

第一章 解析几何

1.7 拓展阅读：极坐标和参数方程

在高中，我们主要学习了直角坐标系，其一般分为平面直角坐标系与空间直角坐标系。直角坐标系是最自然，最常用的一种坐标系，但它并不是用数来刻画点的位置的唯一方法，用哪种方法最方便，要按照具体情况而定。

1.7.1 极坐标方程的基本概念

看下面两个具体实例：

实例 1 缉拿走私的观测站位于 O 点，看到位于点 A 处的走私船正在逃跑，现停泊于点 O 处的缉私船追击走私船，随时需要观测站提供走私船所在的位置 P ，对船舶来说，最方便的数据不是走私船所在的直角坐标 (x, y) ，而是它的方位角 θ 与二者的距离 d ，在航空和航海中的情况都是这样。

实例 2 当用炮兵指挥仪指示射击目标时，输出的是以自身为参考系的目标方位，即目标相对于自身所处的方向与距离。

在日常生活中，我们也经常用距离和角度指示位置，这是建立极坐标系的基本思路。

定义 1.7.1 (极坐标). 在平面上取一个定点 O ，由 O 点出发的一条射线 Ox ，一个长度单位及计算角度的正方向（通常取逆时针方向），合称为一个极坐标系。 O 点称为极点， Ox 称为极轴。平面上任一点 M 的位置可以由线段 OM 的长度 ρ 和从 Ox 到 OM 的角度 θ 来刻画。这两个数组成的有序数对 (ρ, θ) 称为点 M 的极坐标。 ρ 称为极径， θ 称为极角。

1.7.2 极坐标与直角坐标的关系

极坐标系和直角坐标系是平面上的两种不同的坐标系。平面上的点可以表示为极坐标，也可以表示为直角坐标。

设在平面上认定了一个极坐标系，以极轴作为直角坐标系的 x 轴的正半轴，以 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的射线作为 y 轴的正半轴，以极点为坐标原点，长度单位不变，建立一个直角坐标系。

设 M 为平面上的一点，它的直角坐标为 (x, y) ，极坐标为 (ρ, θ) 。可知下面的关系式成立：

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

例 1 在直角坐标系中，以点 (x_0, y_0) 为极点，以 x 轴正向为极轴方向建立极坐标系。写出平面上点的直角坐标和极坐标的变换公式（假定长度单位不变）。

1.7.3 曲线的极坐标方程

例 1 下列极坐标方程表示的是什么曲线?

(1) $\rho = 1$;

(2) $\theta = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\rho = 2a \cos \theta (a > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$;

(4) $\rho = 2a \sin \theta (a > 0, 0 \leq \theta \leq \pi)$;

(5)

行星的运动或人造卫星的运动都围绕一个引力中心(太阳或地球)。为了描述、研究这类运动,自然会选用极坐标系。以引力中心为极点、运行平面上的某一固定方向为极轴的方向,这类运动的轨迹是椭圆、抛物线或双曲线,即圆锥曲线。下面根据圆锥曲线的共同几何特征导出它的极坐标方程。

圆锥曲线具备一个通用的几何特征:圆锥曲线是到某定点(焦点)和某定直线(准线)的距离之比等于常数(离心率)的点的轨迹。记焦点为 O , 准线为 l , 离心率为 e 。

以焦点 O 为极点, Ox 为极轴建立极坐标系, Ox 与准线 l 垂直, 极轴所在的直线与 l 交于 D 点。设曲线方程为 $\rho = \rho(\theta)$, 在曲线上任取一点 $M(\rho, \theta)$ 。过点 M 作准线 l 的垂线 MN , 过极点 O 作 MN 的垂线 OE , 交曲线于 A 点, 作 $AB \parallel MN$ 。记 $|OA| = p$ 。当离心率 e 和 p 给定后, 圆锥曲线就完全确定了。

根据圆锥曲线的几何特征, 得到下面的表达式:

$$\frac{|OA|}{|BA|} = e, \quad \frac{|OM|}{|NM|} = e$$

其中 $|OM| = \rho$, $|OA| = p$, $\angle MOx = \theta$, 因此得 $|OD| = |BA| = \frac{p}{e}$, 它表示焦点到相应准线的距离。又

$$\begin{aligned} |NM| &= |BA| + |EM| \\ &= \frac{p}{e} + \rho \cos \theta. \end{aligned}$$

从而得

$$\frac{\rho}{\frac{p}{e} + \rho \cos \theta} = e$$

化简得圆锥曲线的极坐标方程

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

方程中的参数 e 确定了曲线三个类型: $e < 1$ 时为椭圆, $e = 1$ 时为抛物线, $e > 1$ 时为双曲线。参数 p 确定了各类曲线的形状。对抛物线来说, p 就是标准方程 $y^2 = 2px$ 中的 p , 表示焦点到准线的距离。对椭圆和双曲线来说, 可用半轴 a 和 b 表示 p 。我们知道焦点到准线的距离为 $\left| \frac{a}{e} - c \right|$ 。因此 $\frac{p}{e} = \left| \frac{a}{e} - c \right|$, 从而

$$p = |a - ce| = \left| a - c \cdot \frac{c}{a} \right| = \left| \frac{a^2 - c^2}{a} \right|$$

得

$$p = \frac{b^2}{a}$$

第一章 解析几何

1.7 拓展阅读：极坐标和参数方程

第一章 解析几何

1.7 拓展阅读：极坐标和参数方程

第一章 解析几何

1.7 拓展阅读：极坐标和参数方程

第一章 解析几何

1.7 拓展阅读：极坐标和参数方程