

第一章 解析几何

1.8 参数方程

在平面上建立直角坐标系后,就可以用一个有序数对 (x, y) 来表示平面上的一个点。当平面上的点按一定规则运动时就形成一条平面曲线。描述点的运动规则就是曲线上点 M 的两个坐标 x 和 y 之间的一个制约关系,它可以表示为变量 x, y 的一个二元方程 $F(x, y) = 0$,称此二元方程为曲线的方程,它是直角坐标方程。借助曲线的方程可以用代数方法分析曲线的某些重要性质,讨论曲线的各种应用。

常见的许多曲线往往是物体在实际运动中的轨迹。这时运动的规律经常不是直接反映为物体位置的坐标 x 和 y 之间的相互关系,而表现为物体位置随时间改变的规律,也就是位置坐标 x 和 y 对时间 t 的依赖关系。

实例 1 一抛射体在重力作用下的运动轨迹是抛物线,要想建立它的直角坐标方程,就要找到运动中物体所处位置坐标 x 与 y 的直接关系。由于抛射体运动在这方面的特征不很明显,因此直接建立轨道曲线的直角坐标方程不方便。但是物体的运动直接和时间相关联,以时间 t 为中介,运用物理学知识分别建立直角坐标 x, y 与 t 的关系式,就唯一确定了物体的运动轨迹,也就间接建立了 x 和 y 的关系。这就是本章要介绍的曲线的参数方程。

顺便指出,参数方程也是函数的重要表达形式。在高等数学深入研究函数的过程中,参数方程是常用的函数形式。在本章的学习中,要了解常见曲线的参数方程与相应的图形,逐步掌握用向量知识推导某些轨迹曲线的参数方程的基本方法。

1.8.1 曲线的参数方程

先看一个实例。

实例 1 大炮发射炮弹后,炮弹在空中形成一条轨道曲线。为了简单起见,给出下面的假条件:

- (1) 炮弹在空中的运动在一个铅直平面上运动,即轨道曲线为一平面曲线;
- (2) 炮弹在运动中仅受重力作用,不计空气阻力,也不受其他环境的影响;
- (3) 炮弹的初速度为 v_0 ,发射角(仰角)为 α 。

在轨道曲线所在的平面上建立直角坐标系。以火炮所在位置(炮口)为原点,地平线(水平方向)为 x 轴, y 轴竖直向上,设时间为 t ,记开始发射时, $t = 0$ 。

设时刻 t 时炮弹所在位置为点 $M(x, y)$,它是轨道曲线上的动点。下面分别讨论坐标 x, y 与时间 t 之间的关系。

在 x 轴、 y 轴方向上分解炮弹的速度向量 $\mathbf{v}_0$,可得 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$,其中 $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y$ 分别表示速度向量 $\mathbf{v}_0$ 在 x 轴、 y 轴上的分向量。记 v_0, v_x, v_y 分别为向量 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y$ 的大小,则

$$v_x = v_0 \cos \alpha, v_y = v_0 \sin \alpha$$

由物理学知识可知,炮弹在水平方向作匀速直线运动,在竖直方向作竖直上抛运动,因此得

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

其中 v_0, α 为常数, g 是重力加速度 (一般 $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$).

() 式是描述炮弹轨道曲线的参数方程, 其中 t 称为参数. 用方程 () 分析炮弹的运动十分方便. 比如可以随时算出炮弹所在位置 $M(x, y)$. 用计算机适时输出坐标 x 和 y , 它就是炮弹飞行的水平距离和高度. 火炮指挥仪的基本数学模型就是方程 (). 当然, 实际情况还需考虑空气阻力和风力、气温等各种环境条件及其他因素, 这样就在方程 () 的基础上形成了复杂的弹道方程组.

参数方程 () 可以通过消去参数 t , 变换为直角坐标方程. 把 $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ 代入 y 的表达式, 得

$$y = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

由此可见, 轨道曲线为一抛物线.

在 (2) 中, 令 $y = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. 由此可知, 炮弹的水平射程为 $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. 把方程 (2) 变形为

$$y - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \right)^2$$

易知, 当 $x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ 时, $y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. 此时, 炮弹处于轨道曲线的最高点 (x_0, y_0) , 即炮弹的最大高度为 $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

由抛射体运动的分析过程可以推广到一般的质点运动问题.

设质点的运动规律为

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

其中 $f(t), g(t)$ 为时间 t 的函数. 对任一时刻 t , 由上式得到一对数 x 和 y , 点 $M(x, y)$ 就是质点在时刻 t 的位置. 质点在每一时刻的位置都在运动曲线上. 反之, 运动曲线上的每一点必定是质点在某一时刻 t 按上式得出的位置 $M(x, y)$.

根据上述运动规律和曲线的关系, 下面给出一般曲线的参数方程的概念.

定义 设在平面上取定了一个直角坐标系 xOy , 把坐标 x, y 表示为第三个变量 t 的函数

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

如果对于 t 的每一个值 ($a \leq t \leq b$), $()$ 所确定的点 $M(x, y)$ 都在一条曲线上; 而这条曲线上的任一点 $M(x, y)$, 都可由 t 的某个值通过 $()$ 式得到, 则称 $()$ 式为该曲线的参数方程, 其中变量 t 称为参数。

一条曲线是用直角坐标方程表示还是用参数方程表示, 要根据具体情况确定。

1.8.2 直线的参数方程

本节用几种思路讨论直线的参数方程: 一是把直线看作质点的匀速直线运动曲线; 二是从直线的普通方程转化为参数方程; 三是用“向量方法”推导直线的参数方程。

设质点从点 $M_0(x_0, y_0)$ 出发, 沿着与 x 轴成 α 角的方向作匀速直线运动, 其速率为 v_0 。把速度向量在 x 轴、 y 轴上分解, 其大小为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

如图所示, 设 $M(x, y)$ 为 t 时刻质点所在位置, 则有

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t = x_0 + tv_0 \cos \alpha \\ y = y_0 + v_y t = y_0 + tv_0 \sin \alpha \end{cases} \quad t \geq 0.$$

当 t 变化时, 动点 $M(x, y)$ 的轨迹是一条过点 M_0 , 倾斜角为 α 的射线。若不顾及 t 的物理意义, 允许 t 取负值, 则上式是直线的一种参数方程形式, t 为参数。

直线的参数方程可以从它的普通方程转化而来。设直线的点斜式方程为

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

其中 $k = \tan \alpha$, α 为直线的倾斜角。代入上式, 得

$$y - y_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}(x - x_0), \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

即

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha}$$

记上式的比值为 t , 整理后得

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$$

这是直线的参数方程，其中参数 t 有明显的几何意义。如图所示，在直角三角形 M_0AM 中， $|M_0A| = |x - x_0|$ ， $|MA| = |y - y_0|$ ， $|M_0M| = |t|$ ，即 $|t|$ 表示直线上任一点 M 到定点 M_0 的距离。

下面给出用“向量法”推导直线参数方程的过程。

设直线过点 $M_0(x_0, y_0)$ ，且与平面向量 $\mathbf{a} = (l, m)$ 平行（或称直线与 $\mathbf{a}$ 共线，其中 l, m 都不为 0）。在直线上任取一点 $M(x, y)$ ，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\mathbf{a}$ 共线，即 $\overrightarrow{M_0M} // \mathbf{a}$ 。由两向量共线的充分必要条件以及 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ ，可得

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

记上式的比值为 t ，整理后得

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

这是直线的参数方程的一般形式。

上述平面直线的参数方程的推导方法可以推广到空间直线，而且空间直线参数方程的形式与 () 类似。

1.8.3 圆的参数方程

质点以匀角速度 ω 作圆周运动，圆心在原点，半径为 R 。下面建立运动的轨迹方程。

如图所示，记 t 为时间，运动开始时 $t = 0$ ，质点位于点 A 处，在时刻 t ，质点位于点 $M(x, y)$ 处。由物理学知识， $\theta = \omega t$ ， θ 为 Ox 轴正向到向量 $\overrightarrow{OM}$ 所成的角，因此得

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t \\ y = R \sin \omega t \end{cases} \quad t \geqslant 0$$

这是圆周运动的轨迹方程， t 为参数，也可以写成

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

θ 为参数，若限制 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ ，则 () 式为圆的参数方程。

若圆心在点 $M_0(x_0, y_0)$ ，半径为 R ，则圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \theta \\ y = y_0 + R \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

1.8.4 圆锥曲线的参数方程

椭圆的参数方程 设椭圆的普通方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

可得椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

若椭圆的中心不在原点, 而在点 $M_0(x_0, y_0)$, 相应的椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

抛物线的参数方程 设抛物线的普通方程为

$$y^2 = 2px$$

可得抛物线的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2p}t^2 \\ y = t \end{cases}$$

通常令 $t = \frac{1}{2p}y$, 则 $x = \frac{y^2}{2p} = 2pt^2$, 此时抛物线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

双曲线的参数方程 设双曲线的普通方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

可得双曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases}$$

1.8.5 特殊曲线的参数方程

在生产实践和科学研究中, 常会见到某些装置的轮廓线及一些物体在运动中的轨迹是一些特殊的曲线, 这些曲线大多是用参数方程表示的。

摆线的参数方程 设想你的自行车外胎上粘了一点白色的油漆, 当你骑车向前直行时, 这个油漆白点就在空中描绘出一条曲线, 这条曲线就是摆线, 也称为旋轮线。用数学语言描述如下:

一圆周沿一直线作无滑动滚动时, 圆周上的一定点 M 的轨迹称为摆线。

下面建立摆线的参数方程。

如图所示, 设半径为 a 的圆在 x 轴上滚动, 开始时定点 M 在原点 O 处。取圆滚动时转过的角度 t (以弧度为单位) 为参数。当圆滚过 t 角时, 圆心为点 B , 圆与 x 轴的切点为 A , 定点 M 的位置如图所示, $\angle ABM = t$ 。

由于圆在滚动时不滑动, 因此线段 OA 的长和圆弧 $\widehat{AM}$ 的长相等, 它们的长度都等于 at , 从而得 B 点的坐标为 (at, a) , 向量 $\overrightarrow{OB} = (at, a)$, 向量 $\vec{MB} = (a \sin t, a \cos t)$, $\vec{BM} = (-a \sin t, -a \cos t)$, 因此

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \vec{BM} = (at - a \sin t, a - a \cos t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$$

设动点 M 的坐标为 (x, y) , 则向量 $\vec{OM} = (x, y)$, 所以

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

这就是摆线的参数方程。当点 M 的位置与图 () 不同时, 可导出同样的表达式。

如果从方程 () 中消去参数 t , 可得摆线的直角坐标方程, 此时方程中含有反三角函数, 不便于讨论。因此, 直接用参数方程讨论摆线的性质。

摆线的图形如图 () 所示, 图中取 $a = 2$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 我们称这段曲线为摆线的一拱。按照摆线生成的过程, 这一拱相当于圆向前滚动一周。圆再向前滚动一周, 相对于 t 由 2π 变到 4π 。此时, 点 M 描出摆线的第二拱, 第二拱的形状和前一拱完全相同。圆继续向前滚动, 可得第三拱、第四拱……

在方程 () 中, 任取两个参数值 t 和 $t + 2\pi$, 相应点的纵坐标相等, 横坐标相差 $2\pi a$ 。因此, 把相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的摆线的一拱向右平移 $2\pi a$, 刚好与相应于 $2\pi \leq t \leq 4\pi$ 的那一拱重合。依次类推, 摆线的任一拱都可以由相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的那一拱经左右平移得到。这就是摆线的周期性。

证明: 摆线的每一拱都是左右对称的。

摆线有些重要性质。例如, 质点在重力作用下, 从固定点 A 滑动到固定点 B , 沿什么形状的轨道曲线所用的时间最短呢? 是沿直线 AB 滑动用时最少吗? 答案是: 上述的最速降线是一条翻转的摆线 (如图 () 所示)。

普通单摆的摆动周期与摆幅不是绝对无关的。为了使摆动周期与摆幅完全无关, 可以在摆动平面内做两个摆线形状的挡板 (如图 2-20 的 $\widehat{OA}$ 和 $\widehat{OB}$), 此时单摆的运动轨迹也是一条摆线。如果把本节开始提出的问题略作变动, 则得出不同类型的曲线。

圆的渐开线的参数方程 把一条没有弹性的细绳绕在一个固定不动的圆盘的侧面上, 把绳拉紧逐渐展开, 绳的外端点随之移动, 且绳的拉直部分始终和圆相切。绳的端点移动的轨迹就是一条圆的渐开线, 固定的圆称为渐开线的基圆。如图 () 所示。

下面按照给出的渐开线的直观定义用初等方法推导圆的渐开线的参数方程。

设基圆的半径为 a , 以圆心为原点 O , 绳端点的初始位置为 M_0 , 向量 $\overrightarrow{OM_0}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立坐标系 (如图 () 所示)。设渐开线上的任意点 $M(x, y)$, 绳拉直时和圆的切点为 A , 故 $OA \perp AM$ 。按渐开线定义, 弧 $\widehat{AM_0}$ 的长和线段 AM 的长相等, 记 $\overrightarrow{OA}$ 和 x 轴正方向所成的角为 t (以弧度为单位), 则

$$|AM| = \widehat{AM_0} = at$$

作 AB 垂直于 x 轴, 过 M 点作 AB 的垂线, 得

$$\overrightarrow{OA} = (a \cos t, a \sin t).$$

由几何知识知 $\angle MAB = t$, 而且

$$\overrightarrow{AM} = (at \sin t, -at \cos t)$$

得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t))$$

又 $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, 因此有

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

这就是圆的渐开线的参数方程。

星形线的参数方程 一轴承的剖面如图 () 所示, 小圆表示滚珠, 半径为 r , 大圆表示轴瓦, 半径为 $a = 4r$. 设大圆固定, 而小圆在大圆内无滑动地滚动。小圆上的一定点 M 在运动中的轨迹为一条曲线, 称为星形线。下面推导它的参数方程。

取大圆圆心为坐标原点。设小圆的定点 M 开始时位于点 A 处, x 轴正方向为向量 $\overrightarrow{OA}$ 的方向。小圆滚动 α 角后, 圆心在 C 点, 与大圆的切点为 B , 小圆上的定点 M 的位置如图 () 所示。

因为是无滑动的滚动, 所以 $\widehat{BM} = \widehat{AB}$. 记 $\theta = \angle AOB$, 由 $\widehat{BM} = r\alpha$, $\widehat{AB} = a\theta = 4r\theta$ 得

$$r\alpha = 4r\theta.$$

由此知

$$\alpha = 4\theta$$

作 CD 平行于 x 轴, 则 $\angle BCD = \theta$, 得

$$\angle DCM = \angle BCM - \angle BCD = \alpha - \theta = 3\theta.$$

由此知 CM 与 x 轴正项形成的任意角为 -3θ . 由

$$|OC| = a - r = 3r$$

用向量的坐标表达式, 得

$$\overrightarrow{OC} = (3r \cos \theta, 3r \sin \theta), \overrightarrow{CM} = (r \cos(-3\theta), r \sin(-3\theta)) = (r \cos 3\theta, -r \sin 3\theta).$$

因此有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = (3r \cos \theta + r \cos 3\theta, 3r \sin \theta - r \sin 3\theta)$$

用三角函数的三倍角公式

$$\overrightarrow{OM} = (4r \cos^3 \theta, 4r \sin^3 \theta) = (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta).$$

另一方面

$$\overrightarrow{OM} = (x, y).$$

因此得星形线的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

星形线对应的曲线如图 () 所示, 其关于 x 轴、 y 轴都对称。

方程 () 易于化为直角坐标方程

由

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^2 \theta \\ y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \sin^2 \theta \end{cases}$$

二式两端分别相加, 得

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

至此已讨论了三种常见曲线 (摆线、圆的渐开线、星形线) 的参数方程, 它们的推导过程类似:

- (1) 建立合适的坐标系;
- (2) 取某个角度 (以弧度为单位) 为参数;
- (3) 用三角知识写出相关向量的坐标表达式;
- (4) 用向量运算得到 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式, 就得到了曲线的参数方程。

内摆线的参数方程 把上面描述的星形线的生成过程推广,就可得到新的曲线。设半径为 r 的动圆在半径为 a ($a > r$) 的定圆内无滑动地滚动,则动圆圆上一定点 M 将描绘出一条曲线,称为内摆线。特别地,当 $a = 4r$ 时,它就是星形线。推导内摆线的参数方程的过程和星形线类似。

仍然用图 (), 注意到

$$\alpha = \frac{a}{r}\theta, \quad |OC| = a - r$$

CM 和 x 轴正向形成的角度为 $-\left(\frac{a}{r} - 1\right)\theta$, 得

$$\overrightarrow{OC} = ((a - r) \cos \theta, (a - r) \sin \theta)$$

$$\overrightarrow{CM} = \left(r \cos \left(\frac{a}{r} - 1\right)\theta, -r \sin \left(\frac{a}{r} - 1\right)\theta\right)$$

得

$$\overrightarrow{OM} = \left((a - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{a}{r} - 1\right)\theta, (a - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{a}{r} - 1\right)\theta\right)$$

故内摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (a - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{a}{r} - 1\right)\theta \\ y = (a - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{a}{r} - 1\right)\theta \end{cases}$$

令 $\frac{r}{a} = k$ ($0 < k < 1$), 得

$$\begin{cases} x = a(1 - k) \cos \theta + ka \cos \left(\frac{1}{k} - 1\right)\theta \\ y = a(1 - k) \sin \theta - ka \sin \left(\frac{1}{k} - 1\right)\theta \end{cases}$$

当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = 0 \end{cases}$$

这是大圆的一条直径 (如图 () 所示), 即当大圆半径恰为小圆半径的 2 倍时, 动圆上一定点的轨迹是一直线, 这相当于把旋转运动转换为直线运动。这一原理可用于机械设计。

动轨迹就是上面讨论过的内摆线; 如果 M 点在动圆内, 则 M 点的运动轨迹称为短幅内摆线; 如果 M 点在动圆外, 则 M 点的运动轨迹称为长幅内摆线。这两种曲线统称为变幅内摆线。推导它的参数方程的过程和内摆线类似, 此处不做详述。

变幅摆线的参数方程 一个圆沿着一条直线作无滑动的滚动时, 求圆平面圆内一定点 M 的轨迹方程。 M 点的运动轨迹称为短幅摆线, 建立它的参数方程的过程和摆线类似。

如图 2-29 所示, 设圆半径为 a , 点 M 到圆心的距离为 d ($d < a$)。开始时定点位于 M_0 , 滚动 t 角后处于图中位置, 此时 $AC = at$. 得

$$|OA| = at, \quad \vec{OB} = (at, a).$$

又 $\alpha = \frac{3}{2}\pi - t$, 得

$$\begin{aligned} \vec{BM} &= (d \cos \alpha, d \sin \alpha) \\ &= \left(d \cos \left(\frac{3}{2}\pi - t \right), d \sin \left(\frac{3}{2}\pi - t \right) \right) \\ &= (-d \sin t, -d \cos t). \end{aligned}$$

由此得

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM} = (at - d \sin t, a - d \cos t).$$

又 $\vec{OM} = (x, y)$, 得短幅摆线的参数方程

$$\begin{cases} x = at - d \sin t \\ y = a - d \cos t \end{cases}$$

此方程与摆线的参数方程类似。

心形线和外摆线的参数方程 设有三个半径相同的圆, 其中一个圆固定不动, 另一个圆绕定圆无滑动地滚动。在动圆的圆周上有一定点 M , 求滚动过程中点 M 的轨迹方程。 M 点的轨迹为心形线, 下面推导心形线的方程。

设圆半径为 a , 取定圆的圆心为坐标原点, 开始时两圆相切于 A 点, 射线 OA 为 x 轴的正半轴, 建立坐标系 (如图 () 所示)。当滚动角度 θ (以弧度为单位) 后, 两圆切于 B 点, 动圆圆心为 C , 定点 M 的位置如图所示。记射线 CM 与 x 轴正向形成的任意角为 α (图中为负值)。由于无滑动, 得 $\widehat{AB} = \widehat{BM}$, 因为两圆的半径相等, 所以 $\angle AOB = \theta$, 从而得 $\alpha = -(\pi - 2\theta)$ 。向量 $\vec{CM}$ 的坐标表达式为

$$\vec{CM} = (a \cos \alpha, a \sin \alpha) = (-a \cos 2\theta, -a \sin 2\theta)$$

又 $\vec{OC} = (2a \cos \theta, 2a \sin \theta)$, 得

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = (2a \cos \theta - a \cos 2\theta, 2a \sin \theta - a \sin 2\theta)$$

即

$$\begin{cases} x = 2a \cos \theta - a \cos 2\theta \\ y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta \end{cases}$$

用倍角公式变形为

$$x = 2a \cos \theta - a(2 \cos^2 \theta - 1),$$

而 $x - a = 2a \cos \theta - 2a \cos^2 \theta = 2a \cos \theta(1 - \cos \theta)$, $y = 2a \sin \theta(1 - \cos \theta)$, 有

$$(x - a)^2 + y^2 = 4a^2(1 - \cos \theta)^2$$

即

$$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = 2a(1 - \cos \theta)$$

若以 A 为极点, x 轴为极轴, 则 $|AM| = \rho$. 由于极点 A 不是直角坐标系的原点, 因此要用坐标变换公式 (), 由此可得

$$\rho = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

由几何知识易知 $\angle MAx = \theta$, 从而把方程化为极坐标形式

$$\rho = 2a(1 - \cos \theta)$$

这就是心形线的极坐标方程, 图形如图 () 所示。

在一般情况下, 当定圆半径为 a , 动圆半径为 r , 动圆在定圆外滚动时, 动圆圆上一定点 M 的轨迹称为外摆线。推导外摆线的参数方程的过程和上述情况类似, 它的参数方程为

$$\begin{cases} x = (a + r) \cos \frac{r}{a} \theta - r \cos \left(1 + \frac{r}{a}\right) \theta \\ y = (a + r) \sin \frac{r}{a} \theta - r \sin \left(1 + \frac{r}{a}\right) \theta \end{cases}$$

类似于内摆线的情况, 若 M 点位于动圆内或动圆外, 则运动过程中 M 点的轨迹为变幅外摆线。

当大圆半径 a 是小圆半径 r 的 2 倍 (即 $k = 1/2$) 时, 动圆上点的轨迹竟然是一条直线 (大圆的直径)。这个几何现象在数学史上被称为土司耦合 (Tusi Couple), 最早由 13 世纪的波斯天文学家纳西尔丁·图西提出。

第一章 解析几何

1.8 参数方程

第一章 解析几何

1.8 参数方程

第一章 解析几何

1.8 参数方程

第一章 解析几何

1.8 参数方程