

第一章 解析几何

1.3 圆锥曲线的基本概念

1.3.1 圆锥曲线的基本定义

定义 1.3.1 (椭圆). 设 F_1, F_2 是平面内的两个定点, a 是一个常数, 且 $2a > |F_1 F_2|$, 称平面内满足 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 的动点 P 的轨迹为**椭圆**. 称 F_1, F_2 为椭圆的**焦点**, 两个焦点之间的距离 $|F_1 F_2|$ 为椭圆的**焦距**.

特别地, 如果 F_1 与 F_2 重合, 则动点 P 的轨迹为圆。

问题 1.1 记 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 实数 b 满足 $a^2 = b^2 + c^2$, 证明: P 的轨迹可被化简为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

由此证明了椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0, a^2 = b^2 + c^2)$$

在椭圆的图象上标出 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b), F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 称 A_1, A_2 为椭圆的**左顶点和右顶点**, $A_1 A_2$ 为椭圆的**长轴**; 称 B_1, B_2 为椭圆的**下顶点和上顶点**, $B_1 B_2$ 为椭圆的**短轴**. $e = \frac{c}{a}$ 为椭圆的**离心率**, 可知 $0 < e < 1$ 。

双曲线 设 F_1, F_2 是平面内的两个定点, a 是一个常数, 且 $|F_1 F_2| > 2a$, 称平面内满足 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$ 的动点 P 的轨迹为**双曲线**, 称 F_1, F_2 为双曲线的**焦点**, 两个焦点之间的距离 $|F_1 F_2|$ 为双曲线的**焦距**。

问题 1.2 记 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 实数 b 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 证明: P 的轨迹可被化简为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

由此证明了双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, a^2 + b^2 = c^2)$$

在双曲线的图象上标出 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$, 称 A_1, A_2 为双曲线的**左顶点和右顶点**, $A_1 A_2$ 为双曲线的**实轴**, $B_1 B_2$ 为双曲线的**虚轴**. $e = \frac{c}{a}$ 为双曲线的**离心率**, 可知 $e > 1$ 。

称直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 为双曲线的**渐近线**。

抛物线 设 F 是平面内的一个定点, l 是不过点 F 的一条定直线, 称平面上到点 F 与直线 l 距离相同的点的轨迹为**抛物线**, 称 F 为抛物线的**焦点**, 直线 l 为抛物线的**准线**。

问题 1.3 记 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 准线为 $x = -\frac{p}{2}$, 证明: P 的轨迹可被化简为 $y^2 = 2px$

由此证明了抛物线的标准方程为

$$y^2 = 2px (p > 0)$$

1.3.2 圆锥曲线的第二定义

定义 (圆锥曲线的第二定义) 设 F 是平面内的一个定点, l 是不过点 F 的一条定直线, 平面上到点 F 的距离与到 l 的距离之比为定值 e 的动点的轨迹称为圆锥曲线, 其中定点 F 称为圆锥曲线的**焦点**, 定直线 l 称为圆锥曲线的**准线**。

问题 1.4 (1) 利用余弦定理证明焦半径公式。

(2) 利用准线的定义证明焦半径公式。

(3) 利用直线联立证明焦半径公式。

1.3.3 平面与圆锥的交线

第一章 解析几何

1.3 圆锥曲线的基本概念

习题

A 组

1. 【上海高考】已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的左顶点为 A , $B(0, 1)$, P 是 C 右支上的动点, $\triangle ABP$ 的面积是否存在最大值? 是否存在最小值?
2. 已知椭圆 C_1, C_2 的焦点分别在 x 轴, y 轴上, 且 C_2 经过 C_1 的两个顶点与两个焦点, 设 C_1, C_2 的离心率分别是 e_1, e_2 , 则

(A) $e_1^2 < \frac{1}{2}$ 且 $e_1^2 + e_2^2 < 1$	(B) $e_1^2 < \frac{1}{2}$ 且 $e_1^2 + e_2^2 > 1$
(C) $e_2^2 < \frac{1}{2}$ 且 $e_1^2 + e_2^2 < 1$	(D) $e_2^2 < \frac{1}{2}$ 且 $e_1^2 + e_2^2 > 1$
3. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + \sin B = 2 \sin C$, 则 A, B, C 中

(A) 至少有一个小于 60°	(B) 至少有两个不大于 60°
(C) 至多有一个小于 60°	(D) 至少有两个不大于 60°
4. 【2024 “数海漫游一摸” (网络联考) 7】已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 过 F_2 的一条直线与 C 交于 A, B 两点, 且 $AF_1 \perp AB$, $|BF_2| = 1$, 求椭圆长轴长的最小值.
5. 【2025 集英苑 5 月 (网络联考) 8】已知双曲线 $C_1: x^2 - y^2 = 1, C_2: 2x^2 - y^2 = 1$, 直线 l 与 C_1, C_2 分别有 a, b 个交点

(A) 若 $a = 2$, 则 $b = 2$	(B) 若 $b = 2$, 则 $a = 2$	(C) 若 $a = 1$, 则 $b \geq 1$	(D) 若 $b = 1$, 则 $a \leq 1$
---------------------------	---------------------------	------------------------------	------------------------------
6. 【2025 武汉九调 8】设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 椭圆上的点 P 满足 $PF_1 \perp PF_2$, 直线 PF_1 和直线 PF_2 分别和椭圆交于异于点 P 的点 A 和点 B , 若 $\frac{|F_1A|}{|F_2B|} = \frac{2}{3}$, 求该椭圆的离心率.
7. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , A, B 分别为椭圆的上、下顶点, P 是椭圆上一点, AP, BF 相互平行, $|AF| = |PB|$ 求该椭圆的离心率的平方.
8. 【命题标准样题 9】(多选) 下述四个命题中, 假命题是

(A) 要唯一确定抛物线, 只需给出准线和抛物线上的一点
(B) 要唯一确定以坐标原点为中心的椭圆, 只需给出一个焦点和椭圆上的一点
(C) 要唯一确定以坐标原点为中心的双曲线, 只需给出双曲线上的两点
(D) 要唯一确定以坐标原点为中心的双曲线, 只需给出一条渐近线方程和离心率

9. 【2022 新高考 I 卷 11】(多选) 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 则

(A) C 的准线为 $y = -1$ (B) 直线 AB 与 C 相切 (C) $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$ (D) $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

10. 【2026 新高考 II 卷 11】(多选) 已知抛物线 $E: y^2 = 8x$, 有一斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 过点 $(-1, 0)$, 点 A 在抛物线 E 上, B, C 两点在直线 l 上, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则

(A) 抛物线 E 的准线方程为 $x = -2$

(B) 当直线 l 与抛物线 E 无交点时, $k > \sqrt{2}$

(C) 若直线 l 与抛物线 E 相交于唯一点 B , 则抛物线 E 的焦点在直线 AB 上

(D) 当 $k = 2$ 时, $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{15}$

11. 【2023 全国乙卷理 11 文 12 改编】(多选) 设 A, B 为双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ 上两点, 下列四个点中, 可为线段 AB 中点的是

(A) $(2, 4)$

(B) $(-2, 5)$

(C) $(2, 6)$

(D) $(-2, -7)$

12. 【2026 上海春 11】椭圆 $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 与椭圆 $\Gamma_2: \frac{y^2}{b^2+2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 相交于 A, B, C, D 四点, 且 A, B, C, D 与 Γ_1, Γ_2 的四个焦点在同一个圆上, 求 b^2 。

13. 【2004 湖南理 16】设 F 是椭圆 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{6} = 1$ 的右焦点, 且椭圆上至少有 21 个不同的点 $P_i (i = 1, 2, 3, \dots)$, 使 $|FP_1|, |FP_2|, |FP_3|, \dots$ 组成公差为 d 的等差数列, 求 d 的取值范围。

14. 【2006 四川理 15】如图, 把椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的长轴 AB 分成 8 等分, 过每个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 七个点, F 是椭圆的一个焦点, 求 $|P_1F| + |P_2F| + \dots + |P_7F|$ 。

15. 【2026 “fiddie” 模拟考 14】设双曲线 C 的中心为 O 。若存在 C 上两点 A, B 使得 $|OA| = |OB| = \frac{\sqrt{2}}{2}|AB|$, 求 C 的离心率的取值范围。

16. 【2018 浙江 17】已知点 $P(0, 1)$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m (m > 1)$ 上两点 A, B 满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 求 m 的值, 使得点 B 横坐标的绝对值最大。

17. 【2022 新高考 I 卷 16】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, C 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$ 。过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点。 $|DE| = 6$, 求 $\triangle ADE$ 的周长。

18. 【2025 “fiddie” 模拟考 14】已知等边 $\triangle ABC$ 的三个顶点在抛物线 $y^2 = 4x$ 上, 且 $\triangle ABC$ 的其中一条边所在直线的斜率为 2。记 $\triangle ABC$ 的重心为 G , 求 G 到 x 轴的距离。

19. 解答下述题目

(1) 【2024 “fiddie” 模拟测试二” 2】若抛物线 $y = ax^2$ 的焦点在直线 $y = 2x + 3$ 上, 求 a ;

(2) 【2003 北京理 12 文、13】求以双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的右顶点为顶点, 左焦点为焦点的抛物线的方程;

- (3) 【2001 上海理 5】求抛物线 $x^2 - 4y - 3 = 0$ 的焦点坐标;
- (4) 【2026 新高考 I 卷 12】求双曲线 $5x^2 - 6y^2 = 1$ 的离心率;
- (5) 【2021 新高考 I 卷 21 (1)】已知点 $F_1(-\sqrt{17}, 0), F_2(\sqrt{17}, 0)$, 点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 2$, 求点 M 的轨迹方程;
- (6) 【2012 四川理】动点 M 与平面内两定点 $A(-1, 0), B(2, 0)$ 构成 $\triangle MAB$, 且 $\angle MBA = 2\angle MAB$, 求 M 的轨迹方程.
- (7) 【2004 全国 II 卷理 15】已知中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2 - 2y^2 = 1$ 有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 求该椭圆的方程;
- (8) 【1997 全国卷理 11, 文 11】已知椭圆 C 与椭圆 $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 关于直线 $x+y=0$ 对称, 求 C 的方程;
- (9) 【2016 全国 I 卷理】设圆 $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ 的圆心为 A , 直线 l 过点 $B(1, 0)$ 且与 x 轴不重合, l 交圆 A 于 C, D 两点, 过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E , 求点 E 的轨迹方程.
- (10) 【2004 广东 8】双曲线 $2x^2 - y^2 = k (k > 0)$ 的焦点到它相对应的准线的距离是 2, 求 k ;
- (11) 已知过 $A(-1, 0), B(1, 0)$ 两点的动抛物线的准线始终与圆 $x^2 + y^2 = 9$ 相切, 该抛物线焦点 P 的轨迹是某圆锥曲线 E 的一部分. 求 E 的方程;

20. 解答下述题目

- (1) 已知 $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上, 点 Q 在圆 $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 上, 分别求 $|PA| + |PQ|$ 和 $\frac{1}{2}|PA| + |PQ|$ 的取值范围.
- (2) 【2007 重庆理 22】中心在原点 O 的椭圆的右焦点为 $F(3, 0)$, 右准线 l 的方程为: $x = 12$, 在椭圆上任取三个不同点 P_1, P_2, P_3 , 使 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \angle P_3FP_1$, 求 $\frac{1}{|FP_1|} + \frac{1}{|FP_2|} + \frac{1}{|FP_3|}$.
21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, F(-1, 0)$, 设 Q 为 C 上一动点, 当 $|PQ| + |QF|$ 取得最大值时, 求直线 QF 被 C 截得的弦长.
22. 【同 2005 山东理 12】【2024 新高考 I 卷 16 (2)】已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上两点. 若过 P 的直线 l 交于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.
23. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$. A, B 为椭圆 E 的左右顶点, P 在椭圆上, 且在 x 轴上方, 直线 PA, PB 交直线 $x = m$ 于 M, N .
- (1) 求直线 PA, PB 的斜率乘积;
- (2) 若 PB 的中点 Q 在以 MN 为直径的圆上, 求 m 的取值范围.
24. 【2015 安徽理 20】已知 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 O 为坐标原点, $A(a, 0), B(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.
- (1) 求 E 的离心率;

(2) 设点 C 的坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点, 点 N 关于直线 AB 的对称点的纵坐标为 $\frac{7}{2}$, 求 E 的方程。

25. 【2012 江苏 19】已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 设 A, B 是椭圆上位于 x 轴上方的两点, 满足直线 $AF_1 \parallel BF_2$, 设 AF_2 与 BF_1 交于点 P 。

(1) 若 $AF_1 - BF_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AF_1 的斜率;

(2) 求证: $PF_1 + PF_2$ 是定值。

26. 【2026 新高考 II 卷 18】已知 O 为坐标原点, 椭圆 $E: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 给定点 $G(t_0, 0) (t_0 \neq 0)$, $A(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$ 在 E 上, 过点 A 作 y 轴的垂线, 垂足为 B , AO 与 GB 交于点 P , 当 A 在 E 上运动时, P 的轨迹为 M 。

(1) 求 M 的方程, 并说明 M 是什么曲线;

(2) M 是否存在对称中心? 当 t_0 为何值时, M 存在对称中心? 当 M 存在对称中心时, 平移 M 到 M' , 使 O 为 M' 的对称中心, 说明 M' 的形状。

27. 【2026 新高考 I 卷 18】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F 。设 O 为坐标原点, 过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 其中 Q 在第三象限, 直线 PO 与 C 的另一个交点为 R 。

(1) 若 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍, 求 l 的方程;

(2) 求 $\tan \angle PQR$ 的最小值。

28. 【2016 浙江 19】设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 。

(1) 求直线 $y = kx + 1$ 被椭圆截得的线段长 (用 a, k 表示);

(2) 若任意以点 $A(0, 1)$ 为圆心的圆与椭圆至多有 3 个公共点, 求椭圆离心率的取值范围。

29. 【2025 八省联考 18】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右焦点 F_1, F_2 。设 M 是坐标平面上的动点, 且线段 F_1M 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点, 证明 M 的轨迹为圆, 并求该圆的方程。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.

11. 将该问题推广到一般的双曲线背景, 即对于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 求

$$\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \text{存在 } A, B \in C \text{ 使得 } P \text{ 为 } AB \text{ 的中点}\}$$

并在图中画出该集合表示的区域。

P 是 AB 的中点当且仅当过点 P 的直线 l 交双曲线于 A, B , 使得 P 是 AB 的中点. 设过点 P 的直线方程为 $l: y - y_0 = k(x - x_0)$, 假设 l 与曲线 C 有两个交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 联立直线 l 与双曲线方程, 消去 y , 得

$$(b^2 - a^2 k^2)x^2 - 2a^2(-kx_0 + y_0)kx - a^2(-kx_0 + y_0)^2 - a^2 b^2 = 0.$$

由韦达定理,

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2(-kx_0 + y_0)k}{b^2 - a^2 k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{-a^2(-kx_0 + y_0)^2 - a^2 b^2}{b^2 - a^2 k^2}.$$

令 $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$, 得

$$\frac{2a^2(-kx_0 + y_0)k}{b^2 - a^2 k^2} = 2x_0.$$

解得 $k = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$. 因此, 如果点 P 是直线 AB 的中点, 则点 $P(x_0, y_0)$ 一定位于直线 $y - y_0 = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0)$ 上.

再看是否存在这样的点 P . 判别式

$$\begin{aligned} \Delta &= [2a^2(-kx_0 + y_0)k]^2 + 4(b^2 - a^2 k^2)[a^2(-kx_0 + y_0)^2 + a^2 b^2] \\ &= 4a^2 b^2 \left[b^2 - a^2 k^2 + (-kx_0 + y_0)^2 \right] > 0 \end{aligned}$$

代入 $k = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$ 得

$$b^2 - \frac{x_0^2 b^4}{y_0^2 a^2} + \left(-\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} x_0 + y_0 \right)^2 > 0,$$

$$\text{即 } \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \left(\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} \right)^2 > 0, \text{ 变形得到}$$

$$\left(\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} \right) > 0. \quad (*)$$

12.

13.

14. 新答案 (来源: 1.21 椭圆.md): 35

【解题思路】 记另一个焦点为 F' . 由题意, $|P_7F'| = |P_1F|$, $|P_6F'| = |P_2F|$, $|P_5F'| = |P_3F|$,
 $\dots$, $|P_1F'| = |P_7F|$.

又由椭圆的定义, $|P_iF| + |P_iF'| = 2a = 10$, $i = 1, \dots, 7$,

$$\text{所以 } |P_1F| + |P_2F| + \dots + |P_7F| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 (|P_iF| + |P_iF'|) = \frac{1}{2} \times 7 \times 10 = 35.$$

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27. (1) 设直线 $l: x = my - 1 (m > 0)$, 联立该直线与椭圆 $\begin{cases} x + 1 = my, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得到

$$(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 由题设, $y_2 < 0, R(-x_1, -y_1)$, 由韦达定理,

$$y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$$

记 $\triangle PQR, \triangle PFO$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 则 $S_1 = \frac{1}{2} |PQ| |PR| \sin \angle QPR, S_2 = \frac{1}{2} |PF| |PO| \sin \angle FPO$,

由已知, $|PR| = 2|PO|, \sin \angle QPR = \sin \angle FPO$, 所以 $\frac{|PQ|}{|PF|} = \frac{S_1}{2S_2} = \frac{3}{2}$, 于是 $|FQ| = |PQ| - |PF| =$

$\frac{1}{2}|PF|$. 所以 $y_2 = -\frac{y_1}{2}$, 将该式分别带入上述由韦达定理计算得到的两根和积式, 分别有 $y_1 = \frac{12m}{3m^2+4}, y_1^2 = \frac{18}{3m^2+4}$. 所以 $\frac{18}{3m^2+4} = \frac{(12m)^2}{(3m^2+4)^2}$, 解得 $m = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (负根舍去).

因此直线 l 方程为 $x+1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y = 0 (y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x+1))$

(2) 由题设, $\overrightarrow{QP} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2), \overrightarrow{QR} = (-x_1 - x_2, -y_1 - y_2)$,

因为 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = y_2^2 > 0$, 所以 $\angle PQR$ 是锐角.

设直线 PQ, QR 的倾斜角分别为 α, β , 则 $\tan \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \tan \beta = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$.

所以

$$\begin{aligned} \tan \angle PQR &= |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}}{1 + \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2}} \right| \\ &= \left| \frac{(y_1 - y_2)[m(y_1 + y_2) - 2] - m(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{y_2^2} \right| \\ &= \frac{6}{y_1 + y_2}. \end{aligned}$$

因为 $\frac{6}{y_1 + y_2} = \frac{4m^2 + 3}{m} \geq 4\sqrt{3}$, 当且仅当 $4m^2 = 3$, 即 $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号, 故 $\tan \angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

新答案 (来源: 3.4 性质的证明 (4) 解析几何.md): (1) 设直线 $y = kx + 1$ 被椭圆截得的线段为 AP , 由

$$\begin{cases} y = kx + 1, \\ \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

得

$$(1 + a^2 k^2)x^2 + 2a^2 kx = 0,$$

故 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{2a^2 k}{1 + a^2 k^2}$, 因此

$$|AP| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \frac{2a^2 |k|}{1 + a^2 k^2} \cdot \sqrt{1 + k^2}.$$

(2) 假设圆与椭圆的公共点有 4 个, 由对称性可设 y 轴左侧的椭圆上有两个不同的点 P, Q , 满足 $|AP| = |AQ|$. 记直线 AP, AQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1, k_2 > 0, k_1 \neq k_2$. 由 (1) 知

$$|AP| = \frac{2a^2 |k_1|}{1 + a^2 k_1^2} \cdot \sqrt{1 + k_1^2},$$

$$|AQ| = \frac{2a^2 |k_2|}{1 + a^2 k_2^2} \cdot \sqrt{1 + k_2^2},$$

故 $\frac{2a^2 |k_1|}{1 + a^2 k_1^2} \cdot \sqrt{1 + k_1^2} = \frac{2a^2 |k_2|}{1 + a^2 k_2^2} \cdot \sqrt{1 + k_2^2}$, 所以

$$(k_1^2 - k_2^2) [1 + k_1^2 + k_2^2 + a^2 (2 - a^2) k_1^2 k_2^2] = 0.$$

由于 $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 > 0$ 得

$$1 + k_1^2 + k_2^2 + a^2(2 - a^2)k_1^2k_2^2 = 0,$$

因此

$$\left(\frac{1}{k_1^2} + 1\right)\left(\frac{1}{k_2^2} + 1\right) = 1 + a^2(a^2 - 2),$$

因为 式关于 k_1, k_2 的方程有解的充要条件是 $1 + a^2(a^2 - 2) > 1$, 所以 $a > \sqrt{2}$.

因此, 任意以点 $A(0, 1)$ 为圆心的圆与椭圆至多有 3 个公共点的充要条件是 $1 < a \leq \sqrt{2}$.

由 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$ 得, 所求离心率的取值范围为 $0 < e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

28.

29.

第一章 解析几何

1.3 圆锥曲线的基本概念

B 组

1. 【2025 温州一模 11】已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，上下顶点分别为 B_1, B_2 ，左顶点为 A_1 ， P, Q 是椭圆上除顶点外的关于原点对称的两点，则下列四点可能共圆的是

(A) P, Q, F_1, F_2

(B) P, Q, B_1, B_2

(C) P, Q, F_1, B_1

(D) P, Q, A_1, B_1

1.

第一章 解析几何

1.3 圆锥曲线的基本概念

第一章 解析几何

1.3 圆锥曲线的基本概念