

第一章 立体几何

1.3 多面体与旋转体的体积

1.3.1 体积的概念与公理

在生产建设和科学实验中，经常会遇到关于物体体积的问题，这些问题与各种几何体的体积有关，这一节我们研究这些几何体的体积问题。

定义 1.3.1 (几何体的体积). 几何体占据的空间大小称为它的**体积**。

作为推算体积的基础，我们把下面的两个事实当作公理。

公理 5 对于两个全等的几何体，它们的体积相等。

公理 6 如果把一个几何体分成若干部分，那么各部分的体积之和等于整个几何体的体积。

同度量长度、面积一样，要度量一个几何体的体积，首先要确定度量体积的单位，即选取一个单位体积作为标准，求出几何体的体积是单位体积的多少倍，该倍数就是这个几何体的体积的数值。通常取棱长等于单位长度 (例如 1cm, 1m 等) 的正方体的体积作为体积单位。

定理 1.3.2 (长方体的体积). 长方体的体积等于其长、宽、高之积：

$$V_{\text{长方体}} = abc$$

从这个定理可以得到下述推论：

- (1) 长方体的体积等于其底面积 S 和高 h 之积；
- (2) 正方体的体积等于其棱长 a 的立方：

定理 1.3.3 (祖暅原理).¹ 夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等。

夹在平行平面 α, β 之间的两个形状不同的几何体，被平行于平面 α, β 的任意一个平面所截，如果截面 P 和 Q 的面积总相等，那么它们的体积一定相等。

例如，取一摞书或一摞纸张堆放在桌面上，将它如图那样改变一下形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞书或纸张的体积与变形前相等。

早在公元五世纪，我国古代数学家祖暅首先运用了这一原理，解决了球的体积的计算，因而我们把它叫做**祖暅原理**。在欧洲，直到十七世纪，意大利数学家卡瓦利里 (Cavalieri) 才提出这个命题。

从上述两个公理出发，我们可以求出柱、锥、台、球等几何体的体积。

¹这一定理的严格证明需用到高等数学相关知识。

1.3.2 柱体的体积

设棱柱与圆柱的底面积都等于 S ，高都等于 h ，取一个与它们底面积、高均相等的长方体，使它们的下底面都在平面 α 上，因为它们的上底面和下底面平行，并且高都相等，所以它们的上底面都在和平面 α 平行的同一个平面内。

用和平面 α 平行的任意平面去截它们时，所得截面都分别和它们各自的底面全等，因而这些截面的面积都等于 S 。根据祖暅原理，它们的体积相等，由于长方体的体积等于它的底面积和高的乘积，于是有下述定理：

定理 1.3.4 (柱体的体积公式). 设柱体（棱柱、圆柱）的底面积为 S ，高为 h ，则其体积为

$$V_{\text{柱体}} = Sh$$

定理 1.3.5 (锥体的体积公式). 设锥体（棱锥、圆锥）的底面积为 S ，高为 h ，则其体积为

$$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh$$

定理 1.3.6 (台体的体积公式). 设台体的上下底面面积分别为 S_1, S_2 ，高为 h ，则其体积为

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})h$$

问题 1.1 给出台体体积公式的推导过程。

1.3.3 球的体积

和柱体、锥体一样，也可以应用祖暅原理推出球体的体积公式。

我们先研究半径为 R 的半球，为应用祖暅原理，需要找到一个能够求利用先前得到的公式求解体积的几何体，使它和半球可夹在两个平行平面之间，当用平行于这两个平面的任意一个平面去截它们时，截得的截面面积总相等。为此，我们取一个底面半径和高都等于 R 的圆柱，从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥，把所得的几何体和半球放在同一个平面 α 。因为圆柱的高等于 R ，所以这个几何体和半球都夹在两个平行平面之间。

用平行于平面 α 的任意一个平面去截这两个几何体，截面分别是圆面和圆环面。

问题 1.2 证明这两个截面的面积相等，并利用祖暅原理得出半球的体积公式。

于是我们得到下述定理：

定理 1.3.7. 如果球的半径是 R ，那么它的体积是

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

第一章 立体几何

1.3 多面体与旋转体的体积

习 题

- 【2021 新高考 II 卷 4】**卫星导航系统中，地球静止同步轨道卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度（卫星到地球表面的最短距离）约为 36000 km。把地球看成一个球心为 O ，半径 r 为 6400 km 的球。地球表面上能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星的点的纬度的最大值记为 α ，该卫星信号覆盖的地球表面的面积 $S = 2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$ （单位： km^2 ），则 S 占地球表面积的百分比约为

(A) 26% (B) 34% (C) 42% (D) 50%
- 若干个能确定一个立体图形的量称为该立体图形的“基本量”。已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，下列四组量中，不能成为该长方体的“基本量”的是

(A) AB_1, AC, AD_1 的长度 (B) AC, B_1D, A_1C 的长度

(C) B_1C, A_1D, B_1D 的长度 (D) AC_1, BD, CC_1 的长度
- 【2023 新高考 I 卷 12】（多选）**下列物体中，能被完整放入棱长为 1m 的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有

(A) 直径为 0.99 m 的球体 (B) 所有棱长均为 1.4 m 的四面体

(C) 底面直径为 0.01 m，高为 1.8 m 的圆柱体 (D) 底面直径为 1.2 m，高为 0.01 m 的圆柱体
- 【2000 广东 3 改编】**一个长方体共一个顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ ，求这个长方体的对角线长。
- 一圆台上底面、下底面、侧面的面积分别为 $\pi, 4\pi$ 和 5π ，求其高。
- 【2020 全国 I 卷理 3】**一个正四棱锥满足以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，求其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值。
- 【1998 全国卷理 9】**已知棱台的两底面积分别是 S, S' ，中截面的面积是 S_0 ，证明： $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$
- 所有的顶点都在两个平行平面内的多面体叫拟柱体。它在这两个平面内的面叫做拟柱体的底面，其余各面叫做拟柱体的侧面。两底面之间的距离叫做拟柱体的高。显然，拟柱体的侧面是三角形、梯形或平行四边形，两底面是矩形，并且它们的对应边平行，这样的拟柱体叫做长方台，如果拟柱体的下底面是梯形或平行四边形，上底面变成了与下底面的平行边平行的线段，这样的拟柱体叫做楔体。设拟柱体的上、下底面的面积为 S_1, S_2 ，中截面的面积为 S_0 ，高为 h ，证明其体积为

$$V_{\text{拟柱体}} = \frac{1}{6}h(S_1 + S_2 + 4S_0).$$
- 我们常见到钢桥、轮船、锅炉上有圆头的铆钉，铆钉的圆头具有球缺的形象，一个球被平面截下的一部分叫做球缺，截面叫做球缺的底面，垂直于截面的直径被截下的线段长叫做球缺的高。显

然,球缺也可以看做是球冠和截面所围成的几何体,球缺的体积公式可仿球的体积求法推出,试用祖暅原理求出球缺的体积公式。

10. 【1987 全国卷理 17】三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=a, BC=b$, PA 与 BC 的夹角为 θ , PA, BC 的公垂线长度为 h , 证明: 三棱 $P-ABC$ 锥的体积为 $\frac{1}{6}abh\sin\theta$
11. 【2022 新高考 II 卷 11】四边形 $ABCD$ 为正方形, $ED \perp$ 平面 $ABCD, FB \parallel ED, AB = ED = 2FB$ 。记三棱锥 $E-ACD, F-ABC, F-ACE$ 的体积分别为 V_1, V_2, V_3 , 求 $V_1:V_2:V_3$ 。
12. 【2022 全国甲卷理 9】甲、乙两个圆锥的母线长相等, 侧面展开图的圆心角之和为 2π , 侧面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$, 体积分别为 $V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$ 。若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$, 求 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}}$ 。
13. 【2025 北京 14】如图, 该多面体中, $ABCDEF$ 是一个平面多边形, 平面 $ARF \perp$ 平面 ABC , 平面 $TCD \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $AB \parallel RS \parallel EF \parallel CD$, $AF \parallel ST \parallel BC \parallel ED$, 若 $AB = BC = 8$, $AF = CD = 4$, $AR = RF = TC = TD = \frac{5}{2}$, 求该多面体的体积。
14. 设体积为 V 的三棱锥有 m 条棱长为 1, 其余棱长为 a 。
 - (1) 若 $m=5$, 求 V 的最大值;
 - (2) 若 $m=4$, V 是否存在最大值? 若存在, 求出 V 的最大值; 若不存在, 请说明理由;
 - (3) 若 $m=3$, V 是否存在最大值? 若存在, 求出 V 的最大值; 若不存在, 请说明理由。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.

第一章 立体几何

1.3 多面体与旋转体的体积

1. 【2003 广东 9】已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 求它的内接圆柱的全面积最大值。
2. 【2005 全国 II 卷理 12】将半径都为 1 的 4 个铅球完全装入形状为正四面体的容器里, 求该正四面体的高的最小值。
3. 【2010 湖北文 14 理 13】圆柱形容器(容器壁厚度忽略不计)内部盛有高度为 8 的水, 若放入三个相同的球(球的半径与圆柱的底面半径相同)后, 水恰好淹没最上面的球, 求球的半径。
4. 【2013 湖北文 16】我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题: 在下雨时, 用一个圆台形的天池盆接雨水. 天池盆盆口直径为二尺八寸, 盆底直径为一尺二寸, 盆深一尺八寸. 已知盆中积水深九寸, 求平地降雨量的寸数。(注: 平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积; 一尺等于十寸)
5. 已知正 $n(n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$ 棱锥的侧棱长为 3, 若其体积恒大于实数 p , 求 p 的最大值。
6. 【2010 重庆文 12】已知在半径为 2 的球面上有 A, B, C, D 四点, 若 $AB = CD = 2$, 求四面体 $ABCD$ 的体积的最大值。
7. 已知某圆锥与圆柱的底面半径均为 r , 高分别为 h_1, h_2 , 且该圆锥与圆柱的表面积相等, 若 $h_1 + h_2 = 4r$, 判断圆锥的体积 V_1 与圆柱的体积 V_2 的大小关系。
8. 【2010 大纲卷 I 理 10】与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB, CC_1, A_1D_1 所在直线的距离相等的点有几个?
9. 【2010 辽宁理 12】有四根长都为 2 的直铁条, 若再选两根长都为 a 的直铁条, 使这六根铁条端点处相连能够焊接成一个三棱锥形的铁架, 求 a 的取值范围。
10. 【2022 新高考 I 卷 8】已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上, 若该球的体积为 36π , 且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 求该正四棱锥体积的取值范围。
11. 若干个能确定一个立体图形的量称为该立体图形的“基本量”. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 下列四组量中, 不能成为该长方体的“基本量”的是

(A) AB_1, AC, AD_1 的长度	(B) AC, B_1D, A_1C 的长度
(C) B_1C, A_1D, B_1D 的长度	(D) AC_1, BD, CC_1 的长度
12. 【2004 浙江理 16】已知平面 α 和平面 β 交于直线 l , P 是空间一点, $PA \perp \alpha$, 垂足为 A , $PB \perp \beta$, 垂足为 B , 且 $PA = 1, PB = 2$, 若点 A 在 β 内的射影与点 B 在 α 内的射影重合, 求点 P 到 l 的距离。
13. 【2006 浙江理 14】正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1, 棱 $AB \parallel$ 平面 α , 求正四面体上的所有点在平面 α 内的射影构成的图形面积的取值范围。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.

第一章 立体几何

1.3 多面体与旋转体的体积

- 【2006 陕西理 11】** 已知平面 α 外不共线的三点 A, B, C 到 α 的距离都相等, 则正确的结论是

(A) 平面 ABC 必平行于 α

(B) 平面 ABC 必与 α 相交

(C) 平面 ABC 必不垂直于 α

(D) 存在 $\triangle ABC$ 的一条中位线平行于 α 或在 α 内
- 【2015 浙江理 8】** 如图, 已知 $\triangle ABC$, D 是 AB 的中点, 沿直线 CD 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle A'CD$, 所成二面角 $A'-CD-B$ 的平面角为 α , 则

(A) $\angle A'DB \leq \alpha$ (B) $\angle A'DB \geq \alpha$ (C) $\angle A'CB \leq \alpha$ (D) $\angle A'CB \geq \alpha$
- 【2023 武汉四调 12】** (多选) 三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=2\sqrt{2}, BC=1, AB \perp BC$, 直线 PA 与平面 ABC 所成的角为 30° , 直线 PB 与平面 ABC 所成的角为 60° , 则下列说法中正确的有

(A) 三棱锥 $P-ABC$ 体积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(B) 三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(C) 直线 PC 与平面 ABC 所成的角取到最小值时, 二面角 $P-BC-A$ 的平面角为锐角

(D) 直线 PC 与平面 ABC 所成的角取到最小值时, 二面角 $P-AB-C$ 的平面角为钝角
- 【2023 福建省质检 12】** (多选) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, M 为侧面 AA_1D_1D 上的点, N 为侧面 CC_1D_1D 上的点, 则下列判断正确的是

(A) 若 $BM = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 M 到直线 A_1D 的距离的最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(B) 若 $B_1N \perp AC_1$, 则 $N \in CD_1$, 且直线 $B_1N \parallel$ 平面 A_1BD

(C) 若 $M \in A_1D$, 则 B_1M 与平面 A_1BD 所成角正弦最小值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) 若 $M \in A_1D, N \in CD_1$, 则 M, N 两点之间距离最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 【2006 辽宁 16】** 若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为 α , 则 $\cos \alpha = (\Delta)$

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC = \sqrt{3}, AP \perp CP, AP = CP$, 平面 $ABC \perp$ 平面 APC .

(1) 若 $BP \perp CP$, 证明: $AB \perp AP$;

(2) 若 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 且 AP 与平面 BCP 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$, 求 BC .
- 【同 2008 湖北 18】】【2022 新高考 I 卷 19】**¹ 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

¹ 数学人教版必修二 P161 例 10

(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;

(2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1 = AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值。

7. 【2004 全国 III 卷理 20, 文 21】三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PAC 与底面 ABC 垂直, $PA = PB = PC = 3$ 。

(1) 求证: $AB \perp BC$;

(2) 设 $AB = BC = 2\sqrt{3}$, 求 AC 与平面 PBC 所成角的大小。

8. 【2008 江西理 20】如图, 正三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA, OB, OC 两两垂直, 且长度均为 2. E, F 分别是 AB, AC 的中点, H 是 EF 的中点, 过 EF 的一个平面与侧棱 OA, OB, OC 或其延长线分别相交于 A_1, B_1, C_1 , 已知 $OA_1 = \frac{3}{2}$ 。

(1) 证明: $B_1C_1 \perp$ 平面 OA_1H ;

(2) 求二面角 $O-A_1B_1-C_1$ 的大小。

9. 【2024 新高考 I 卷 17】如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AC = 2, BC = 1, AB = \sqrt{3}$ 。

(1) 若 $AD \perp PB$, 证明 $AD \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD 。

10. 【2021 全国甲卷理 19】已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB = BC = 2, E, F$ 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$ 。(1) 证明: $BF \perp DE$; (2) 当 B_1D 为何值时, 平面 BB_1C_1C 与平面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?

11. 【2020 全国 I 卷理 18】如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, AE 为底面直径, $AE = AD$, $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形, P 为 DO 上一点, $PO = \frac{\sqrt{6}}{6}DO$ 。(1) 证明: $PA \perp$ 平面 PBC ; (2) 求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值。

12. 【2023 全国乙卷理 19】如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AB = 2, BC = 2\sqrt{2}, PB = PC = \sqrt{6}$, BP, AP, BC 的中点分别为 D, E, O , $AD = \sqrt{5}DO$, 点 F 在 AC 上, $BF \perp AO$ 。(1) 证明: $EF \parallel$ 平面 ADO ; (2) 证明: 平面 $ADO \perp$ 平面 BEF ; (3) 求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值。

13. 【2022 新高考 I 卷 19】如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$ 。(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离; (2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1 = AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值。

14. 【2022 新高考 II 卷 20】如图, PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高, $PA = PB, AB \perp AC, E$ 为 PB 的中点。(1) 证明: $OE \parallel$ 平面 PAC ; (2) 若 $\angle ABO = \angle CBO = 30^\circ, PO = 3, PA = 5$, 求二面角 $C-AE-B$ 的正弦值。

15. 【2020 全国 II 卷理 20】如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形, 侧面 BB_1C_1C 是矩形, M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点, P 为 AM 上一点, 过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E , 交 AC 于 F 。

-
- (1) 证明: $AA_1 \parallel MN$, 且平面 $A_1AMN \perp$ 平面 EB_1C_1F ;
- (2) 设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心, 若 $AO \parallel$ 平面 EB_1C_1F , 且 $AO = AB$, 求直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.

第一章 立体几何

1.3 多面体与旋转体的体积