复利. 这就是说, 如果固定年利率为 r ($r > 0$), 那么, 在第 n 年末, 第一年所交纳的储备金就变为 $a_1(1+r)^{n-1}$, 第二年所交纳的储备金就变为 $a_2(1+r)^{n-2}, \dots$. 以 T_n 表示到第 n 年末所累计的储备金总额.

(1) 写出 T_n 与 T_{n-1} ($n \geq 2$) 的递推关系式;

(2) 求证: $T_n = A_n + B_n$, 其中 $\{A_n\}$ 是一个等比数列, $\{B_n\}$ 是一个等差数列.

30. 【2014 湖南卷理 20】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, |a_{n+1} - a_n| = p, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1, 2a_2, 3a_3$ 成等差数列, 求 p ;

(2) 若 $p = \frac{1}{2}$, 且 $\{a_{2n-1}\}$ 是递增数列, $\{a_{2n}\}$ 是递减数列, $a_2 > a_1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

31. 【1995 全国卷理 25】设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是其前 n 项和. 是否存在常数 $c > 0$, 使得 $\frac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$ 对任意正整数 n 成立?

32. 【2004 江苏 20】设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 求所有的 $\{a_n\}$, 使得对于一切正整数 k 都有 $S_{k^2} = (S_k)^2$ 成立.

33. 【2001 京蒙皖理 20】在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 使这 $n+2$ 个数成等比数列; 又在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, 使这 $n+2$ 个数成等差数列. 记 $A_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$. 当 $n \geq 7$ 时, 比较 A_n 与 B_n 的大小.

34. 【2023 新高考 I 卷 20】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $d > 1$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和. 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

35. 设数列 $\{a_n\}$ 各项均为实数, 且当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = |a_n| - a_{n-1}$.

已知: 若存在 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a_k = a_{k+T}$ 且 $a_{k+1} = a_{k+1+T}$ ($T \in \mathbb{N}^*$), 则 $\{a_n\}$ 是周期为 T 的数列. (注: 这个结论其实可用归纳法两行证完) 证明:

(1) 存在大于 1 的正整数 m , 使得 $a_m \leq 0$;

(2) 存在正整数 m , 使得 $a_m \leq 0$ 且 $a_{m+1} \leq 0$;

(3) 对任意正整数 n , 都有 $a_{n+9} = a_n$ 。

36. 【2006 江苏 21】设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足: 对任意正整数 n , $b_n = a_n - a_{n+2}$, $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2}$, 证明: $\{a_n\}$ 为等差数列的充要条件是: $\{c_n\}$ 为等差数列且对任意正整数 n , $b_n \leq b_{n+1}$ 。
37. 【2005 全国 III 卷理 20】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d \neq 0$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项. 已知数列 $a_1, a_3, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}, \dots$ 成等比数列, 求数列 $\{k_n\}$ 的通项 k_n 。
38. 【2024 广东二模 18】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且对任意正整数 k , $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ 成公差为 $2k$ 的等差数列。是否存在 x , 使得对任意正整数 k , $a_{2k} + x, a_{2k+1} + x, a_{2k+2} + x$ 成等比数列?
39. 【2001 上海 22】已知 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, S_n 为它的前 n 项和。是否存在自然数 c, k , 使得 $\frac{S_{k+1} - c}{S_k - c} > 2$ 恒成立?

1.

2.

3.

4.

5.

6. 新答案 (来源: 1.26 数列的概念.md): B

【解题思路】思路 1: 由 $a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n + 1}$ 及 $a_1 = 0$, 求得 $a_2 = -\sqrt{3}$, $a_3 = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$, $a_4 = 0$.

猜想 $a_{n+3} = a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 亦即 $a_{3n+r} = a_r$ ($r = 1, 2$). 故 $a_{20} = a_{3 \times 6 + 2} = a_2 = -\sqrt{3}$.

思路 2: 令 $a_n = \tan b_n$, 则

$$\tan b_{n+1} = \frac{\tan b_n - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \cdot \tan b_n} = \tan \left(b_n - \frac{\pi}{3} \right)$$

所以 $b_{n+1} = b_n - \frac{\pi}{3} + k_n \pi$ ($k_n \in \mathbb{Z}$).

因为 $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, 所以 $b_n = -\frac{(n-1)\pi}{3} + m_n \pi$ ($m_n \in \mathbb{Z}$), 其中 $m_n = k_1 + \cdots + k_{n-1}$ (如果 $n = 1$, 则 $m_1 = 0$). 这样, $a_{20} = \tan b_{20} = -\tan \frac{19\pi}{3} = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

【实测数据】本题文科难度 0.666

新答案 (来源: 1.27 等差数列.md): B

【解题思路】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{2\pi}{3}$, 即 $a_{n+3k} = a_n + 3k \times \frac{2\pi}{3} = a_n + 2k\pi$, $\cos a_{n+3k} = \cos a_n$, 这样集合

$$S = \{\cos a_n | n \in \mathbb{N}^*\} = \{\cos a_n | n = 1, 2, 3\} = \{a, b\}$$

因此 a_1, a_2, a_3 中有两个数的余弦值相等.

思路 1: 不妨设 $\cos a_1 = \cos a_2$, 满足 $y = \cos x = \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$ 的 y 只有 $y = \frac{1}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)$ 或 $y = -\frac{1}{2} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right)$, 两种情况对应第三个数的余弦值分别为 $\cos \pi = -1$ 或 $\cos 2\pi = 1$, 因此乘积 $ab = \frac{1}{2} \times (-1)$ 或 $ab = \left(-\frac{1}{2} \right) \times 1$, 均有 $ab = -\frac{1}{2}$, 故正确选项为 B.

思路 2: 将等差数列的项 a_n 对应为单位圆周上的点 $(\cos a_n, \sin a_n)$, 由于 $\{a_n\}$ 的公差是 $\frac{2\pi}{3}$, 即 a_{n+3k} 与 a_n 对应同一个点, 这样圆周上最终有三个点, 这三个点构成等边三角形, 该三角形的外接圆半径为 1, 因此三角形中心 (即原点) 到三边的距离都是 $\frac{1}{2}$. 由题意知三角形有两个顶点的横坐标相同, 即有一条边平行于 y 轴, 这样三角形的三个顶点为

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (-1, 0)$$

或者

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (1, 0)$$

均有 $ab = -\frac{1}{2}$.

思路 3: 不妨设 $\cos a_1 = \cos a_2$, 于是 $x = \frac{a_1 + a_2}{2}$ 是曲线 $y = \cos x$ 的对称轴, 即 $\frac{a_1 + a_2}{2} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

代入 $a_2 = a_1 + \frac{2\pi}{3}$, 得 $a_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, $a_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, $a_3 = \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

当 k 为奇数时, $\cos a_1 = \cos a_2 = -\frac{1}{2}$, $\cos a_3 = 1$, $ab = -\frac{1}{2}$;

当 k 为偶数时, $\cos a_1 = \cos a_2 = \frac{1}{2}$, $\cos a_3 = -1$, $ab = -\frac{1}{2}$.

【实测数据】(河南) 本题阅卷数据如下.

题号	A	B	C	D	难度	区分度
理 10	10.63%	58.99%	15.79%	14.52%	0.59	0.42

新答案 (来源: 1.28 等比数列.md): D

【解题思路】当 n 为偶数且 $\{a_n\}$ 的公比为 -1 时, $X = Y = Z = 0$, 此时四条式子都恒成立.

当 n 为奇数或 $\{a_n\}$ 的公比不为 -1 时, $X, Y - X, Z - Y$ 成等比数列, 则 $(Y - X)^2 = X(Z - Y)$, 化简得 $Y^2 - XY + X^2 = XZ$, 即 $Y(Y - X) = X(Z - X)$.

新答案 (来源: 1.29 数列综合.md): C

【解题思路】由于 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列,

所以 $b_n = a_{m(n-1)+1} (1 + q + \cdots + q^{m-1})$,

$$\text{则 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{m(n+1)} (1 + q + \cdots + q^{m-1})}{a_{m(n-1)+1} (1 + q + \cdots + q^{m-1})} = \frac{a_{mn+1}}{a_{m(n-1)+1}} = q^m,$$

故 $\{b_n\}$ 是公比为 q^m 的等比数列, A、B 选项错误.

同理, $c_n = a_{m(n-1)+1} (1 \cdot q \cdots q^{m-1})$.

$$\text{则 } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{mn+1} (1 \cdot q \cdots q^{m-1})}{a_{m(n-1)+1} (1 \cdot q \cdots q^{m-1})} = (q^m)^m = q^{m^2},$$

故 $\{c_n\}$ 是公比为 q^{m^2} 的等比数列, 故 C 选项正确, D 选项错误.

新答案 (来源: 1.28 等比数列.md): D

【解题思路】由矩形面积公式易得 $A_i = a_i a_{i+1}$. 先考虑 $\{A_n\}$ 为等比数列的必要条件, 若 $\{A_n\}$ 是等比数列, 则 $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = q$ (q 为非零常数), 即 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = q$, 当 n 为奇数时, 得 $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 是等比数列, 公比为 q ; 当 n 为偶数时, 得 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 是等比数

列, 公比为 q . 因此, 选项 D 是 $\{A_n\}$ 为等比数列的必要条件. 再考虑该必要条件是否充分, 若 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = q$ 且 $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = q$ (q 为非零常数), 即 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = q$, 又 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}} = q$, 即 $\frac{A_{n+1}}{A_n} = q$, 所以 $\{A_n\}$ 为等比数列. 因此, 选项 D 又是 $\{A_n\}$ 为等比数列的充分条件.

【实测数据】本题难度为 0.69, 区分度为 0.32. 各层次考生答题分布如下:

考生层次	选 A	选 B	选 C	选 D	未选	得分率
第一层次	2.00	0.53	8.74	88.73	0.00	0.89
第二层次	6.01	1.93	17.66	74.36	0.04	0.75
第三层次	10.33	3.35	22.91	63.30	0.11	0.64
第四层次	12.57	7.52	30.89	48.80	0.22	0.49
总体	7.67	3.27	19.90	69.07	0.09	0.69

新答案 (来源: 1.26 数列的概念.md): 4

【解题思路】令 $a_n = n(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n$, 则

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+5)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - n(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\frac{2}{3}(n+1)(n+5) - n(n+4) \right] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{10-n}{3}$$

所以当 $n \leq 3$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0$, 当 $n \geq 4$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$,

从而 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 且 $a_4 > a_5 > a_6 > \dots$, 故最大项是第 4 项.

7.

8. $-\frac{1}{2}$. 将等差数列的项 a_n 对应为单位圆周上的点 $(\cos a_n, \sin a_n)$, 由于公差是 $\frac{2\pi}{3}$, 即 a_{n+3k} 与 a_n 对应同一个点, 这样圆周上最终有三个点, 这三个点构成等边三角形, 该三角形的外接圆半径为 1, 因此三角形中心 (即原点) 到三边的距离都是 $\frac{1}{2}$. 由题意知三角形有两个顶点的横坐标相同, 即有一条边平行于 y 轴, 这样三角形的三个顶点为 $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), (-1, 0) \right\}$ 或者 $\left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), (1, 0) \right\}$, 均有 $ab = -\frac{1}{2}$.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15. 新答案 (来源: 3.2 性质的证明 (2) 数列.md): 必要性. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d_1 的等差数列, 则

$$b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} - a_{n+3}) - (a_n - a_{n+2}) = (a_{n+1} - a_n) - (a_{n+3} - a_{n+2}) = d_1 - d_1 = 0,$$

所以 $b_n \leq b_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 成立.

又

$$\begin{aligned}c_{n+1} - c_n &= (a_{n+1} - a_n) + 2(a_{n+2} - a_{n+1}) + 3(a_{n+3} - a_{n+2}) \\&= d_1 + 2d_1 + 3d_1 = 6d_1 (\text{常数}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),\end{aligned}$$

所以数列 $\{c_n\}$ 为等差数列.

充分性: 设数列 $\{c_n\}$ 是公差为 d_2 的等差数列, 且 $b_n \leq b_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$.

证法一: 因为 $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2}$,

所以 $c_{n+2} = a_{n+2} + 2a_{n+3} + 3a_{n+4}$.

$$- \text{得 } c_n - c_{n+2} = (a_n - a_{n+2}) + 2(a_{n+1} - a_{n+3}) + 3(a_{n+2} - a_{n+4}) = b_n + 2b_{n+1} + 3b_{n+2}.$$

因为 $c_n - c_{n+2} = (c_n - c_{n+1}) + (c_{n+1} - c_{n+2}) = -2d_2$,

所以 $b_n + 2b_{n+1} + 3b_{n+2} = -2d_2$,

从而有 $b_{n+1} + 2b_{n+2} + 3b_{n+3} = -2d_2$.

$$- \text{得 } (b_{n+1} - b_n) + 2(b_{n+2} - b_{n+1}) + 3(b_{n+3} - b_{n+2}) = 0.$$

因为 $b_{n+1} - b_n \geq 0$, $b_{n+2} - b_{n+1} \geq 0$, $b_{n+3} - b_{n+2} \geq 0$,

所以由 $b_{n+1} - b_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$.

由此不妨设 $b_n = d_3 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $a_n - a_{n+2} = d_3$ (常数).

由此 $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} = 4a_n + 2a_{n+1} - 3d_3$,

从而 $c_{n+1} = 4a_{n+1} + 2a_{n+2} - 3d_3 = 4a_{n+1} + 2a_n - 5d_3$.

两式相减得 $c_{n+1} - c_n = 2(a_{n+1} - a_n) - 2d_3$,

因此 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(c_{n+1} - c_n) + d_3 = \frac{1}{2}d_2 + d_3$ (常数) $(n = 1, 2, 3, \dots)$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

证法二: 令 $A_n = a_{n+1} - a_n$, 由 $b_n \leq b_{n+1}$ 知 $a_n - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_{n+3}$,

从而 $a_{n+1} - a_n \geq a_{n+3} - a_{n+2}$, 即 $A_n \geq A_{n+2} (n = 1, 2, 3, \dots)$.

由 $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2}$, $c_{n+1} = a_{n+1} + 2a_{n+2} + 3a_{n+3}$ 得

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} - a_n) + 2(a_{n+2} - a_{n+1}) + 3(a_{n+3} - a_{n+2})$$

即

$$A_n + 2A_{n+1} + 3A_{n+2} = d_2.$$

由此得 $A_{n+2} + 2A_{n+3} + 3A_{n+4} = d_2$.

$$- \text{得 } (A_n - A_{n+2}) + 2(A_{n+1} - A_{n+3}) + 3(A_{n+2} - A_{n+4}) = 0.$$

$$\text{因为 } A_n - A_{n+2} \geq 0, A_{n+1} - A_{n+3} \geq 0, A_{n+2} - A_{n+4} \geq 0,$$

$$\text{所以由 } \text{得 } A_n - A_{n+2} = 0 (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$\text{于是由 } \text{得 } 4A_n + 2A_{n+1} = A_n + 2A_{n+1} + 3A_{n+2} = d_2,$$

$$\text{从而 } 2A_n + 4A_{n+1} = 4A_{n+1} + 2A_{n+2} = d_2.$$

$$\text{由 } \text{和 } \text{得 } 4A_n + 2A_{n+1} = 2A_n + 4A_{n+1}, \text{ 故 } A_n = A_{n+1},$$

$$\text{即 } a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots).$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23. 4. 令 $a_n = n(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n$, 则

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)(n+5)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - n(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\frac{2}{3}(n+1)(n+5) - n(n+4) \right] \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{10-n^2}{3}. \end{aligned}$$

所以当 $n \leq 3$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0$, 当 $n \geq 4$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$,

从而 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 且 $a_4 > a_5 > a_6 > \dots$, 故最大项是第 4 项。

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

第一章 数列

1.1 数列的基本概念

习题组 II

- 【2024 北京 15 改编】(多选) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是不同的无穷数列, 且都不是常数列, 记集合 $M = \{k \mid a_k = b_k, k \in \mathbb{N}^*\}$, 下列命题中正确的是
 - 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等差数列, 则 M 中最多有 1 个元素
 - 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等比数列, 则 M 中最多有 2 个元素
 - 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 则 M 中最多有 3 个元素
 - 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, $\{b_n\}$ 为递减数列, 则 M 中最多有 1 个元素
- 【2009 江苏 14】设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $|q| > 1$, 令 $b_n = a_n + 1$, 若数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53, -23, 19, 37, 82\}$ 中, 求 $6q$.
- 【2011 江苏 13】设 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_7$, 其中 a_1, a_3, a_5, a_7 成公比为 q 的等比数列, a_2, a_4, a_6 成公差为 1 的等差数列, 求 q 的最小值.
- 【2026 新高考 I 卷 14】设实数 q 满足: 存在数列 $\{a_n\}$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n} = n^2 + n$, 且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列, 求 q 的最大值.
- 【2012 湖南 19】已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 $A(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B(n) = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}$, $C(n) = a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+2}$, $n = 1, 2, \cdots$.
 - 若 $a_1 = 1, a_2 = 5$, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 三个数 $A(n), B(n), C(n)$ 组成等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列的充要条件是: 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 三个数 $A(n), B(n), C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列.
- 【2021 “集英苑测试” (网络联考) 8】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $d(d \geq 1)$ 的等差数列, 则
 - $a_1 \leq a_2$
 - $a_1 \geq a_2$
 - $a_1 a_2 \leq a_3 a_4$
 - $a_1 a_2 \geq a_3 a_4$
- (多选) 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n}$, T_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 记 $T_1, T_2, \cdots$ 构成的无穷数列为 $\{T_n\}$, 则
 - $\{T_n\}$ 中的每一项都为 $\{a_n\}$ 中的项
 - 对任意 $m \geq 3, m \in \mathbb{N}^*$, $\{T_n\}$ 中存在 m 项, 这 m 项构成等差数列
 - 对任意 $m \geq 3, m \in \mathbb{N}^*$, $\{a_n\}$ 中存在 m 项, 这 m 项构成等比数列
 - 对任意 $m \geq 3, m \in \mathbb{N}^*$, $\{a_n\}$ 中存在 m 项, 这 m 项构成等差数列

8. 【2025 广州一模 19】已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。

- (1) 若 $a_1 = 1, S_n = a_{n+1}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 是否存在等差数列 $\{a_n\}$, 使得 $S_n < a_{n+1}$?
- (3) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 q , 且满足 $S_n < a_{n+1}$, 求 q 的取值范围。

9. 若存在常数 $\lambda (\lambda > 0)$, 使得 $\lambda a_n \geq S_n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(\lambda)$. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(\lambda)$, 其前 n 项和为 S_n

- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 $\lambda = 4$, 求 q 的值;
- (2) 求 λ 的最小值.

1. **ACD.** 设 $a_n = a + nd$, $b_n = b + nc$. 则 $k \in M$ 当且仅当 $a + kd = b + kc$, 即 $a - b = k(c - d)$. 这是个一次方程, 这个关于 k 的方程只可能有 0 个或 1 个正整数解. 特别地, 对 $a_n = 2n - 1$, $b_n = 3n - 2$, 此时 $M = \{1\}$. 故 正确.

考虑 $a_n = 2^n$, $b_n = (-2)^n$, 则 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是等比数列, 但是 $M = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{\text{全体偶数}\}$, 故 错误.

设 $a_n = a + nd$, $b_n = q^n$ (不妨设 $b_1 = q$). 则 $k \in M$ 当且仅当 $a + kd = q^k$.

设 $f(x) = |q|^x - dx - a$, $g(x) = |q|^x + dx + a$.

(i) 若 $q > 0$, 则 $a + kd = q^k$ 当且仅当 $f(k) = 0$. 求导可知 $f(x)$ 最多只有两段单调区间, 从而最多只有 2 个零点, 即 M 的元素个数不超过 2.

(ii) 若 $q < 0$, 则当 k 为奇数时, $a + kd = q^k$ 等价于 $a + kd = -|q|^k$, 等价于 $g(k) = 0$.

当 k 为偶数时, $a + kd = q^k$ 等价于 $f(k) = 0$.

注意到, 通过讨论 q, d 的取值可发现, $f(x)$ 和 $g(x)$ 必有一个在 $\mathbb{R}$ 上为单调函数, 另一个在 $\mathbb{R}$ 上有两段单调区间. 于是, $f(x), g(x)$ 的零点个数之和不超过 3.

特别地, 取 $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, 则 $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_3 = -\frac{1}{8}$, $b_4 = \frac{1}{16}$. 再取 $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{16}(n-1)$, 则 $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{8}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, 所以 $M = \{1, 3, 4\}$. 所以 正确.

设 $c_n = a_n - b_n$, 则 $\{c_n\}$ 是递增数列, $M = \{n \mid c_n = 0\}$. 取一个连续函数 $f(x)$ 满足 $f(n) = c_n$, 使得 $f(x)$ 是单调递增函数 (构造方法: 连接 (n, c_n) 和 $(n+1, c_{n+1})$ 的折线). 由零点存在定理, $f(x)$ 最多只有一个零点, M 最多只有 1 个元素. 故 正确.

2.

3.

4. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. i. 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $a_1 + a_2 + \dots + a_{3n} = n^2 + n$ 等价于相邻三项之和是给定的:

$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = (n+1)n - n(n-1) = 2n$. ii. $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列意味着必有连续的 6 项 $a_{3m-2}, a_{3m-1}, a_{3m}, a_{3m+1}, a_{3m+2}, a_{3m+3}$ 是公比为 q 的等比数列. 其中 $a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m} = 2m$, $a_{3m+1} + a_{3m+2} + a_{3m+3} = 2m+2$,

所以 $(2m+2) = q^3 \cdot 2m$, 即 $(q^3 - 1)m = 1$. 又 m 是正整数, 所以 $q^3 - 1 = \frac{1}{m}$, $q = \sqrt[3]{\frac{m+1}{m}}$.

接下来从大到小讨论 q 的所有可能取值.

(1) 如果 $m = 1$, 则 $q = \sqrt[3]{2}$, 我们尝试构造满足 的数列 $\{a_n\}$,

所以 $a_1 + a_2 + a_3 = 2$, 即 $a_1(1 + q + q^2) = 2$, 即 $a_1(1 - q^3) = 2(1 - q)$, 整理得 $a_1 = 2(q - 1)$.

考虑数列 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2q^n - 2q^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, 9$. 则

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 2(q^6 - 1) = 6 = 2^2 + 2,$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 2(q^9 - 1) = 14 \neq 3^2 + 3. \text{ 矛盾.}$$

(2) 如果 $m = 2$, 则 $q = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$,

所以 $a_4 + a_5 + a_6 = 4$, 即 $a_4(1 + q + q^2) = 4$, 即 $a_4(1 - q^3) = 4(1 - q)$, 整理得 $a_4 = 8(q - 1)$ 。

考虑数列 $a_n = a_4 q^{n-4} = 8(q^{n-3} - q^{n-4})$, $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 。

则 $a_4 + a_5 + a_6 = 8(q^3 - 1) = 4$,

$a_7 + a_8 + a_9 = 8(q^6 - q^3) = 8\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right) = 6$ 。

接下来随意构造即可, 取 $a_3 = 8(1 - q^{-1})$, $a_2 = 8(q^{-1} - q^{-2})$, a_1 使得 $a_1 + a_2 + a_3 = 2$;

取 $a_{10} = 8(q^7 - q^6)$, a_{11}, a_{12} 使得 $a_{10} + a_{11} + a_{12} = 8$ 即可。

综上, q 的最大值是 $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 。

注: 条件 ii 可以加强为有连续的 10 项成等比数列。

5.

6.

7.

8.

9.

第一章 数列

1.1 数列的基本概念

第一章 数列

1.1 数列的基本概念