

第一章 解析几何

1.4 其他类型的曲线与一般分析方式

第一章 解析几何

1.4 其他类型的曲线与一般分析方式

习题

A 组

- 【2006 辽宁理 10】求直线 $y = 2k$ 与曲线 $9k^2x^2 + y^2 = 18k^2|x|$ ($k \in \mathbb{R}$ 且 $k \neq 0$) 的公共点的个数.
- 【2026 佛山一模 8】下列曲线中, 与曲线 $y = x^3 - 3x$ 交点个数最多的是
 (A) $y = -2x$ (B) $|x| + |y| = 2$ (C) $y^2 = 4$ (D) $|y| = x^2$
- 【2024 新高考 I 卷 11】(多选) 设计一条美丽的丝带, 其造型可以看作图中的曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O , 且 C 上的点满足: 横坐标大于 -2 ; 到点 $F(2, 0)$ 的距离与到定直线 $x = a$ ($a < 0$) 的距离之积为 4, 则
 (A) $a = -2$ (B) 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上
 (C) C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1 (D) 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时, $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$
- 【2024 “fiddie 模拟测试” 11】(多选) 公元前 180 年, 古希腊数学家 Diocle 研究倍立方问题时发现了蔓叶线, 已知蔓叶线 $C: y^2 = \frac{x^3}{1-x}$, $A(1, 0), B(0, 2)$, 线段 AB 与曲线 C 交于点 M , 过点 A 作 x 轴的垂线, 与直线 OM 交于点 D , 以 OA 为直径作圆, 交直线 OD 于点 Q , 则下列命题正确的是
 (A) 若点 $P(x_0, y_0)$ 在 C 上, 则 $x_0 \in [0, 1)$ (B) $|OM| = 1$
 (C) $AD = \sqrt[3]{2}$ (D) $|OQ| = |MD|$
- 【2026 “漫游数海” 预测卷 11】曲线 $C_1: x^2y = 8$ 沿向量 $e = (1, 2)$ 平移后所得曲线 C_2 与直线 $l: 2x + y - a = 0$ 相切, 则
 (A) $a = 10$ (B) l 与 C_2 有且仅有 1 个公共点
 (C) C_1 与 C_2 有 2 个公共点 (D) l 与 C_1 有 3 个公共点
- 【2023 上海 16 改编】(多选) 对于一段曲线 C , 若存在 M 点, 使得对于任意的 $P \in C$, 都存在 $Q \in C$, 使得 $|PM| \cdot |QM| = 1$, 则称曲线 C 为“自相关曲线”, 对于下列曲线, 其某种情况可能成为“自相关曲线”的是
 (A) 直线 (B) 椭圆
 (C) 双曲线 (D) $y = k \frac{x^2}{|x|} + b$ ($k, b \in \mathbb{R}_+$)
- 【2006 上海理 11】若曲线 $y^2 = |x| + 1$ 与直线 $y = kx + b$ 没有公共点, 则 k, b 分别应满足的条件是 (Δ) .
- 【2011 北京理 14】曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ 的距离的积等于常数 a^2 ($a > 1$) 的点的轨迹. 给出下列三个结论:
 (1) 曲线 C 过坐标原点;
 (2) 曲线 C 关于坐标原点对称;
 (3) 若点 P 在曲线 C 上, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于 $\frac{1}{2}a^2$;
 其中, 所有正确结论的序号是 (Δ)

9. 【2019 北京 8】曲线 $C: x^2 + y^2 = 1 + |x|y$ 的形状如图所示, 给出以下三个结论:

- (1) 曲线 C 恰好经过 6 个整点 (横、纵坐标均为整数的点);
- (2) 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$;
- (3) 曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.

其中正确的是 (Δ)

10. 【旧教材必修二例题】已知 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 外接圆半径为 R , $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c , 用解析几何的方法证明: $R = \frac{abc}{4S}$ 。

1.

2.

3.

4.

5.

6. 对于 (1), 考虑椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $M(x_0, y_0)$, 对任意 $P(x_1, y_1)$, 等式 $|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{QM}| = 1$ 可转化为关于 $Q(x, y)$ 的方程

$$|\overrightarrow{PM}| \cdot [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = 1. \quad *$$

当 $M \notin \Gamma$ 时, 对任意点 P , 都有 $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \neq 0$, 所以上述方程即 Q 位于以 M 为圆心、 $\frac{1}{|\overrightarrow{PM}|}$ 为半径的圆 C 上.

当 M 离椭圆充分远 (记为 M_1) 的时候, $\frac{1}{|\overrightarrow{PM}|}$ 很小, 所以圆 C 与椭圆 Γ 相离;

当 M 离椭圆充分近 (记为 M_2) 的时候, $\frac{1}{|\overrightarrow{PM}|}$ 很大, 所以圆 C 位于椭圆 Γ 内部 (内含).

所以如果点 M 从 M_1 开始沿着线段 M_1M_2 移动到 M_2 , 圆 C 与椭圆 Γ 会经历内含 $\Rightarrow$ 内切 $\Rightarrow$ 相交 $\Rightarrow$ 外切 $\Rightarrow$ 相离的过程, 即必定存在一点 M , 使得对任意 $P \in \Gamma$, 使得 $Q \in \Gamma$ 并且 Q 满足方程 (*), 即存在 $Q \in \Gamma$ 使得 $|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{QM}| = 1$. 因此 (1) 是真命题.

对于 (2), 对任意点 M , 若 M 在双曲线 Γ 上, 则当 $P = M$ 时, $|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{QM}| = 0$, 不符合要求;

若 M 不在双曲线 Γ 上, 则 M 到 Γ 的距离 $d > 0$, 此时存在 $P \in \Gamma$ 离 M 充分远, 使得 $|\overrightarrow{PM}| > \frac{1}{d}$, 从而 $|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{QM}| > \frac{1}{d} \cdot d = 1$, 不符合要求. 故 (2) 是假命题.

综上, (1) 是真命题, (2) 是假命题.

7.

8. 新答案 (来源: 1.25 曲线的方程和平面点集.md): 6; 6, 7, 8

【解题思路】解法 1: 如图, 线段 AD , BC 与直线 $y = 1$, $y = 2$ 的交点为 E, F, G, H , 则四边形 $ABCD$ 内部的整点只能出现在线段 EF, GH 上, 而 $|EF| = |GH| = 4$, 所以符合条件的整点最多有 8 个, 最少有 6 个, 通过作图可知 $N(t)$ 的所有可能取值为 6, 7, 8.

解法 2: 如图, 设点 E 坐标为 $(t, 1)$, 则 $F(t+4, 1)$, $H(2t, 2)$, $G(2t+4, 2)$, 分四种情况讨论:

(1) 若 $t \in \mathbb{Z}$, 则 $2t \in \mathbb{Z}$, 此时线段 EF, GH 上符合条件的整点各有 3 个, 即 $N(t) = 6$.

(2) 若 $t \notin \mathbb{Z}$, 但 $2t \in \mathbb{Z}$, 此时线段 EF, GH 上符合条件的整点分别为 4 个和 3 个, 即 $N(t) = 7$.

(3) 若 $2t \notin \mathbb{Z}$, 则 $t \notin \mathbb{Z}$, 此时线段 EF, GH 上符合条件的整点各有 4 个, 即 $N(t) = 8$.

综上所述, $N(t)$ 的所有可能取值为 6, 7, 8.

【实测数据】本题文科平均分 1.69 分, 难度为 0.34, 相关系数 0.57, 鉴别指数 0.49.

本题第一个空 3 分, 第二个空 2 分. 得 0 分的比率为 47.12%, 得 2 分的比率为 0.05%, 得 3 分的比率为 47.72%, 得 5 分的比率为 5.12%. 第一个空的得分率为 0.48, 第二个空的得分率为 0.0517.

【易错警示】 本题的解答过程中考生出现的主要错误有

题型新, 读不懂题.

不会用实验、探究、归纳等思维方法去分析问题, 不会通过由特殊到一般的方法寻找规律.

探索不彻底, 三种情况没有找全.

新答案 (来源: 1.25 曲线的方程和平面点集.md): C

【解题思路】 经过了 $(-1, 0), (1, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 1), (-1, 1)$.

只需证 $x^2 + y^2 \leq 2$. 由基本不等式, $x^2 + y^2 = 1 + |x|y \leq 1 + \frac{x^2 + y^2}{2}$, 化简得 $x^2 + y^2 \leq 2$.

第一、二象限部分的面积比 1 大, 而第三、四象限的面积比 $\frac{1}{2}$ 大, 所以错误. (上面图中红色线段围成的区域面积就是 3)

注: 事实上, 利用正交变换, 可以把 $x < 0$ 的部分逆时针旋转 45° , 把 $x > 0$ 的部分顺时针旋转 45° 然后再对得到的图形关于 x 轴作用对称变换, 得到的曲线是由两个“半椭圆”构成的图形, 如下图.

绕 O 逆时针旋转 45°

绕 O 顺时针旋转 45° , 再关于 x 轴对称变换

具体而言, 在 $x < 0$ 的部分令

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{-u+v}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

; 在 $x > 0$ 的部分令

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

代入 $x^2 + y^2 = 1 + |x|y$,

那么曲线方程变为 $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} = 1$, 它是一个半长轴为 $a = \sqrt{2}$ 、半短轴为 $b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 的椭圆, 所以面积的值是

$$S = \pi ab = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \approx 3.627$$

【实测数据】 本题理科难度 0.72, 区分度 0.41. 选 A 的考生占 24.93%, 选 B 的考生占 3.66%, 选 C 的考生占 69.07%, 选 D 的考生占 2.29%.

【易错警示】 考生失分的主要原因是:

一、考生代数论证能力较差，当考生通过求曲线与坐标轴的交点发现四个整点 $(1,0)$ 、 $(-1,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(0,-1)$ 时，然后结合图形与验证方程发现 $(1,1)$ 、 $(-1,1)$ 满足题意，所以共 6 个整点，所以 对，但是对 就判断不了，主要是对方程 $x^2 + y^2 = 1 + |x|y$ 与曲线 C 上任意一点 P 到原点的距离 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 之间的关联点找不到，是因为代数变形能力较差，没有消去绝对值与用均值不等式凑目标的意识，也没有配方用三角换元的意识，所以导致 (2) 的判断受阻，就误认为错，从而错选 A 。

二、考生估算意识较差。对于 ，主要是估算判断，但是考生想用定积分的方法求面积，曲线太复杂，无法计算。事实上，在第 的结论下，容易估算出图形的面积大于 3，只能排除 D ，没有的正确判断，无法确认是 B 与 C ，这样也导致丢分。

9.

10.

第一章 解析几何

1.4 其他类型的曲线与一般分析方式

B 组

- 【2025 广州一模 11】**如图, 半径为 1 的动圆 C 沿着圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 外侧无滑动地滚动一圈, 圆 C 上的点 $P(a, b)$ 形成的外旋轮线 Γ , 因其形状像心形又称心脏线, 已知运动开始时点 P 与点 $A(1, 0)$ 重合, 以下说法正确的有

(A) 曲线 Γ 上存在到原点的距离超过 $2\sqrt{3}$ 的点 (B) 点 $(1, 2)$ 在曲线 Γ 上

(C) 曲线 Γ 和直线 $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 有两个交点 (D) $|b| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- 已知曲线 $C: (x^2 + y^2 - 1)^3 - 7\sin^2 x + 7\cos^2 y = 6$, 下列说法正确的是

(A) 曲线 C 过原点 O (B) 曲线 C 关于 $y = x$ 对称

(C) 曲线 C 上存在一点 P , 使得 $|OP| = 1$ (D) 若 $P(x, y)$ 为曲线 C 上一点, 则 $|x| + |y| < 3$
- 【2021 雅礼中学届高三月考 (八) 12】(多选)**

已知集合 $P = \{(x, y) | (x - \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 = 4, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, 由集合中所有的点组成的图形如图中阴影部分所示, 中间白色部分形如“水滴”, 下列命题正确的是

(A) “水滴”与 y 轴相交, 最高点记为 A , 则点 A 的坐标为 $(0, 1)$

(B) 若 $M \in P$, 则 $|OM| \leq 3$

(C) 阴影部分与 y 轴相交, 最高点和最低点分别记为, 则 $|CD| = 3 + \sqrt{3}$

(D) 白色“水滴”图形的面积是 $\frac{11}{6}\pi - \sqrt{3}$

1.

2.

3.

第一章 解析几何

1.4 其他类型的曲线与一般分析方式

第一章 解析几何

1.4 其他类型的曲线与一般分析方式