
第一章 立体几何

第一章 立体几何

本章复习

- 【2011 江西理 8】已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三个相互平行的平面，平面 α_1, α_2 之间的距离为 d_1 ，平面 α_2, α_3 之间的距离为 d_2 。直线 l 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别交于 P_1, P_2, P_3 。那么 “ $P_1P_2 = P_2P_3$ ” 是 “ $d_1 = d_2$ ” 的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【2021 新高考 I 卷 12】在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = AA_1 = 1$ 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$ ，其中 $\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$ ，则

(A) 当 $\lambda = 1$ 时， $\triangle AB_1P$ 的周长为定值

(B) 当 $\mu = 1$ 时，三棱锥 $P - A_1BC$ 的体积为定值

(C) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P ，使得 $A_1P \perp BP$

(D) 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P ，使得 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P
- 【2025 广州二模 11】(多选) 已知 A, B 是球 O 的球面上两点， C 为该球面上的动点，球 O 的半径为 4， $OA \perp OB$ ，二面角 $O - AB - C$ 的大小为 120° ，则

(A) $\triangle ABC$ 是钝角三角形 (B) 直线 OC 与平面 ABC 所成角为定值

(C) 三棱锥 $O - ABC$ 的体积的最大值为 $8\sqrt{2}$ (D) 三棱锥 $O - ABC$ 的外接球的表面积为 $\frac{128\pi}{3}$
- 【2024 武汉九调 14】两个有共同底面顶点正三棱锥 $P - ABC$ 与 $Q - ABC$ ，它们的各顶点均在半径为 1 的球面上，若二面角 $P - AB - Q$ 的大小为 120° ，求 $\triangle ABC$ 的边长。
- 【2023 武汉九调 8】已知 A, B, C, D 是半径为 $\sqrt{5}$ 的球体表面上的四点， $AB = 2, \angle ACB = 90^\circ, \angle ADB = 30^\circ$ ，求平面 CAB 与平面 DAB 的夹角的余弦值。
-
- 【2024 武汉二调 8】在三棱锥 $P - ABC$ 中， $AB = 2\sqrt{2}, PC = 1, PA + PB = 4, CA - CB = 2$ ，且 $PC \perp AB$ ，求二面角 $P - AB - C$ 余弦值的最小值。
- 【2025 青岛二模 14】已知三棱锥 $O - ABC$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ， $\triangle OAB$ 与 $\triangle OAC$ 的周长均为 10，求 $\tan \angle OBA$ 。
- 空间四面体 $ABCD$ 中， $AB = CD = 2, AD = BC = 2\sqrt{3}, AC = 4$ ，直线 BD 与 AC 所成的角为 45° ，求该四面体的体积。
- 【同 2025 新高考 I 卷 17】【2011 福建理 20】如图，四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp AD, AB + AD = 4, CD = \sqrt{2}, \angle CDA = 45^\circ$ 。

(1) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ；

(2) 设 $AB = AP$ 。

- i. 若直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 30° , 求线段 AB 的长;
- ii. 在线段 AD 上是否存在点 G , 使得它到点 P, B, C, D 的距离均相等?

11. 【2025 八省联考 19】在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC = CD = 1, \angle ADC = 30^\circ, \angle DAB = 120^\circ$, 将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折至 $\triangle ACP$, 其中 P 为动点。

(1) 设 $PC \perp AB$, 三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的球面上

- i. 证明: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;
- ii. 求球 O 的半径;

(2) 求二面角 $A-CP-B$ 的余弦值的最小值。

12. 一个椭圆沿着垂直于其所在平面的方向上平行移动形成的空间图形叫作椭圆柱, 平移起止位置的两个面叫作椭圆柱的底面。如图, 在椭圆柱 OO' 中, 椭圆 O 的长轴长为 4, 短轴长为 2, $OO' = 2$ 。 A, B 是椭圆 O 上关于 O 对称的两点, C, D 是椭圆 O' 上关于 O' 对称的两点, 且 $AB \perp CD$ 。

(1) 证明: $CD \perp$ 平面 $AO'B$;

(2) 若 $AB = CD$, 求直线 AC 与底面所成角的正弦值;

(3) 求四面体 $ABCD$ 的内切球半径的最小值。

13. 在空间几何中, 我们定义: 空间中任意一点 P 到多面体 Ω 各个面所在平面的距离的平方和, 称为点 P 关于该多面体的“面距平方和函数”, 记为 $f(P)$ 。已知正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 $2\sqrt{6}$, 设其中心 (即内切球与外接球的球心) 为 O 。

(1) 若动点 P 在线段 AO 上运动, 设 $OP = x (0 \leq x \leq 3)$, 求 $f(P)$ 关于 x 的解析式;

(2) 证明: 对于空间中任意一点 P , 均有 $f(P) = \frac{4}{3}OP^2 + 4$ 。由此求出满足 $f(P) = 16$ 的点 P 的轨迹 Γ 的表面积;

(3) 设 Q 为上述轨迹 Γ 上的任意一点, 记 Q 到正四面体 $A-BCD$ 四个面所在平面的距离分别为 h_1, h_2, h_3, h_4 , 求 $h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ 的最大值。

14. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2\sqrt{2}$, 对角线 AC_1 的中点为 F , 动点 P 在平面 AA_1C_1C 内, 且点 P 到平面 AA_1B_1B 的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}|PF|$ 。

(1) 求四棱锥 $P-AA_1B_1B$ 体积的最小值;

(2) 记点 P 的轨迹为曲线 M , 点 G, R, Q 是曲线 M 上不同三点

(i) 若平面 AB_1F 与轨迹 M 相交于 RG 两点, 求线段 RG 的长;

(ii) 若点 G 在点 F 上方, 且 $GF \perp AC$, GR, GQ 与平面 $ABCD$ 所成角相等, 平面 α 过 RQ 且与 AB 平行, 判断平面 α 与平面 $ABCD$ 的夹角是否为定值, 若是定值, 求出这个夹角的余弦值; 若不是定值, 请说明理由。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.

第一章 立体几何

B 组

1. 【2021 八省联考 20】北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用. 刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容. 用曲率刻画空间弯曲性, 规定: 多面体顶点的曲率等于 2π 与多面体在该点的面角之和的差 (多面体的面的内角叫做多面体的面角, 角度用弧度制), 多面体面上非顶点的曲率均为零, 多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和. 例如: 正四面体在每个顶点有 3 个面角, 每个面角是 $\frac{\pi}{3}$, 所以正四面体在各顶点的曲率为 $2\pi - 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$, 故其总曲率为 4π .

(1) 求四棱锥的总曲率;

(2) 若多面体满足: 顶点数 - 棱数 + 面数 = 2, 证明: 这类多面体的总曲率是常数.

1. (1) 思路 1: 四棱锥共有 5 个顶点, 5 个面. 四棱锥所有面角之和等于 4 个三角形内角之和再加上 1 个四边形内角之和. 所以四棱锥的总曲率为 $5 \times 2\pi - 4 \times \pi - 2\pi = 4\pi$.

思路 2: 因为总曲率 $= 2\pi \times \text{顶点数} - \text{所有内角和}$, 对于四棱锥底面的内角和为 2π , 四个侧面的内角和为 $4 \times \pi = 4\pi$, 从而四棱锥的总曲率为 $5 \times 2\pi - 2\pi - 4\pi = 4\pi$.

- (2) 思路 1: 设多面体顶点数为 V , 棱数为 E , 面数为 F .

多面体的总曲率 $= V \times 2\pi - \text{多面体所有面角之和} = V \times 2\pi - \text{多面体的所有面的内角之和}$.

多面体的面均为多边形, 由多边形的内角和公式可知, 多面体的所有面的内角之和的计算过程中, 每条棱都计算了两次, 所以多面体的所有面的内角之和等于 $2E \times \pi - F \times 2\pi$, 从而多面体的总曲率为

$$V \times 2\pi - 2E \times \pi + F \times 2\pi = (V - E + F) \times 2\pi = 4\pi.$$

因此, 这类多面体的总曲率是常数.

思路 2: 设多面体有 n 个面, 第 k 个面是 a_k 边形, $k = 1, 2, \dots, n$. 则第 k 个面的内角之和为 $(a_k - 2)\pi$.

再设多面体有 m 个顶点, 由条件,

$$m - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} + n = 2.$$

(所有面的棱数之和除以 2 就是这个多面体的总棱数, 注意每条棱都是两个面的公共棱.)

因此这个多面体的曲率为

$$2m\pi - \sum_{k=1}^n (a_k - 2)\pi = 2\pi \left(m - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} + n \right) = 4\pi.$$

第一章 立体几何

第一章 立体几何