

第一章 解析几何

1.2 直线与圆基础

第一章 解析几何

1.2 直线与圆基础

习题

A 组

- 【2020 全国 III 卷理 10】若直线 l 与曲线 $y = \sqrt{x}$ 和圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ 都相切, 求 l 的方程。
- 【2020 全国 I 卷理 11】已知 $\odot M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的动点。过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B 。当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 求直线 AB 的方程。
- 【2006 福建理 12】对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 定义 $\|AB\| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. 证明或证伪:
 - 若点 C 在线段 AB 上, 则 $\|AC\| + \|CB\| = \|AB\|$;
 - 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C = 90^\circ$, 则 $\|AC\|^2 + \|CB\|^2 = \|AB\|^2$;
 - 在 $\triangle ABC$ 中, $\|AC\| + \|CB\| > \|AB\|$ 。
- 【2003 广东 11】已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 求 $\tan \theta$ 的取值范围。
- 【2009 上海理 18】过圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心作直线分别交 x, y 正半轴于点 A, B , $\triangle AOB$ 被圆分成四部分, 且这四部分图形面积满足 $S_I + S_{IV} = S_{II} + S_{III}$, 问满足条件直线 AB 有多少条。
- 【2013 全国 I 卷理 12】已知点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, 直线 $y = ax + b (a > 0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割成面积相等的两部分, 求 b 的取值范围。
- 【2021 新高考 I 卷 11】(多选) 已知点 P 在圆 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 上, 点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, 则

(A) 点 P 到直线 AB 的距离小于 10	(B) 点 P 到直线 AB 的距离小于 2
(C) 当 $\angle PBA$ 最小时, $ PB = 3\sqrt{2}$	(D) 当 $\angle PBA$ 最大时, $ PB = 3\sqrt{2}$
- 【2011 安徽 15 改编】(多选) 在平面直角坐标系中, 如果 x, y 都是整数, 就称点 (x, y) 为整点, 下列命题中正确的是
 - 存在恰好经过一个整点的直线
 - 若 k 与 b 都是无理数, 则直线 $y = kx + b$ 不经过任何整点
 - 直线 l 经过无穷多个整点当且仅当 l 经过两个不同的整点
 - 直线 $y = kx + b$ 经过无穷多个整点的充分必要条件是: k 与 b 都是有理数

9. 【2013 四川理 15 改编】(多选) 设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 为平面 α 内的 n 个点, 在平面 α 内的所有点中, 若点 P 到 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 点的距离之和最小, 则称点 P 为 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 点的一个“中位点”。则下列叙述正确的是

- (A) 若三个点 A, B, C 共线, C 在线段 AB 上, 则 C 是 A, B, C 的中位点
- (B) 直角三角形斜边的中点是该直角三角形三个顶点的中位点
- (C) 若四个点 A, B, C, D 共线, 则它们的中位点存在且不唯一
- (D) 梯形四个定点的中位点存在且唯一

10. 【2006 江西 16 改编】(多选) 已知圆 $M: (x + \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 = 1$, 直线 $l: y = kx$, 则下列叙述正确的是

- (A) 对任意实数 k 和 θ , 直线 l 和圆 M 相切
- (B) 对任意实数 k 和 θ , 直线 l 和圆 M 有公共点
- (C) 对任意实数 θ , 必存在实数 k , 使得直线 l 和圆 M 相切
- (D) 对任意实数 k , 必存在实数 θ , 使得直线 l 和圆 M 相切

11. 【2007 江西理 16 改编】(多选) 设有一组圆 $C_1: (x - k + 1)^2 + (y - 3k)^2 = 2k^4$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 则下列叙述正确的是

- (A) 存在一条定直线与所有的圆均相切
- (B) 存在一条定直线与所有的圆均相交
- (C) 存在一条定直线与所有的圆均不相交
- (D) 所有的圆均不经过原点

12. 【2009 江西理 16 改编】(多选) 设直线系 $M: x \cos \theta + (y - 2) \sin \theta = 1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 则下列叙述正确的是

- (A) M 中所有直线均经过一个定点
- (B) 存在定点 P 不在 M 中的任一条直线上
- (C) 对于任意整数 n ($n \geq 3$), 存在正 n 边形, 其所有边均在 M 中的直线上
- (D) M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等

13. 【2026 新高考 I 卷 11】(多选) 已知圆 $C_1: (x + 1)^2 + y^2 = 1$, $C_2: (x - 1)^2 + y^2 = 1$, $C_3: x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 1$, 直线 $l: y = kx + b$ 与 C_1, C_2, C_3 均有两个交点, 记 l 被 C_1, C_2, C_3 截得的弦长分别为 s_1, s_2, s_3 , 则

- (A) k 可以取任意实数
- (B) 满足 $s_1 = s_2 = s_3$ 的直线 l 共有 3 条
- (C) 满足 $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ 的直线 l 多于 3 条
- (D) 当 $b = 0$ 时, $s_1 + s_2 + s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

14. 解答下述基础习题:

(1) 【2004 安徽文 12】已知直线 $l: x - y - 1 = 0$, $l_1: 2x - y - 2 = 0$. 若直线 l_2 与 l_1 关于 l 对称, 求 l_2 的方程;

(2) 【2013 四川文 15】在平面直角坐标系内, 求到点 $A(1, 2), B(1, 5), C(3, 6), D(7, -1)$ 的距离之和最小的点的坐标;

(3) 【2026 佛山一模 7】求圆 $O_1: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$ 的两条公切线的交点坐标;

(4) 【2010 江苏 9】已知圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上有且仅有四个点到直线 $12x - 5y + c = 0$ 的距离为 1, 求实数 c 的取值范围;

(5) 【2008 大纲卷 II 理 16】已知 AC, BD 为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的两条相互垂直的弦, 垂足为 $M(1, \sqrt{2})$, 求四边形 $ABCD$ 的面积的最大值;

(6) 【2018 上海 12】已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足 $x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1, x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值;

(7) 【1984 全国卷理 18】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边分别为 a, b, c , 且 $c = 10, \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, P 为 $\triangle ABC$ 的内切圆上的动点, 求点 P 到顶点 A, B, C 的距离的平方和的最大值和最小值。

(8) 【2020 江苏 14】在平面直角坐标系 xOy 中, $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. 已知 A, B 是圆 $C: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 36$ 上的两个动点, 满足 $PA = PB$, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值;

15. 【2010 广东理 21】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是平面直角坐标系 xOy 上的两点, 现定义由点 A 到点 B 的一种折线距离 $\rho(A, B)$ 为 $\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. 对于平面 xOy 上给定的不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

(1) 若点 $C(x, y)$ 是平面 xOy 上的点, 试证明 $\rho(A, C) + \rho(C, B) \geq \rho(A, B)$;

(2) 在平面 xOy 上是否存在点 $C(x, y)$, 同时满足

$$(a). \rho(A, C) + \rho(C, B) = \rho(A, B) \quad (b). \rho(A, C) = \rho(C, B)$$

若存在, 请求出所有符合条件的点; 若不存在, 请予以证明。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.

10. **BD.** A 错. 当 $\theta=0, k=0$ 时, 直线 l 与圆 M 相交. B 对. 圆心 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 到直线 l 的距离为

$$d = \frac{|k \cos\theta + \sin\theta|}{\sqrt{k^2+1}} \leq \frac{\sqrt{(k^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}}{\sqrt{k^2+1}} = 1.$$

(利用不等式 $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, 这个不等式利用 $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ 可以证明出来 (把向量写成坐标形式).) 因此对任意实数 k 与 θ , 直线 l 与圆 M 有公共点. C 错. 取 $\theta=0$, 此时

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}} < \frac{|k|}{\sqrt{k^2}} = 1,$$

直线 l 与圆 M 必定相交, 不可能相切. D 对. 如果 k 给定, 把 d 改写为

$$d = \frac{\sqrt{k^2+1} \left| \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \sin\theta \right|}{\sqrt{k^2+1}} = |\sin(\theta + \varphi)|$$

其中 $\sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}, \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$. 取 θ 使得 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 即可.

11. **BD.** B 对. 注意圆 C_k 的圆心为 $(k-1, 3k)$, 所以令 $x=k-1, y=3k$, 消去 k 得到 $y=3x+3$, 直线 $y=3k+3$ 总是经过所有圆心, 从而与所有圆均相交. D 对. 如果某个圆 C_k 经过原点, 则 $(-k+1)^2 + (3k)^2 = 2k^4$, 即 $2k^4 - 10k^2 + 2k - 1 = 0$. 设 $f(x) = 2x^4 - 10x^2 + 2x - 1 (x \geq 1)$, 则 $f'(x) = 8x^3 - 20x + 2, f''(x) = 24x^2 - 20 > 0$. 所以 $f'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增. 但是当 $x \geq 2$ 时, $f'(x) \geq f'(2) = 26 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递增. 所以当 $x \geq 3$ 时, $f(x) \geq f(3) = 77 > 0$. 注意到 $f(2) = -5 \neq 0, f(1) = -7 \neq 0$, 所以不存在正整数 k 使得 $f(k) = 0$.

AC 错. 如果存在一条定直线与所有的圆不相交或相切, 则该直线上的所有点都不位于任何的圆内. 我们只需要说明对于平面中的任意点 (x_0, y_0) , 总会有充分大的 k 使得该点包含在 C_k 内. 事实上, 记

$$\begin{aligned} g(k) &= (x_0 - k + 1)^2 + (y_0 - 3k)^2 - 2k^4 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(-k+1) - 6y_0k - f(k). \end{aligned}$$

当 $k > 0$ 时, $f(k)$ 是个四次多项式, 而其余项是关于 k 的一次多项式, 所以当 $k \rightarrow \infty$ 时, $g(k) \rightarrow -\infty$. 也就是说必定存在充分大的 k 使得 $g(k) < 0$, 此时 (x_0, y_0) 在圆 C_k 内.

12. **BC.** 点 $P(0, 2)$ 到 M 中每条直线的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = 1$. 故所有 M 构成的集合是圆 $C: x^2 + (y-2)^2 = 1$ 的全体切线组成的集合.

A 错: 圆 C 的所有切线之间必能找到一对平行直线, 此时没交点, 所以 M 不可能过定点. B 对: 圆 C 的圆心 $(0, 2)$ 不在任何直线上. C 对: 存在正 n 边形使得内切圆为圆 C . D 错: 注意可以围成如下两种正三角形: $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$.

13. **BCD.** 对于 A 选项, 设 $\odot C_1$ $\odot C_3$ 外切的共同切点为点 A , 连接 AC_2 , 将 AC_2 所在直线平行移动, 此时 AC_2 与 $C_1 C_3$ 不可能同时有 2 个交点. 故 k 不可以取任何实数, A 选项错误.

对于 B 选项, 要使得 $s_1 = s_2 = s_3$, 圆心 C_1, C_2, C_3 到该直线的距离相等, 若 C_1, C_2 到直线 l 的距离相等, 则必有 $l \parallel$ 直线 $C_1 C_2$, 设 $C_1 C_2$ 的中点为 D , 在此基础之上, 要使得 C_3 到 l 的距离等于 C_1 到 l 的距离, 则 l 只可能为线段 $C_3 D$ 的垂直平分线. 根据对称性, 满足条件的直线一共有 3 条, B 选项正确.

对于 D 选项, 考虑所有过原点 O 的直线 $y = kx$, 则 $|k| > \sqrt{2}$. 此时 $s_1 = s_2 = 2\sqrt{1 - \frac{k^2}{k^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}}$, $s_3 = 2\sqrt{1 - \frac{3}{k^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{k^2 - 2}}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

则 $s_1 + s_2 + s_3 = \frac{2(2 + \sqrt{k^2 - 2})}{\sqrt{k^2 + 1}}$, 具体求解方法见第二章. D 选项正确.

对于 C 选项, 注意到满足 B 选项要求的直线使得 $s_1 = s_2 = s_3$, 于是 $s_1 + s_2 + s_3 = 3$, 目前找到了三条直线.

再考虑所有直线 $y = kx$, 因为直线 OA 的斜率 $k = -\sqrt{3}$, 对应于 $t = 2$, 即 $f(2) = 3$. 另一方面, 由 $f(t_0) > 3$ 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$, 结合零点存在定理 (或介值定理) 可知存在 $t_1 \in (t_0, +\infty)$ 使得 $f(t_1) = 3$, 取 $k_1 = \sqrt{t_1^2 - 1}$, 则当直线 l 的方程为 $y = k_1 x$ 时, 也满足 $s_1 + s_2 + s_3 = 3$, 所以满足 $s_1 + s_2 + s_3 = 3$ 的直线 l 多于 3 条. C 选项正确.

14. 新答案 (来源: 1.20 直线与圆.md): $(2, 4)$

【解题思路】 到点 A, C 距离之和最小的点为线段 AC 上的点, 到点 B, D 距离之和最小的点为线段 BD 上的点, 所以到 A, B, C, D 的距离之和最小的点为 AC 与 BD 的交点. 直线 AC 的方程为 $2x - y = 0$, 直线 BD 的方程为 $x + y - 6 = 0$, 其交点坐标为 $(2, 4)$, 且该点在线段 AC 、线段 BD 上.

【实测数据】 本题文科难度 0.18.

新答案 (来源: 1.20 直线与圆.md): $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

【解题思路】 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 A, B 都在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{2}$, 则 $\angle AOB = 60^\circ$.

连接 AB , 记 AB 的中点为 T , 作 $TH \perp l$ 于点 H , 则

$$u = \frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}} = 2|TH|$$

当且仅当 T, O, H 三点共线 (且 T 在直线 l 下方) 时, $u_{\max} = 2(|OT| + |OH|) = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

- 15.

第一章 解析几何

1.2 直线与圆基础

B 组

1. 【2026 “港梦杯”（网络联考）11】在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆

$$O_1 : (x+2)^2 + y^2 = 1, \quad O_2 : x^2 + y^2 = 1, \quad O_3 : (x-2)^2 + y^2 = 1$$

集合 A_d 表示当 O_1, O_2, O_3 到直线 l 的距离之和为 d 时， l 与圆 O_1, O_2, O_3 可能的总交点个数，则

- (A) $A_1 = \{4, 5, 6\}$ (B) $A_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ (C) $A_3 = \{2, 3, 4\}$ (D) $A_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

1.

第一章 解析几何

1.2 直线与圆基础

第一章 解析几何

1.2 直线与圆基础