
第一章 解析几何

第一章 解析几何

总复习题

- 【2024 长郡二十校联考 18】已知抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , C, D, E 三点在抛物线 Γ 上, 满足 $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FE} = 0$, 证明 C, D, E 三个顶点的横坐标均小于 2。
- 【2026 “fiddie” 模拟考 17】设 $\odot O: x^2 + y^2 = 1$, 动点 P 在 $\odot O$ 上且不在坐标轴上, $\odot O$ 在 P 处的切线与 x 轴, y 轴的交点分别为 A, B , 向量 $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. 记动点 Q 的轨迹为 C .
 - 求 C 的方程;
 - 设椭圆 $E: m^2x^2 + n^2y^2 = 1 (m > 0, n > 0)$ 的右顶点为 M , 上顶点为 N . 若 E 与 C 有且仅有 4 个公共点, 证明: 直线 MN 过定点。
- 【2020 浙江 21】已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$, 点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点, 过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B , 交抛物线 C_2 于点 M (B, M 不同于 A). 若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点, 求 p 的最大值。
- 【2022 新高考 II 卷 21】已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点, 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 在 C 上, 且 $x_1 > x_2 > 0, y_1 > 0$. 过 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与过 Q 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交于点 M . 从下面三个选项中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

(a). M 在 AB 上 (b). $PQ \parallel AB$ (c). $|MA| = |MB|$
- 【2023 新高考 I 卷 22】已知抛物线 $W: y = x^2 + \frac{1}{4}$, 矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.
- 【2024 新高考 II 卷 19】已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$, 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, k 为常数, $0 < k < 1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$: 过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点. 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) .
 - 证明: 数列 $|x_n - y_n|$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列;
 - 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积, 证明: 对任意正整数 n , $S_n = S_{n+1}$.

1.

2. (1) 设 $P(x_0, y_0)$, 因 P 在 $\odot O$ 上且不在坐标轴上, 故有 $|x_0|, |y_0| \in (0, 1)$. 由于 OP 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0}$, 故过点 P 的切线斜率为 $-\frac{x_0}{y_0}$, 切线方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, 即 $x_0x + y_0y = 1$.

因为 $\odot O$ 在点 P 处的切线与 x 轴, y 轴的交点分别为 A, B , 所以 $A(\frac{1}{x_0}, 0), B(0, \frac{1}{y_0})$. 设 Q 的坐标为 (x, y) , 由 $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 得 $x = \frac{2}{x_0}, y = \frac{1}{y_0}$. 因为 $x_0^2 + y_0^2 = 1$, 所以点 Q 的轨迹方程为 $C: \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

$$(2) \text{ 联立曲线 } C \text{ 与椭圆 } \begin{cases} \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1, \\ m^2x^2 + n^2y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 得到}$$

$$m^2x^4 + (n^2 - 4m^2 - 1)x^2 + 4 = 0 \quad (*)$$

在 $(*)$ 中令 $t = x^2$, 得到关于 t 的方程

$$m^2t^2 + (n^2 - 4m^2 - 1)t + 4 = 0 \quad (**)$$

因为 E 和 C 都是以 O 为对称中心的中心对称图形, 所以如果 (x_0, y_0) 是 E 与 C 的其中一个交点, 则 $(-x_0, -y_0), (x_0, -y_0), (-x_0, y_0)$ 都是 E 与 C 的交点. 则 E 与 C 有且仅有 4 个公共点等价于方程 $(**)$ 或者有 2 个相同的正根, 或者有 1 个正根和 1 个非正根.

设 t_1, t_2 是方程 $(**)$ 的两根, 则 $t_1 + t_2 = -\frac{n^2 - 4m^2 - 1}{m^2}, t_1t_2 = \frac{4}{m^2} > 0$. 故 t_1, t_2 符号相同, 方程 $(**)$ 有两个相同的正根. 所以 $\Delta = (n^2 - 4m^2 - 1)^2 - 16m^2 = 0$, 即 $|n^2 - 4m^2 - 1| = 4m$

由于 $t_1 + t_2 = -\frac{n^2 - 4m^2 - 1}{m^2} > 0$, 即 $n^2 - 4m^2 - 1 < 0$. 所以 $n^2 - 4m^2 - 1 = -4m$, 即 $n^2 = (2m - 1)^2$, 可得 $n = |2m - 1|$.

方程 $(**)$ 的根为 $t = \frac{-(n^2 - 4m^2 - 1)}{2m^2} = \frac{2}{m}$, 此时 $x^2 = \frac{2}{m}, y^2 = \frac{1 - 2m}{n^2} > 0$, 所以 $1 - 2m > 0$, 于是 $n = 1 - 2m$.

因为 l 经过 E 的右顶点 $(\frac{1}{m}, 0)$ 和上顶点 $(0, \frac{1}{n})$, 所以 l 的方程为 $mx + ny = 1$. 又因为 $n = 1 - 2m$ 即 $2m + n = 1$, 所以 l 过定点 $(2, 1)$.

Fiddle 评: 本题改编自【2006 年全国 I 卷 20】. 这题的第 (1) 问就是用相关点法求参数方程, 得到曲线 $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$. 第 (2) 问的设计参考了【2018 全国 I 卷 22 (选修 4-4)】.

【2006 全国 I 卷 20】在平面直角坐标系 xOy 中, 有一个以 $F_1(0, -\sqrt{3})$ 和 $F_2(0, \sqrt{3})$ 为焦点、离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆. 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C , 动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切线与 x, y 轴的交点分别为 A, B , 且向量 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. 求:

(1) 点 M 的轨迹方程;

(2) $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值.

【2018 全国 I 卷文 22 理 22】在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$. 以坐标原点为极点、 x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho\cos\theta - 3 = 0$.

(1) 求 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若 C_1 和 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

本题以圆上动点的切线为起点, 通过向量运算生成轨迹曲线 C , 再引入椭圆 E 与曲线 C 的交点问题, 最终转化为直线过定点问题. 题目设置了两问:

第(1)问求轨迹方程, 属于基础性的解析几何问题. 它考查了圆的切线方程、向量坐标运算、消参求轨迹等基本知识与方法, 属于绝大多数考生应当掌握的层次.

第(2)问在给定交点个数的条件下, 证明直线过定点. 这是典型的解析几何综合问题, 涉及椭圆方程的设定、曲线的对称性分析、高次方程的消元转化、二次方程根的分布、隐含条件的挖掘与检验, 以及定点坐标的求解. 题目结构清晰, 由浅入深, 入手容易深入难. 第(2)问的解决需要较强的代数变形能力和逻辑推理能力, 对思维的严谨性要求较高, 具有较好的选拔功能.

本题最大的区分度体现在对 $y^2 > 0$ 隐含条件的检验上. 从判别式得出 $n^2 = (2m-1)^2$ 后, 若不加检验直接得出 $n = 2m-1$, 则会得到错误的定点 $(2, -1)$ 或者 $(-2, -1), (-2, 1)$ 等等. 正确的做法必须回到交点存在的根本条件: 联立方程组求得的 y^2 必须非负. 这一设计精准体现了高考“多考一点想, 少考一点算”的命题理念.

易错点是处理根号与绝对值时容易出错. 例如: 从 $(n^2 - 4m^2 - 1)^2 = 16m^2$ 直接得到 $n^2 - 4m^2 - 1 = 4m$ (即 $n^2 = (2m+1)^2$), 而不是写 $|n^2 - 4m^2 - 1| = 4m$, 没有用两根和的关系式 (或对称轴) 得到 $n^2 - 4m^2 - 1 < 0$ 从而舍去 $n^2 - 4m^2 - 1 = 4m$ 的情形. (最多只能拿 9~10 分) 从 $n^2 = (2m-1)^2$ 直接得到 $n = 2m-1$, 忽略了 $n = 1-2m$, 得出最终的错误答案是 $(2, -1)$. 这些错误其实都可以通过画草图来规避.

3.

4.

5.

6.

第一章 解析几何

第一章 解析几何

第一章 解析几何