

第一章 解析几何

1.1 曲线与区域的代数表示

第一章 解析几何

1.1 曲线与区域的代数表示

习题

A 组

- 【2024 北京 10】已知 $M = \{(x, y) | y = x + t(x^2 - x), 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}$ 是平面直角坐标系中的点集, 设 d 是 M 中两点间距离的最大值, S 是 M 表示的图形的面积, 则
 (A) $d = 3, S < 1$ (B) $d = 3, S > 1$ (C) $d = \sqrt{10}, S < 1$ (D) $d = \sqrt{10}, S > 1$
- 【2007 江苏 10】在平面直角坐标系 xOy , 已知平面区域 $A = \{(x, y) | x + y \leq 1, \text{且 } x \geq 0, y \geq 0\}$, 求平面区域 $B = \{(x + y, x - y) | (x, y) \in A\}$ 的面积.
- 设 f 是直角坐标平面 xOy 到自身的一个映射, 点 $P(x, y)$ 在映射 f 下的象是点 $Q\left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$, 记作 $Q = f(P)$. 已知 $P_1(16, 8)$, $P_{n+1} = f(P_n)$, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$. 那么对于任意正整数 n
 (A) 存在点 M , 使得 $|MP_n| \leq 10$ (B) 不存在点 M , 使得 $|MP_n| \leq 5\sqrt{5}$
 (C) 存在无数个 M , 使得 $|MP_n| \leq 6\sqrt{5}$ (D) 存在唯一的点 M , 使得 $|MP_n| \leq 8\sqrt{5}$
- 【2011 江苏 14】设集合 $A = \left\{(x, y) \left| \frac{m}{2} \leq (x-2)^2 + y^2 \leq m^2, x, y \in \mathbb{R} \right.\right\}$, $B = \{(x, y) | 2m \leq x + y \leq 2m + 1, x, y \in \mathbb{R}\}$. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.
- 【2007 浙江理 17】设 m 为实数, 若 $\left\{(x, y) \left| \begin{cases} x - 2y + 5 \geq 0, \\ 3 - x \geq 0, \\ mx + y \geq 0. \end{cases} \right.\right\} \subseteq \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25\}$, 求 m 的取值范围.
- 【2024 “数海漫游三模”(网络联考) 19】在平面直角坐标系 xOy 中, 若点 P 的横坐标与纵坐标均为整数, 则称 P 为整点. 对于 xOy 中的任意闭合区域 S , 记 S 中的整点个数为 $\text{Int}[S]$.
 (1) 求 $\text{Int}[\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 5\}]$;
 (2) 若对任意 x_0, y_0 , $\text{Int}[\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq m\}] \geq 1$, 求 m 的最小值;
 (3) 若 $G \in \mathbb{N}^*$, $S_1 = \{(x, y) | |x + y| + |x - y| \leq 2G^2\}$, $S_2 = \{(x, y) | |x^2 - 2y^2| < G^2\}$, 证明:

$$\text{Int}[S_1 \cap S_2] > (4 - \sqrt{2})G^4$$

1. 新答案 (来源: 1.25 曲线的方程和平面点集.md): C

【解题思路】思路 1: 当 $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq t \leq 1$ 时, $y = x + t(x^2 - x) \geq 1$ 且 $y = x + t(x^2 - x) \leq 4$, 即 $1 \leq y \leq 4$.

而 $A(1, 1) \in M$, $B(2, 4) \in M$, 所以 M 中两点间距离的最大值为 $|AB| = \sqrt{10}$.

对于每个 $x \in [1, 2]$, y 的取值范围是 $[x, x^2]$, 于是 M 表示的区域是 $y = x$, $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$ 围成的封闭区域.

这个区域的面积 $S = \int_1^2 (x^2 - x) dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^2 = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} < 1$.

思路 2: 画出 M 表示的区域如上图, 这个区域是曲边三角形 ABC , 它的面积 S 小于 $\triangle ABC$ 的面积. 而 $\triangle ABC$ 的面积是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

所以 $S < 1$.

2.

3.

4.

5.

6.

第一章 解析几何

1.1 曲线与区域的代数表示

第一章 解析几何

1.1 曲线与区域的代数表示

第一章 解析几何

1.1 曲线与区域的代数表示