

第一章 解析几何

1.5 相关量的代数表示

1.5.1 长度、比例、角度、面积的代数表示

第一章 解析几何

1.5 相关量的代数表示

本节习题

A 组

- 【2015 浙江 5】如图, 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 不经过焦点的直线上有三个不同的点 A, B, C , 其中点 A, B 在抛物线上, 点 C 在 y 轴上. 则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比是
 (A) $\frac{|BF|-1}{|AF|-1}$ (B) $\frac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$ (C) $\frac{|BF|+1}{|AF|+1}$ (D) $\frac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$
- 【2025 新高考 II 卷 16】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. 过点 $(0, -2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 求 $|AB|$.
- 【2024 新高考 I 卷 16】已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上两点. 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.
- 【2010 江西理 21】设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 抛物线 $C_2: x^2 + by = b^2$.
 (1) 若 C_2 经过 C_1 的两个焦点, 求 C_1 的离心率;
 (2) 设 $A(0, b), Q\left(3\sqrt{3}, \frac{5}{4}b\right)$, 又 M, N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点, 若 $\triangle AMN$ 的垂心为 $B\left(0, \frac{3}{4}b\right)$, 且 $\triangle QMN$ 的重心在 C_2 上, 求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程.
- 【2013 江西文 20】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A, B, D 分别是 C 的左、右、上顶点, P 是 C 上除顶点外的任意一点, 直线 DP 交 x 轴于点 N , 直线 AD 交 BP 于点 M , 设 BP 的斜率为 k , MN 的斜率为 m , 证明: $2m - k$ 为定值.
- 【2012 浙江理 21】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 不过原点 O 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 且线段 AB 被直线 OP 平分. 求 $\triangle ABP$ 面积取最大值时直线 l 的方程.
- 【2011 大纲卷理 21】已知 O 为坐标原点, F 为椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 在 y 轴正半轴上的焦点, 过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 P 满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP} = \mathbf{0}$:
 (1) 证明: 点 P 在 C 上;
 (2) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q , 证明: A, P, B, Q 四点在同一圆上.
- 【2021 新高考 I 卷 21】已知 $C: x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x \geq 1)$. 点 T 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A, B 两点和 P, Q 两点, 且 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$, 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

9. 【2025 新高考 I 卷 18】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 的下顶点为 A . 动点 P 不在 y 轴上, 点 R 在射线 AP 上, 且满足 $|AP| \cdot |AR| = 3$.
- (1) 设 $P(m, n)$, 求 R 的坐标 (用 m, n 表示);
 - (2) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上的动点, 直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍, 求 $|PQ|$ 的最大值.
10. 【2022 全国甲卷文 21】设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 $D(2, 0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β . 当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.
11. 【2023 全国甲卷理 20】已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, F 为 C 的焦点, M, N 为 C 上两点, 且 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$, 求 $\triangle MFN$ 面积的最小值.
12. 【2022 浙江 21】已知椭圆 $\frac{x^2}{12} + y^2 = 1$. 设 A, B 是椭圆上异于 $P(0, 1)$ 的两点, 且点 $Q\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 在线段 AB 上, 直线 PA, PB 分别交直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 于 C, D 两点.
- (1) 求点 P 到椭圆上点的距离的最大值; (2) 求 $|CD|$ 的最小值.
13. 【2012 辽宁理 20】如图, 椭圆 $C_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0, a, b$ 为常数), 动圆 $C_1: x^2 + y^2 = t_1^2$, $b < t_1 < a$. 点 A_1, A_2 分别为 C_0 的左、右顶点, C_1 与 C_0 相交于 A, B, C, D 四点.
- (1) 求直线 AA_1 与直线 A_2B 交点 M 的轨迹方程;
 - (2) 设动圆 $C_2: x^2 + y^2 = t_2^2$ 与 C_0 相交于 A', B', C', D' 四点, 其中 $b < t_2 < a, t_1 \neq t_2$. 若矩形 $ABCD$ 与矩形 $A'B'C'D'$ 的面积相等, 证明: $t_1^2 + t_2^2$ 为定值.
14. 【2010 浙江理 21】已知 $m > 1$, 直线 $l: x - my - \frac{m^2}{2} = 0$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1, F_1, F_2$ 分别为椭圆 C 的左、右焦点. 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, $\triangle AF_1F_2, \triangle BF_1F_2$ 的重心分别为 G, H . 若原点 O 在以线段 GH 为直径的圆内, 求实数 m 的取值范围.
15. 【2011 湖南理 21】已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 抛物线 $C_2: y = x^2 - 1$, 设 C_2 与 y 轴的交点为 M , 过坐标原点 O 的直线 l 与 C_2 相交于点 A, B , 直线 MA, MB 分别与 C_1 相交于点 D, E .
- (1) 证明: $MD \perp ME$;
 - (2) 记 $\triangle MAB, \triangle MDE$ 的面积分别是 S_1, S_2 . 是否存在直线 l , 使得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{32}$?
16. 【2022 新高考 I 卷 21】已知点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.
- (1) 求 l 的斜率; (2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.
17. 【2013 浙江理 21 (2)】已知 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, C_2: x^2 + y^2 = 4$. l_1, l_2 是过点 $P(0, -1)$ 且互相垂直的两条直线, 其中 l_1 交圆 C_2 于 A, B 两点, l_2 交椭圆 C_1 于另一点 D . 求 $\triangle ABD$ 面积取最大值时直线 l_1 的方程.
18. 【2015 浙江理 19】已知 O 为坐标原点, 椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上两个不同的点 A, B 关于直线 $y = mx + \frac{1}{2}$ 对称.

(1) 求实数 m 的取值范围; (2) 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值。

19. 【2017 山东理 21 (2)】已知椭圆 $E: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 直线 $l: y = k_1 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, C 是椭圆 E 上的一点, 直线 OC 的斜率为 k_2 , 且 $k_1 k_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, M 是线段 OC 延长线上一点, 且 $|MC| : |AB| = 2 : 3$, $\odot M$ 的半径为 $|MC|$, OS, OT 是 $\odot M$ 的两条切线, 切点分别为 S, T , 求 $\angle SOT$ 的最大值, 并求取得最大值时直线 l 的斜率。

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(-a, 0)$, $B(0, -b)$, P 为 C 上位于第一象限的动点, PA 交 y 轴于点 E , PB 交 x 轴于点 F 。

(1) 探究四边形 $AEFB$ 的面积是否为定值, 说明理由;

(2) 当 $\triangle PEF$ 的面积达到最大值时, 求点 P 的坐标。

21. 【2018 全国 III 卷理 20】已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点. 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$)。

(1) 证明: $k < -\frac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$. 证明: $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FP}|, |\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列, 并求该数列的公差。

22. 【2009 大纲理 21】已知抛物线 $E: y^2 = x$ 与圆 $M: (x-4)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B, C, D 四点。

(1) 求 r 的取值范围;

(2) 当四边形 $ABCD$ 面积最大时, 求对角线 AC, BD 的交点坐标。

23. 【2021 全国乙卷理 21 (2)】已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$, 点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值。

24. 【2019 全国 II 卷理 21】已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B . 若以 $E(0, \frac{5}{2})$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求四边形 $ADBE$ 的面积。

25. 【2008 湖南理 20】设 A, B 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的不同两点, 弦 AB (不平行于 y 轴) 的垂直平分线与 x 轴相交于点 P , 则称弦 AB 是点 P 的一条“相关弦”。已知当 $x > 2$ 时, 点 $P(x, 0)$ 存在无穷多条“相关弦”, 给定 $x_0 > 2$ 。

(1) 证明: 点 $P(x_0, 0)$ 的所有“相关弦”的中点的横坐标相同;

(2) 试问: 点 $P(x_0, 0)$ 的“相关弦”的弦长是否存在最大值? 若存在, 求其最大值 (用 x_0 表示), 否则请说明理由。

26. 【2019 全国 II 卷理 21 节选】已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 过坐标原点的直线交 C 于 P, Q 两点, 点 P 在第一象限, $PE \perp x$ 轴, 垂足为 E , 连接 QE 并延长交 C 于点 G 。

(1) 证明: $\triangle PQG$ 是直角三角形;

(2) 求 $\triangle PQG$ 面积的最大值。

27. 【2021 八省联考 21】双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 离心率为 2, 动点 B 在 C 上且处于第一象限, 证明: $\angle BFA = 2\angle BAF$
28. 【2016 山东文 21 节选】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. 过动点 $M(0, m) (m > 0)$ 的直线交 x 轴于点 N , 交 C 于点 A, P (P 在第一象限), 且 M 是线段 PN 的中点, 过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q , 延长线 QM 交 C 于点 B .
- (1) 设直线 PM, QM 的斜率分别为 k, k' , 证明 $\frac{k'}{k}$ 为定值;
- (2) 求直线 AB 的斜率的最小值.
29. 【2024 武汉四调 18】已知抛物线 $E: y = x^2$, 过点 $T(1, 2)$ 的直线与抛物线 E 交于 A, B 两点, 设抛物线 E 在点 A, B 处的切线分别为 l_1 和 l_2 , 已知 l_1 与 x 轴交于点 M , l_2 与 x 轴交于点 N , 设 l_1 与 l_2 的交点为 P .
- (2) 若 $\triangle PMN$ 面积为 $\sqrt{2}$, 求点 P 的坐标;
- (3) 若 P, M, N, T 四点共圆, 求点 P 的坐标.
30. 点 A, B 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 其中点 A 在第一象限, O 为坐标原点, 且 $OA \perp AB$.
- (1) 若 $a = \sqrt{3}, b = 1$, 直线的方程为 $x - 3y = 0$, 求直线 OB 的斜率;
- (2) 若顺时针排列的 O, A, B 满足 $OA = AB$, 求 $\frac{b}{a}$ 的最大值.
31. 【2014 浙江理 21】如图, 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 动直线 l 与椭圆 C 只有一个公共点 P , 且点 P 在第一象限.
- (1) 已知直线 l 的斜率为 k , 用 a, b, k 表示点 P 的坐标;
- (2) 若过原点 O 的直线 l_1 与 l 垂直, 证明: 点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a - b$.
32. 【2017 浙江 21】如图, 已知抛物线 $x^2 = y$, 点 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), B\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, 抛物线上的点 $P(x, y) \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right)$, 过点 B 作直线 AP 的垂线, 垂足为 Q .
- (1) 求直线 AP 斜率的取值范围; (2) 求 $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值.
33. 【2026 广州一模 18】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 其左顶点为 A , 下顶点为 B , 点 P 为椭圆 C 在第一象限上任一点, 直线 AP 交 y 轴于点 C , 直线 BP 交 x 轴于点 D . 记 $\triangle PCD$ 的面积为 S_1 , 四边形 $ABDC$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.
34. 【2025 “fiddie” 模拟考 18】设 O 为坐标原点, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F , 若存在过 F 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 且满足 $OM \perp ON$, 求 C 的离心率的取值范围.
35. 【“圆梦杯(十)”(网络联考) 18】已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点为 A , 右焦点为 F , 圆 F 过点 A 且半径为 1, 斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 与 C 的右支交于 M, N 两点, 且 M 在 N 的右侧, 线段 MF 与圆 F 交于点 P .
- (2) 设 M 的横坐标为 m , 求 P 的坐标 (用 m 表示);
- (3) 过 M 且垂直于 x 轴的直线交过 N 且垂直于 y 轴的直线于点 Q , 若 l 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 且 $AM \parallel PQ$, 求 k^2 .

36. 【2010 山东文 22 改编】【2022 温州一模 21】已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是直线 $l: y = -\frac{8}{9}x$ 上不同于原点 O 的一个动点, 斜率为 k_1 的直线 PF_1 与双曲线 Γ 交于 A, B 两点, 斜率为 k_2 的直线 PF_2 与双曲线 Γ 交于 C, D 两点.
- (1) 求 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ 的值;
 - (2) 若直线 OA, OB, OC, OD 的斜率分别为 $k_{OA}, k_{OB}, k_{OC}, k_{OD}$, 是否存在点 P , 满足 $k_{OA} + k_{OB} + k_{OC} + k_{OD} = 0$, 若存在, 求 P 的坐标, 否则说明理由.
37. 【2009 湖北 20】过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的对称轴上一点 $A(a, 0) (a > 0)$ 的直线与抛物线相交于 M, N 两点, 自 M, N 向直线 $l: x = -a$ 作垂线, 垂足分别为 M_1, N_1 .
- (1) 当 $a = \frac{p}{2}$ 时, 求证: $AM_1 \perp AN_1$;
 - (2) 记 $\triangle AMM_1, \triangle AM_1N_1, \triangle ANN_1$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 是否存在 λ , 使得对任意的 $a > 0$, 都有 $S_2^2 = \lambda S_1 S_3$ 成立. 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.
38. 【2024 温州 1.5 模 19 节选】已知椭圆 $W: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 过直线 l 上的一点 P 作轨迹 W 的两条切线, 切点分别为 A, B , 且 $\angle APB = 60^\circ$.
- (1) 求点 P 的坐标;
 - (2) 求 $\angle APB$ 的角平分线与 x 轴交点 Q 的坐标.
39. 【2011 山东 22】已知动直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两不同点, 且 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 其中 O 为坐标原点.
- (1) 证明: $x_1^2 + x_2^2$ 和 $y_1^2 + y_2^2$ 均为定值;
 - (2) 椭圆 C 上是否存在三点 D, E, G , 使得 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$? 若存在, 判断 $\triangle DEG$ 的形状, 否则请说明理由.
40. 设抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 直线 $l: y = kx + 2$ 交 C 于 A, B 两点. 过原点 O 作 l 的垂线, 交直线 $y = -2$ 于点 M . 若直线 $l' \parallel l$, 且 l' 与 C 相切于点 N , 证明: $\triangle AMN$ 的面积不小于 $2\sqrt{2}$.
41. 【2025 长沙市适应性考试 18】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左顶点为 A , 直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 P 为 $\triangle AMN$ 的外心.
- (1) 若 $\triangle AMN$ 为等边三角形, 求点 P 的坐标;
 - (2) 若点 P 在直线 $x = -\frac{1}{3}$ 上, 求点 A 到直线 l 的距离的取值范围.
42. 【2024 武汉九调 21 改编】椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, E 的左右顶点分别为 A, B . 已知点 $T\left(t, \frac{1}{2}\right)$ 在 E 的内部, 直线 AT, BT 分别与 E 交于另外两 C, D , 若 $\triangle CDT$ 的面积为 $\frac{1}{17}$, 求 t 的值.
43. 直线 l 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F , 并与抛物线 C 交于 M, N 两点 (M 在第一象限), $\triangle OMN$ 的外接圆与 C 交于另一点 D .
- (1) 证明: $\triangle MND$ 的重心的纵坐标为定值;
 - (2) 求凸四边形 $OMDN$ 的面积取值范围.

44. 双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 点 $A(x_0, y_0)$ 是 C 上位于第一象限的点, 点 A, B 关于原点 O 对称, 点 A, D 关于 y 轴对称, 延长 AD 至 E , 使得 $|DE| = \frac{1}{3}|AD|$, 且 BE 与 C 的另一交点 F 位于第二象限。

(1) 求 x_0 的取值范围;

(2) 证明: AE 不可能是 $\angle BAF$ 的三等分线。

45. 已知 $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$, 点 $C(-3, 0)$, $D(2, 0)$, 过点 D 的动直线与曲线 E 交于 M, N 两点, 设 $\triangle CMN$ 的外心为 Q , O 为坐标原点, 证明: 直线 OQ 与直线 MN 的斜率之积是定值。

46. 已知双曲线 $C: y^2 - x^2 = 1$, 上顶点为 D 。直线 l 与双曲线 C 的两支分别交于 A, B 两点 (B 在第一象限), 与 x 轴交于点 T 。设直线 DA, DB 的倾斜角分别为 α, β 。

(1) 若 $T(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, 求证: $\alpha + \beta$ 为定值;

(2) 若 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 直线 DB 与 x 轴交于点 E , 求 $\triangle BET$ 与 $\triangle ADT$ 的外接圆半径之比的最大值。

47. 【2026 深圳一模 19】已知 A_1, A_2 为椭圆 $C_1: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < \sqrt{3})$ 的左、右顶点, M 为 C_1 上的一点, N 为双曲线 $C_2: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的一点 (M, N 两点不同于 A_1, A_2 两点), 设直线 A_1M, A_2M, A_1N, A_2N 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3, k_4 , 且 $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ 。

(1) 设 O 为坐标原点, 证明: O, M, N 三点共线;

(2) 设 C_1, C_2 的右焦点分别为 F_1, F_2 , M, N 均在第一象限, 直线 NF_1 与直线 MF_2 相交于点 P , $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 8$ 。

(i) 证明: $MF_1 \parallel NF_2$; (ii) 证明: $\angle A_1PF_1 = \angle A_2PF_2$ 。

48. 【2025 久洵杯(网络联考) 18】记椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点为 A , 右焦点为 F , 过 F 的直线 l 交 C 于 D, E 两点, 记线段 AD, AE 的中点分别为 M, N , 直线 FM, FN 分别交 AE, AD 于点 P, Q 。

(1) 证明: $PQ \perp y$ 轴;

(2) 若 $\triangle FPQ$ 的外接圆的面积为 16π , 求 l 的方程。

1.

2. 解法 1: 利用韦达定理.

由题意可设 $l: y = kx - 2$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为

$$\frac{1}{2} |x_1 - x_2| \sqrt{1+k^2} \times \frac{2}{\sqrt{1+k^2}} = |x_1 - x_2|.$$

由题设知 $|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$.

由

$$\begin{cases} y = kx - 2, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$$

得 $(1+2k^2)x^2 - 8kx + 4 = 0$. 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k}{1+2k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4}{1+2k^2}$.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{32k^2 - 16}{(1+2k^2)^2}.$$

所以 $\frac{32k^2 - 16}{(1+2k^2)^2} = 2$, 解得 $k^2 = \frac{3}{2}$.因此 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

解法 2: 直接求解.

由题意可设 $l: y = kx - 2$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 $|x_1 - x_2|$. 由题设知 $|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$.

由

$$\begin{cases} y = kx - 2, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$$

得 $(1+2k^2)x^2 - 8kx + 4 = 0$, 则

$$x_1 = \frac{4k + 2\sqrt{2k^2 - 1}}{1+2k^2}, \quad x_2 = \frac{4k - 2\sqrt{2k^2 - 1}}{1+2k^2}.$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{2k^2 - 1}}{1+2k^2}, \quad \frac{32k^2 - 16}{(1+2k^2)^2} = 2,$$

解得 $k^2 = \frac{3}{2}$. 因此 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

解法 3: 做差法.

设 $P(0, -2)$, 由题意可设 $l: y = kx - 2$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为

$$|S_{\triangle AOP} - S_{\triangle BOP}| = \frac{1}{2} \times |OP| \times |x_1 - x_2| = |x_1 - x_2|.$$

由题设知 $|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$.

由

$$\begin{cases} y = kx - 2, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$$

得 $(1+2k^2)x^2 - 8kx + 4 = 0$. 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k}{1+2k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4}{1+2k^2}$.

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{32k^2 - 16}{(1 + 2k^2)^2}.$$

所以 $\frac{32k^2 - 16}{(1 + 2k^2)^2} = 2$, 解得 $k^2 = \frac{3}{2}$.

因此 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{5}$.

解法 4: 做和法.

由题意可设 $l: x = m(y + 2)$, $P(2m, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为

$$S_{\triangle AOP} + S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2} \times |2m| |y_1 - y_2| = |m| |y_1 - y_2|.$$

由题设知 $|m| |y_1 - y_2| = \sqrt{2}$.

由

$$\begin{cases} x = m(y + 2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$$

得 $(m^2 + 2)y^2 + 4m^2y + 4m^2 - 4 = 0$. 则 $y_1 + y_2 = \frac{-4m^2}{2 + m^2}$, $y_1y_2 = \frac{4m^2 - 4}{2 + m^2}$.

$$(y_1 - y_2)^2 = \frac{-16(m^2 - 2)}{(2 + m^2)^2}.$$

所以 $\frac{-16(m^2 - 2)m^2}{(2 + m^2)^2} = 2$, 解得 $m^2 = \frac{2}{3}$.

因此 $|AB| = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{|m|} |m| |y_1 - y_2| = \sqrt{5}$.

思路 5: 设圆 $C': x^2 + y^2 = 2$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $A'(\frac{x_1}{\sqrt{2}}, y_1)$, $B'(\frac{x_2}{\sqrt{2}}, y_2)$, 不妨设 $x_1, x_2 > 0$. $\triangle OAB$ 的面积为

$$S_{\triangle OAB} = |S_{\triangle OPB} - S_{\triangle OPA}| = \frac{1}{2} |OP| \cdot |x_2 - x_1| = |x_2 - x_1|.$$

因为 P, A, B 三点共线, 所以 P, A', B' 三点共线. 同理可得, $\triangle OA'B'$ 的面积为

$$S_{\triangle OA'B'} = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{\triangle OAB}.$$

因为 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 所以 $|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$ 且 $\triangle OA'B'$ 的面积为 1.

由 $|OA'| = |OB'| = \sqrt{2}$, $S_{\triangle OA'B'} = \frac{1}{2} |OA'| |OB'| \sin \angle A'OB' = 1$, 得 $\sin \angle A'OB' = 1$, 所以 $\angle A'OB' = 90^\circ$, 于是 $|A'B'|^2 = |OA'|^2 + |OB'|^2 = 4$, 即

$$\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4.$$

由 $|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$ 得 $(y_1 - y_2)^2 = 3$.

因此 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2 + 3} = \sqrt{5}$.

【解题思路】 (1) 椭圆基本知识和基本概念.

由题设知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2a = 4$, 所以 $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, 故 $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 2 = 2$, 因此椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 思路 1: 联立直线与椭圆方程, 利用韦达定理.

$\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2} |AB| \cdot h$, 其中 h 为点 O 到直线 AB 的距离. 而 $|AB|$ 可以表示为直线 AB 的斜率 k 与 A, B 两点的横坐标 (或纵坐标) 的差的函数关系, 因此联立直线与椭圆方程, 利用韦达定理可以用斜率 k 表示 A, B 两点的横坐标 (或纵坐标) 的差, 通过点到直线的距离公式可以用斜率 k 表示 h . 由此建立了 $\triangle OAB$ 的面积与斜率 k 的方程关系, 通过求解关于斜率 k 的方程, 得到 k 值.

最后, $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$.

思路 2: 联立直线与椭圆方程, 直接解二次方程, 求出 $|x_1 - x_2|$.

思路 3: 做差法. 记 $P(0, -2)$, $\triangle OAB$ 的面积等于 $|S_{\triangle AOP} - S_{\triangle BOP}|$, 考虑到 $\triangle AOP$ 与 $\triangle BOP$ 的底边为 OP , OP 为 2, 所以 $|S_{\triangle AOP} - S_{\triangle BOP}|$ 可以用 $|x_1 - x_2|$ 表示. 再联立直线与椭圆的方程, 得到 $|x_1 - x_2|$ 与直线 AB 的斜率 k 的关系, 即可解决问题.

思路 4: 做和法. 记 $P(2m, 0)$ 为直线 AB 与 x 轴的交点, $\triangle OAB$ 的面积等于 $S_{\triangle AOP} + S_{\triangle BOP}$, 考虑到 $\triangle AOP$ 与 $\triangle BOP$ 的底边为 OP , OP 为 $2|m|$, 所以 $S_{\triangle AOP} + S_{\triangle BOP}$ 可以用 $|y_1 - y_2|$ 表示. 再联立直线与椭圆的方程, 得到 $|y_1 - y_2|$ 与直线 AB 的斜率 k 的关系, 即可解决问题.

思路 5: 作伸缩变换, 将椭圆变成圆, A, B 的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍. 于是就可以用圆的几何性质来解答, 减小计算量.

3. 思路 1: 当直线 l 垂直于 x 轴时, $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$, $\triangle ABP$ 的面积为 $\frac{9}{2}$, 不合题意.

设直线 l 的方程为 $y - \frac{3}{2} = k(x - 3)$.

由

$$\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = kx + \frac{3}{2} - 3k \end{cases}$$

得

$$(3+4k^2)x^2 + 8k\left(\frac{3}{2} - 3k\right)x + 4\left(\frac{3}{2} - 3k\right)^2 - 36 = 0.$$

设 $B(x_B, y_B)$, 则

$$x_B = \frac{-8k\left(\frac{3}{2} - 3k\right)}{3+4k^2} - 3 = \frac{12k^2 - 12k - 9}{3+4k^2}.$$

因此 $|PB| = \sqrt{1+k^2} |x_B - 3| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2}$, 又 A 到 l 的距离为 $\frac{\left|3k + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$, 故 $\triangle ABP$ 的面积为 $\frac{9|4k^2+8k+3|}{6+8k^2}$.

所以 $\frac{9|4k^2+8k+3|}{6+8k^2} = 9$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{3}{2}$, 故 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$ 或 $y = \frac{3}{2}x - 3$.

思路 2: 由已知, 直线 PA 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$, 且 $|PA| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$. 以 PA 作为 $\triangle ABP$ 的底边, 则点 B 到直线 PA 的距离即为高, 由已知可得高为 $\frac{12}{5}\sqrt{5}$.

设过点 B 且与直线 PA 平行的直线为 $l_B: y = -\frac{1}{2}x + m$.

由题设可得 l_B 与直线 PA 的距离为 $\frac{12}{5}\sqrt{5}$, 故 $\frac{|m-3|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{12}{5}\sqrt{5}$, 解得 $m = -3$ 或 $m = 9$ (舍去), 所以 $l_B: y = -\frac{1}{2}x - 3$. 由椭圆的中心对称性可知, l_B 与椭圆的交点分别为 $(-3, -\frac{3}{2})$ 和 $(0, -3)$, 故 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$ 或 $y = \frac{3}{2}x - 3$.

【实测数据】(山东) 本题难度为 0.409.

(福建) 本题难度为 0.528, 区分度为 0.44; 物理组难度 0.555, 区分度 0.40; 历史组难度 0.405, 区分度 0.48. 具体得分分布如下表.

分值	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16(1)	4%	2%	1%	2%	8%	8%	75%	—	—	—
16(2)	27%	10%	15%	13%	10%	9%	7%	4%	3%	2%

4.

5.

6.

7.

8.

9. (1) 方法一: 由 (1) 知 $A(0, -1)$, 故 $\overrightarrow{AP} = (m, n+1) (m \neq 0)$, 可设 $\overrightarrow{AR} = (\lambda m, \lambda(n+1)) (\lambda > 0)$, 由 $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AR}| = 3$ 得

$$\lambda \sqrt{m^2 + (n+1)^2} \cdot \sqrt{m^2 + (n+1)^2} = 3,$$

$$\text{故 } \lambda = \frac{3}{m^2 + (n+1)^2}, \text{ 因此 } R\left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1\right).$$

方法二: 由 (1) 知 $A(0, -1)$, 故 $\overrightarrow{AP} = (m, n+1) (m \neq 0)$, 因此 $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{m^2 + (n+1)^2}$.

由 $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AR}| = 3$ 得 $|\overrightarrow{AR}| = \frac{3}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}}$, 结合 $\overrightarrow{AR}$ 和 $\overrightarrow{AP}$ 共线同向知

$$\overrightarrow{AR} = \frac{|\overrightarrow{AR}|}{|\overrightarrow{AP}|} \cdot \overrightarrow{AP} = \left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2}\right),$$

$$\text{故 } R\left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1\right).$$

- (2) 由 (1) 知直线 OR 的斜率为 $\frac{3(n+1) - m^2 - (n+1)^2}{3m}$, 由题意得

$$\frac{3(n+1) - m^2 - (n+1)^2}{3m} = 3 \cdot \frac{n}{m},$$

故 $m^2 + n^2 + 8n - 2 = 0$, 即 $m^2 + (n+4)^2 = 18$.

因此 P 在以 $T(0, -4)$ 为圆心, $3\sqrt{2}$ 为半径的圆上.

设 $Q(u, v)$, 则 $|\overrightarrow{QT}|^2 = u^2 + (v+4)^2 = 9(1-v^2) + (v+4)^2 = -8\left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + 27 \leq 27$,

因此 $|PQ| \leq |QT| + |PT| \leq 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$, 当 $P\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -4 - \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$, $Q\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时等号成立, 且直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍.

因此 $|PQ|$ 的最大值为 $3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.

10.

11.

12.

13.

14. 新答案(来源: 3.1 性质的证明(1) 函数.md): (1) 当 $a=1, b=2$ 时, 因为 $f'(x) = (x-1)(3x-5)$, 故 $f'(2) = 1$.

又 $f(2) = 0$, 所以 $f(x)$ 在点 $(2, 0)$ 处的切线方程为 $y = x - 2$.

(2) 因为 $f'(x) = 3(x-a)\left(x - \frac{a+2b}{3}\right)$, 由于 $a < b$, 故 $a < \frac{a+2b}{3}$.

所以 $f(x)$ 的两个极值点为 $x = a$, $x = \frac{a+2b}{3}$.

不妨设 $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$,

因为 $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$, 且 x_3 是 $f(x)$ 的零点, 故 $x_3 = b$.

又因为 $\frac{a+2b}{3} - a = 2\left(b - \frac{a+2b}{3}\right)$, $x_4 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a+2b}{3}\right) = \frac{2a+b}{3}$,

此时 $a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}, b$ 依次成等差数列,

所以存在实数 x_4 满足题意, 且 $x_4 = \frac{2a+b}{3}$.

3. 【2017 上海, 21】题号位置: $\boxed{\text{F}}$

设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(1) 若 $f(x) = ax^3 + 1$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 为周期函数, 证明: $f(x)$ 为常值函数;

(3) 设 $f(x)$ 恒大于零. $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上且恒大于零的周期函数, M 是 $g(x)$ 的最大值. 函数 $h(x) = f(x)g(x)$. 证明: " $h(x)$ 是周期函数" 的充要条件是 " $f(x)$ 是常值函数".

4. 【2015 上海, 23】

对于定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $g(x)$, 若存在正常数 T , 使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则称 $g(x)$ 为余弦周期函数, 且称 T 为其余弦周期. 已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为 $\mathbb{R}$. 设 $f(x)$ 单调递增, $f(0) = 0$, $f(T) = 4\pi$.

(1) 验证 $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数;

(2) 设 $a < b$. 证明对任意 $c \in [f(a), f(b)]$, 存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = c$;

(3) 证明: " u_0 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[0, T]$ 上的解" 的充要条件是 " $u_0 + T$ 是方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上的解", 并证明对任意 $x \in [0, T]$ 都有 $f(x+T) = f(x) + f(T)$.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26. (1) 设直线 PQ 的斜率为 k , 则其方程为 $y = kx$ ($k > 0$). 联立该直线与椭圆 $\begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$

得 $x = \pm \frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$. 记 $u = \frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$, 则 $P(u, ku), Q(-u, -ku), E(u, 0)$. 于是直线 QG 的斜率

为 $\frac{k}{2}$, 方程为 $y = \frac{k}{2}(x - u)$. 联立直线 QG 与椭圆 $\begin{cases} y = \frac{k}{2}(x - u), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$

得 $(2 + k^2)x^2 - 2uk^2x + k^2u^2 - 8 = 0(*)$.

设 $G(x_G, y_G)$, 则 $-u$ 和 x_G 是方程 $(*)$ 的解, 故 $x_G = \frac{u(3k^2 + 2)}{2 + k^2}$, 由此得 $y_G = \frac{uk^3}{2 + k^2}$. 从而直线 PG 的斜率为

$$\frac{\frac{uk^3}{2 + k^2} - uk}{\frac{u(3k^2 + 2)}{2 + k^2} - u} = -\frac{1}{k}$$

所以 $PQ \perp PG$, 即 $\triangle PQG$ 是直角三角形.

(2) 可得 $|PE| = ku, |x_G - x_Q| = \frac{4u(k^2 + 1)}{2 + k^2}$, 所以

$$\triangle PQG \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |PE| |x_G - x_Q| = \frac{4ku^2(k^2 + 1)}{2 + k^2} = \frac{8k(k^2 + 1)}{(1 + 2k^2)(2 + k^2)}.$$

而

$$\frac{8k(k^2 + 1)}{(1 + 2k^2)(2 + k^2)} = \frac{8(k + \frac{1}{k})}{2k^2 + \frac{2}{k^2} + 5} = \frac{8\left(\frac{1}{k} + k\right)}{1 + 2\left(\frac{1}{k} + k\right)^2}$$

设 $t = k + \frac{1}{k}$, 由 $k > 0$ 得到 $t \geq 2$, 当且仅当 $k = 1$ 时取等号. 因为 $S = \frac{8t}{1 + 2t^2}$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递减, 所以当 $t = 2$, 即 $k = 1$ 时, S 取得最大值 $\frac{16}{9}$. 因此 $\triangle PQG$ 面积的最大值为 $\frac{16}{9}$.

新答案 (来源: 4.4 多个量词的问题 (3) 向量、几何.md): 依题意, 可设直线 MN 的方程为 $x = my + a$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则有 $M_1(-a, y_1)$, $N_1(-a, y_2)$.

由

$$\begin{cases} x = my + a, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

消去 x 可得 $y^2 - 2mpy - 2ap = 0$.

从而有

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2mp, \\ y_1 y_2 = -2ap. \end{cases}$$

于是 $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2a = 2(m^2 p + a)$.

又由 $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$, 可得 $x_1 x_2 = \frac{(y_1 y_2)^2}{4p^2} = \frac{(-2ap)^2}{4p^2} = a^2$.

(1) 如图 1, 当 $a = \frac{p}{2}$ 时, 点 $A\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 即为抛物线的焦点, l 为准线 $x = -\frac{p}{2}$.

此时 $M_1\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$, $N_1\left(-\frac{p}{2}, y_2\right)$, 并由 可得 $y_1 y_2 = -p^2$.

证法一: 因为 $\overrightarrow{AM_1} = (-p, y_1)$, $\overrightarrow{AN_1} = (-p, y_2)$,

所以 $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AN_1} = p^2 + y_1 y_2 = p^2 - p^2 = 0$, 即 $AM_1 \perp AN_1$.

证法二: 因为 $k_{AM_1} = -\frac{y_1}{p}$, $k_{AN_1} = -\frac{y_2}{p}$,

所以 $k_{AM_1} \cdot k_{AN_1} = \frac{y_1 y_2}{p^2} = \frac{-p^2}{p^2} = -1$, 即 $AM_1 \perp AN_1$.

(2) 存在 $\lambda = 4$, 使得对任意的 $a > 0$, 都有 $S_2^2 = 4S_1 S_3$ 成立. 证明如下:

证法一: 记直线 l 与 x 轴的交点为 A_1 , 则 $|OA| = |OA_1| = a$. 于是有

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot |MM_1| \cdot |A_1 M_1| = \frac{1}{2} (x_1 + a) |y_1|,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot |M_1 N_1| \cdot |AA_1| = a |y_1 - y_2|,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot |NN_1| \cdot |A_1 N_1| = \frac{1}{2} (x_2 + a) |y_2|,$$

所以 $S_2^2 = 4S_1 S_3 \iff (a |y_1 - y_2|)^2 = (x_1 + a) |y_1| \cdot (x_2 + a) |y_2|$

$$\iff a^2 [(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2] = [x_1 x_2 + a(x_1 + x_2) + a^2] |y_1 y_2|.$$

将 、 、 代入上式化简可得

$$a^2 (4m^2 p^2 + 8ap) = 2ap (2am^2 p + 4a^2) \iff 4a^2 p (m^2 p + 2a) = 4a^2 p (m^2 p + 2a).$$

上式恒成立, 即对任意 $a > 0$, $S_2^2 = 4S_1 S_3$ 成立.

证法二: 如图 2. 连结 MN_1 , NM_1 , 则由 $y_1 y_2 = -2ap$, $y_1^2 = 2px_1$ 可得

$$k_{OM} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{2p}{y_1} = \frac{2py_2}{y_1 y_2} = \frac{2py_2}{-2ap} = \frac{y_2}{-a} = k_{ON_1},$$

所以直线 MN_1 经过原点 O ,

同理可证直线 NM_1 也经过原点 O .

又 $|OA| = |OA_1| = a$, 设 $|M_1A_1| = h_1$, $|N_1A_1| = h_2$, $|MM_1| = d_1$, $|NN_1| = d_2$, 则

$$S_1 = \frac{1}{2}d_1h_1,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2a(h_1 + h_2) = a(h_1 + h_2),$$

$$S_3 = \frac{1}{2}d_2h_2.$$

因为 $MM_1 \parallel NN_1 \parallel AA_1$, 所以 $\triangle OA_1M_1 \sim \triangle NN_1M_1$, $\triangle OA_1N_1 \sim \triangle MM_1N_1$,

所以 $\frac{a}{d_2} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}$, $\frac{a}{d_1} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}$, 即 $a(h_1 + h_2) = h_1d_2 = h_2d_1$.

$$\text{而 } \lambda = \frac{S_2^2}{S_1S_3} = \frac{4a^2(h_1 + h_2)^2}{d_1h_1d_2h_2} = 4 \cdot \frac{a(h_1 + h_2)}{h_1d_2} \cdot \frac{a(h_1 + h_2)}{h_2d_1}.$$

将 代入, 即得 $\lambda = 4$, 故对任意 $a > 0$, $S_2^2 = 4S_1S_3$ 成立.

【实测数据】本题阅卷数据如下.

题号	满分	平均分	难度	区分度
20	14	4.48	0.32	0.75
20(1)	6	3.42	0.57	0.73
20(2)	8	1.06	0.13	0.53

新答案 (来源: 4.4 多个量词的问题 (3) 向量、几何.md): (1) (i) 当直线 l 的斜率不存在时, P , Q 两点关于 x 轴对称, 所以 $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$.

因为 $P(x_1, y_1)$ 在椭圆上, 因此 $\frac{x_1^2}{3} + \frac{y_1^2}{2} = 1$.

又因为 $S_{\triangle OPQ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $|x_1| \cdot |y_1| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

由 、 得 $|x_1| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $|y_1| = 1$.

此时 $x_1^2 + x_2^2 = 3$, $y_1^2 + y_2^2 = 2$.

(ii) 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$,

由题意知 $m \neq 0$, 将其代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 得

$$(2 + 3k^2)x^2 + 6kmx + 3(m^2 - 2) = 0.$$

其中 $\Delta = 36k^2m^2 - 12(2 + 3k^2)(m^2 - 2) > 0$,

即 $3k^2 + 2 > m^2$.

(*)

又 $x_1 + x_2 = \frac{-6km}{2 + 3k^2}$, $x_1x_2 = \frac{3(m^2 - 2)}{2 + 3k^2}$,

所以 $|PQ| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{2\sqrt{6}\sqrt{3k^2 + 2 - m^2}}{2 + 3k^2}$.

因为点 O 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, 所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle OPQ} &= \frac{1}{2} |PQ| \cdot d \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2\sqrt{6}\sqrt{3k^2+2-m^2}}{2+3k^2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{6}|m|\sqrt{3k^2+2-m^2}}{2+3k^2}. \end{aligned}$$

又 $S_{\triangle OPQ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 整理得 $3k^2+2=2m^2$, 且符合 (*) 式. 此时

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{-6km}{2+3k^2}\right)^2-2\times\frac{3(m^2-2)}{2+3k^2}=3,$$

$$y_1^2+y_2^2=\frac{2}{3}(3-x_1^2)+\frac{2}{3}(3-x_2^2)=4-\frac{2}{3}(x_1^2+x_2^2)=2.$$

综上所述, $x_1^2+x_2^2=3$; $y_1^2+y_2^2=2$, 结论成立.

(2) 解法一: (i) 当直线 l 的斜率不存在时,

由 (1) 知 $|OM|=|x_1|=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $|PQ|=2|y_1|=2$,

因此 $|OM|\cdot|PQ|=\frac{\sqrt{6}}{2}\times 2=\sqrt{6}$.

(ii) 当直线 l 的斜率存在时, 由 (1) 知:

$$\begin{aligned} \frac{x_1+x_2}{2} &= \frac{-3k}{2m}, \\ \frac{y_1+y_2}{2} &= k\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+m = \frac{-3k^2}{2m}+m = \frac{-3k^2+2m^2}{2m} = \frac{1}{m}, \\ |OM|^2 &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 = \frac{9k^2}{4m^2} + \frac{1}{m^2} = \frac{6m^2-2}{4m^2} = \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{m^2}\right), \\ |PQ|^2 &= (1+k^2) \frac{24(3k^2+2-m^2)}{(2+3k^2)^2} = \frac{2(2m^2+1)}{m^2} = 2\left(2+\frac{1}{m^2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$|OM|^2\cdot|PQ|^2 = \frac{1}{2}\times\left(3-\frac{1}{m^2}\right)\times 2\times\left(2+\frac{1}{m^2}\right) = \left(3-\frac{1}{m^2}\right)\left(2+\frac{1}{m^2}\right) \leq \left(\frac{3-\frac{1}{m^2}+2+\frac{1}{m^2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

所以 $|OM|\cdot|PQ|\leq\frac{5}{2}$, 当且仅当 $3-\frac{1}{m^2}=2+\frac{1}{m^2}$, 即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时, 等号成立.

综合 (i) (ii) 得 $|OM|\cdot|PQ|$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$.

解法二: 因为

$$4|OM|^2+|PQ|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=2[(x_1^2+x_2^2)+(y_1^2+y_2^2)]=10.$$

所以 $2|OM|\cdot|PQ|\leq\frac{4|OM|^2+|PQ|^2}{2}=\frac{10}{2}=5$.

即 $|OM|\cdot|PQ|\leq\frac{5}{2}$, 当且仅当 $2|OM|=|PQ|=\sqrt{5}$ 时等号成立.

因此 $|OM|\cdot|PQ|$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$.

(3) 椭圆 C 上不存在三点 D, E, G , 使得 $S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

证明: 假设存在 $D(u, v)$, $E(x_1, y_1)$, $G(x_2, y_2)$ 满足 $S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

由 (1) 得

$$u^2 + x_1^2 = 3, u^2 + x_2^2 = 3, x_1^2 + x_2^2 = 3 \quad v^2 + y_1^2 = 2, v^2 + y_2^2 = 2, y_1^2 + y_2^2 = 2$$

解得 $u^2 = x_1^2 = x_2^2 = \frac{3}{2}$; $v^2 = y_1^2 = y_2^2 = 1$.

因此 u, x_1, x_2 只能从 $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ 中选取, v, y_1, y_2 只能从 ± 1 中选取,

因此 D, E, G 只能在 $\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{2}, \pm 1\right)$ 这四点中选取三个不同点.

而这三点的两两直线中必有一条过原点,

与 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 矛盾.

所以椭圆 C 上不存在满足条件的三点 D, E, G .

综上所述, 存在圆心在原点的圆 $x^2 + y^2 = \frac{8}{3}$ 满足题意, 且 $\frac{4\sqrt{6}}{3} \leq |AB| \leq 2\sqrt{3}$.

解法二: 过原点 O 作 $OD \perp AB$, 垂足为 D , 则 D 为切点.

设 $\angle OAB = \theta$,

则 θ 为锐角, 且 $|AD| = \frac{2\sqrt{6}}{3\tan\theta}$, $|BD| = \frac{2\sqrt{6}}{3}\tan\theta$,

所以 $|AB| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \right)$.

因为 $2 \leq |OA| \leq 2\sqrt{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \tan\theta \leq \sqrt{2}$.

令 $x = \tan\theta$, 易证: 当 $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 时, $|AB| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \left(x + \frac{1}{x}\right)$ 单调递减.

当 $x \in [1, \sqrt{2}]$ 时, $|AB| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \left(x + \frac{1}{x}\right)$ 单调递增.

所以 $\frac{4\sqrt{6}}{3} \leq |AB| \leq 2\sqrt{3}$.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37. 新答案 (来源: 3.4 性质的证明 (4) 解析几何.md): (1) 证法 1: 由抛物线的定义得

$$|MF| = |MM_1|,$$

$$|NF| = |NN_1|.$$

所以 $\angle MFM_1 = \angle MM_1F$, $\angle NFN_1 = \angle NN_1F$.

如图, 设准线 l 与 x 轴的交点为 F_1 .

因为 $MM_1 \parallel NN_1 \parallel FF_1$, 所以 $\angle F_1FM_1 = \angle MM_1F$, $\angle F_1FN_1 = \angle NN_1F$.

而 $\angle F_1FM_1 + \angle MFM_1 + \angle F_1FN_1 + \angle NFN_1 = 180^\circ$, 即 $2\angle F_1FM_1 + 2\angle F_1FN_1 = 180^\circ$,

所以 $\angle F_1FM_1 + \angle F_1FN_1 = 90^\circ$, 即 $\angle M_1FN_1 = 90^\circ$,

故 $FM_1 \perp FN_1$.

证法 2: 依题意, 焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线 l 的方程为 $x = -\frac{p}{2}$.

设点 M, N 的坐标分别为 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $x = my + \frac{p}{2}$, 则有

$$M_1\left(-\frac{p}{2}, y_1\right),$$

$$N_1\left(-\frac{p}{2}, y_2\right),$$

$$\overrightarrow{FM_1} = (-p, y_1),$$

$$\overrightarrow{FN_1} = (-p, y_2).$$

由

$$\begin{cases} x = my + \frac{p}{2}, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

得 $y^2 - 2myp - p^2 = 0$.

于是, $y_1 + y_2 = 2mp$, $y_1y_2 = -p^2$.

所以 $\overrightarrow{FM_1} \cdot \overrightarrow{FN_1} = p^2 + y_1y_2 = p^2 - p^2 = 0$, 故 $FM_1 \perp FN_1$.

(2) $S_2^2 = 4S_1S_3$ 成立, 证明如下:

证法 1: 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则由抛物线的定义得

$$|MM_1| = |MF| = x_1 + \frac{p}{2},$$

$$|NN_1| = |NF| = x_2 + \frac{p}{2}.$$

于是

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot |MM_1| \cdot |F_1M_1| = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) |y_1|,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot |M_1N_1| \cdot |FF_1| = \frac{1}{2} p |y_1 - y_2|,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot |NN_1| \cdot |F_1N_1| = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{p}{2}\right) |y_2|.$$

因为

$$\begin{aligned} S_2^2 = 4S_1S_3 &\iff \left(\frac{1}{2}p|y_1 - y_2|\right)^2 = 4 \times \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) |y_1| \cdot \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{p}{2}\right) |y_2| \\ &\iff \frac{1}{4}p^2 [(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2] = \left[x_1x_2 + \frac{p}{2}(x_1 + x_2) + \frac{p^2}{4}\right] |y_1y_2|, \end{aligned}$$

将

$$\begin{cases} x_1 = my_1 + \frac{p}{2}, \\ x_2 = my_2 + \frac{p}{2}, \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2mp, \\ y_1 y_2 = -p^2. \end{cases}$$

代入上式化简得

$$p^2 (m^2 p^2 + p^2) = p^2 (m^2 p^2 + p^2),$$

此式恒成立. 故 $S_2^2 = 4S_1S_3$ 成立.

证法 2: 设直线 MN 的倾角为 α , $|MF| = r_1$, $|NF| = r_2$, 则由抛物线的定义得 $|MM_1| = |MF| = r_1$, $|NN_1| = |NF| = r_2$.

因为 $MM_1 \parallel NN_1 \parallel FF_1$, 所以 $\angle FMM_1 = \alpha$, $\angle FNN_1 = \pi - \alpha$.

于是 $S_1 = \frac{1}{2}r_1^2 \sin \alpha$, $S_3 = \frac{1}{2}r_2^2 \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}r_2^2 \sin \alpha$.

在 $\triangle FMM_1$ 和 $\triangle FNN_1$ 中, 由余弦定理可得

$$|FM_1|^2 = 2r_1^2 - 2r_1^2 \cos \alpha = 2r_1^2 (1 - \cos \alpha),$$

$$|FN_1|^2 = 2r_2^2 + 2r_2^2 \cos \alpha = 2r_2^2 (1 + \cos \alpha).$$

由 (1) 的结论, 得 $S_2 = \frac{1}{2}|FM_1| \cdot |FN_1|$,

所以 $S_2^2 = \frac{1}{4}|FM_1|^2 \cdot |FN_1|^2 = \frac{1}{4} \cdot 4r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = r_1^2 r_2^2 \sin^2 \alpha = 4S_1S_3$,

即 $S_2^2 = 4S_1S_3$, 得证.

【实测数据】本题阅卷数据如下.

题号	满分	平均分	难度	区分度
文 20	13	3.23	0.25	0.74
文 20(1)	6	2.32	0.39	0.74
文 20(2)	7	0.91	0.13	0.55

38.

39. 设 $x_1^2 + x_2^2 = p$, $y_1^2 + y_2^2 = q$. 假设存在 $D(u, v)$, $E(x_1, y_1)$, $G(x_2, y_2)$ 满足 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

由 (1) 得

$$\begin{aligned} u^2 + x_1^2 &= p, & u^2 + x_2^2 &= p, & x_1^2 + x_2^2 &= p \\ v^2 + y_1^2 &= q, & v^2 + y_2^2 &= q, & y_1^2 + y_2^2 &= q \end{aligned}$$

解得 $u^2 = x_1^2 = x_2^2 = \frac{p}{2}$; $v^2 = y_1^2 = y_2^2 = \frac{q}{2}$.

因此 u, x_1, x_2 只能从 $\pm\sqrt{\frac{p}{2}}$ 中选取, v, y_1, y_2 只能从 $\pm\sqrt{\frac{q}{2}}$ 中选取, D, E, G 只能在 $(\pm\sqrt{\frac{p}{2}}, \pm\sqrt{\frac{q}{2}})$ 这四点中选取三个不同点.

而这三点的两两直线中必有一条过原点，即 O 必与 D, E, G 中的两点共线。而共线三点不构成三角形，这与 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 矛盾。所以椭圆 C 上不存在满足条件的三点 D, E, G 。

40.

41.

42.

43.

44.

45.

46.

47.

48.

第一章 解析几何

1.5 相关量的代数表示

B 组

1. F 为 x 轴正半轴上的一个动点, 以 F 为焦点、 O 为顶点作抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 。设 P 为第一象限内抛物线 C 上的一点, Q 为 x 轴负半轴上一点, 设 $Q(-a, 0)$, 使得 PQ 为抛物线 C 的切线, 且 $|PQ| = 2$ 。圆 C_1, C_2 均与直线 OP 切于点 P , 且均与 x 轴相切。
 - (1) 试求出 a, p 之间的关系;
 - (2) 是否存在点 F , 使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值. 若存在, 求出点 F 的坐标; 若不存在, 请说明理由。
2. 【2025 “集英苑测试”（网络联考）18】已知曲线 $C_1: y = x^2$ 和 $C_2: y = (x-3)^2$, 作斜率为 k 的两条直线 l_1, l_2 。 l_1 与 C_1 交于 A, B 两点, l_2 与 C_1 交于 A', B' 两点 (A 在 B 的左侧, A' 在 B' 的左侧), 已知 A 关于 B 的对称点 D , A' 关于 B' 的对称点 D' 均在 C_2 上。
 - (1) 证明: $-\frac{3}{8} < k < 3$; (2) 求 $|AB| \cdot |A'B'|$ 的最大值。
3. 【2021 浙江 21】已知 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, $M(-1, 0)$ 。过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 若斜率为 2 的直线 l 与直线 MA, MB, AB, x 轴依次交于点 P, Q, R, N , 且满足 $|RN|^2 = |PN| \cdot |QN|$, 求直线 l 在 x 轴上截距的取值范围。

1.

2.

3.

1.5.1 轨迹、定点等的代数表示

本节习题

A 组

1. 设 A, B 分别是直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的动点, $|AB| = 3\sqrt{3}$, O 为坐标原点, 动点 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 求 Q 的轨迹方程。
2. 【2024 九省联考 18 (1)】已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 过 F 与 l 垂直的直线交 C 于 D, E 两点, 其中 B, D 在 x 轴上方, M, N 分别为 AB, DE 的中点. 证明: 直线 MN 过定点;
3. 【2004 浙江 21】已知双曲线的中心在原点, 右顶点为 $A(1, 0)$, 点 P, Q 在双曲线的右支上, 点 $M(m, 0)$ 到直线 AP 的距离为 1.
 - (1) 若直线 AP 的斜率为 k , 且有 $|k| \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$, 求实数 m 的取值范围;
 - (2) 当 $m = \sqrt{2} + 1$ 时, $\triangle APQ$ 的内心恰好是 M , 求此双曲线的方程。
4. 【2018 北京 20】已知椭圆 $M: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B .
 - (1) 若 $k = 1$, 求 $|AB|$ 的最大值;
 - (2) 设 $P(-2, 0)$, 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D , 若 C, D 和点 $Q\left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 共线, 求 k 。
5. 【2020 新高考 I 卷 22】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 点 $A(2, 1), M, N$ 在 C 上, 且 $AM \perp AN, AD \perp MN$, D 为垂足. 证明: 存在定点 Q , 使得 $|DQ|$ 为定值。
6. 【2020 全国 I 卷理 20】已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 的左、右顶点, P 为直线 $x = 6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C , PB 与 E 的另一交点为 D . 证明: 直线 CD 过定点。
7. 【2022 广州零模 21】已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = 1$. 设 P 为圆 M 外一点, 过点 P 作圆 M 的两条切线, 分别交 C 于两个不同的点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$ 和点 $Q(x_3, y_3)$, 点 $R(x_4, y_4)$, 且 $y_1 y_2 y_3 y_4 = 16$, 证明: P 在一条定曲线上。
8. 【2026G12 名校协作体 18】已知椭圆 $C: \frac{4}{3}x^2 + 2y^2 = 1$, 动点 P 在抛物线 $E: y^2 = x + 1$ 上, 过点 P 作椭圆 C 的两条切线分别交 E 于不同的两点 A, B .
 - (2) 若切线 AP 与椭圆 C 的切点恰好是 AP 的中点, 求直线 AP 的方程;
 - (3) 证明: 直线 AB 经过定点。

1.

2.

3. 新答案 (来源: 021-040 简单单调性与简单极值最值.md):

$$(1) f'(x) = 2x(x-a) + x^2 - 4 = 3x^2 - 2ax - 4.$$

$$(2) f'(-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, f'(x) = 3x^2 - x - 4 = 0, f(x) \text{ 的两个极值点分别为 } x = -1, x = \frac{4}{3},$$

$f(x)$ 的最值只可能取在极值点或区间端点处.

$$f(-2) = 0, f(-1) = \frac{9}{2}, f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{50}{27}, f(2) = 0.$$

$$\text{因此 } f(x) \text{ 在 } [-2, 2] \text{ 上最小值为 } -\frac{50}{27}, \text{ 最大值为 } \frac{9}{2}.$$

$$(3) \text{ 依题意 } 3x^2 - 2ax - 4 \geq 0 \text{ 在 } (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a \leq \frac{3}{2}x - \frac{2}{x} (x \geq 2), \\ a \geq \frac{3}{2}x - \frac{2}{x} (x \leq -2), \end{cases}$$

$$\text{解得 } a \in [-2, 2].$$

4.

5.

6.

7.

8.

第一章 解析几何

1.5 相关量的代数表示

第一章 解析几何

1.5 相关量的代数表示