

第一章 立体几何

1.1 直线与平面

1.1.1 平面

常见的桌面、黑板面、平静的水面，都给我们以平面的形象。几何里所说的平面就是从这样的一些物体抽象出来的，但是，几何里的平面是无限延展的。

在立体几何中，通常画平行四边形来表示平面，这是斜二测画法，当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45° ，横边长画成邻边的两倍。当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画，这样的立体感较强。

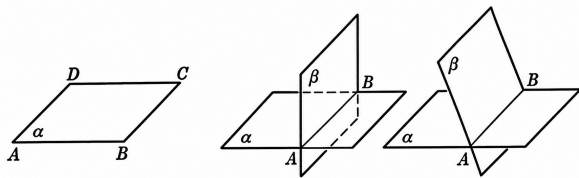


图 3.1

平面通常用一个希腊字母 α, β, γ 等来表示。

1.1.2 平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质，我们把它当作公理，作为进一步推理的基础。

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

这时我们说直线在平面内或平面经过直线。点 A 在直线 α (或平面 α) 上，记作 $A \in \alpha$ ；点 A 在直线 α (或平面 α) 外，记作 $A \notin \alpha$ ；直线 l 在平面 α 内，记作 $l \subseteq \alpha$ ；

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过该点的公共直线。

如果两个平面 α, β 有一条公共直线 l ，就说平面 α 和 β 相交，交线是 l ，记作 $\alpha \cap \beta = l$ 。

公理 3 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面。

根据上述公理，可以得到下述推论：

推论 1 一条直线和这条直线外的一点确定一个平面

两条相交直线确定一个平面

两条平行直线确定一个平面

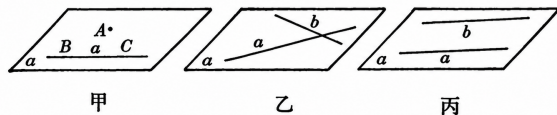


图 3.2

1.1.3 空间中两直线的位置关系

我们知道，在同一平面内的不重合的两条直线的位置关系只有两种：平行或相交。

空间中的两条直线还存在另外一种位置关系。

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线，显然，两条异面直线是既不平行也不相交的。

1.1.4 平行直线

公理 4 平行于同一直线的两条直线互相平行。

根据公理 4，我们可以证明下面的定理

定理 1.1.1. 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等。

推论 2 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等。

1.1.5 两条异面直线所成的角

直线 l_1, l_2 是异面直线，经过空间任意一点 O ，分别引直线 $l'_1 \parallel l_1, l'_2 \parallel l_2$ ，据推论 2 可知，直线 l'_1 和 l'_2 所成锐角（或直角）的大小只由直线 l_1, l_2 的相对位置确定，与点 O 的选择无关，于是我们把直线 l'_1 和 l'_2 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 l_1 和 l_2 所成的角。

为了简便，点 O 通常取在两条异面直线中的一条上，例如取在直线 l_2 上，然后过点 O 作直线 $l'_1 \parallel l_1$ ，那么 l'_1 和 l_2 所成的角就是异面直线 l_1, l_2 所成的角。

如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这两条异面直线互相垂直，和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的**公垂线**，两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段长度，叫做**两条异面直线的距离**。

1.1.6 直线和平面的位置关系

我们观察教室的墙面和地面，它们的相交线在地面上；两墙面的相交线和地面只相交于一点；墙面和天花板的相交线和地面没有交点。它反映出直线和平面之间存在着不同的位置关系。

定义 1.1.2 (直线与平面平行). 如果一条直线和一个平面没有公共点，那么我们说这条直线和这个平面平行。

一条直线和一个平面的位置关系有且只有下述三种：

- (1) 直线在平面内：有无数个公共点；
- (2) 直线和平面相交：有且只有一个公共点；

(3) 直线和平面平行：没有公共点。

我们把直线和平面相交或平行的情况统称为直线在平面外。

直线 a 与平面 α 相交于点 A 可记作 $a \cap \alpha = A$ ；直线 a 与平面 α 平行可记作 $a \parallel \alpha$ ；直线 a 在平面 α 外可记作 $a \not\subset \alpha$ 。

1.1.7 直线和平面平行的判定与性质定理

直线和平面平行，除可以根据定义判定外，还有以下的判定定理：

定理 1.1.3 (直线和平面平行的判定定理). 如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

定理 1.1.4 (直线和平面平行的性质定理). 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行。

1.1.8 直线和平面垂直的判定和性质定理

将书打开直立在桌面 α 上，观察书的书脊 AB 和各页与桌面的交线的位置关系，显然：它们都是垂直的。 AB 和桌面 α 的位置关系，给我们以直线和平面垂直的形象。

定义 1.1.5 (直线和平面垂直). 如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，我们说这条直线和这个平面互相垂直，直线叫做平面的**垂线**，平面叫直线的**垂面**。过一点有且只有一条直线和一个平面垂直；过一点有且只有一个平面和一条直线垂直，平面的垂线和平面一定相交，交点叫做**垂足**。

判定直线和平面垂直，除根据定义外，还有下面的定理

定理 1.1.6 (直线和平面垂直的判定定理). 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。

定理 1.1.7 (直线和平面垂直的性质定理). 如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行。

从平面外一点引一个平面的垂线，这个点和垂足之间的距离叫做这个点到这个平面的距离，

一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，叫做这条直线和平面的距离，

1.1.9 斜线在平面上的射影，直线和平面所成的角

自一点向平面引垂线，垂足叫做这点在这个平面上的射影，这个点与垂足间的线段叫做这点到这个平面的垂线段。

一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点叫做斜足。斜线上一点与斜足间的线段叫做这点到这个平面的斜线段。过斜线上的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影，垂足与斜足间的线段叫做这点到平面的斜线段在这个平面上的射影，斜线上任意一点在平面上的射影，一定在斜线的射影上。

根据直角三角形性质，我们很容易得到：

定理 1.1.8. 从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中

- (1) 射影相等的两条斜线段相等，射影较长的斜线段也较长；
- (2) 相等的斜线段的射影相等，较长的斜线段的射影也较长；
- (3) 垂线段比任何一条斜线段都短。

下面研究直线与平面所成的角。

定义 1.1.9 (直线与平面所成的角). 平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是 0° 的角。

可以证明，斜线和平面所成的角，是这条斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角。

1.1.10 三垂线定理

定理 1.1.10 (三垂线定理). 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

三垂线定理实质上是平面的一条斜线和平面内的一条直线垂直的判定定理，这两条直线可以是相交直线，也可以是异面直线。

类似地可以证明：

定理 1.1.11 (三垂线定理的逆定理). 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直。

三垂线定理及其逆定理可以改写成：平面内的一条直线和这个平面的一条斜线垂直的充要条件是它和斜线在平面上。

1.1.11 两个平面的位置关系

一栋高层建筑的正面和背面无论怎样延展都不会相交，也就是说，它的正面和背面没有公共点；它的正面和侧面则有一条公共直线，这些面的位置关系，反映出两个不重合的平面的不同位置关系。

定义 1.1.12 (两个平面互相平行). 如果两个平面没有公共点，我们说这两个平面互相平行。

两个平面的位置关系只有：

- (1) 两平面平行没有公共点；
- (2) 两平面相交，有且仅有一条交线。

1.1.12 两个平面平行的判定和性质定理

判定两个平面平行，除根据定义外，有下面的定理：

定理 1.1.13 (两个平面平行的判定定理). 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行。

定理 1.1.14 (两个平面平行的性质定理). 如果两个平行平面同时和第三个平面相交, 那么它们的交线平行.

定义 1.1.15 (两个平行平面的公垂线, 公垂线段和距离). 和两个平行平面同时垂直的直线, 叫做这两个平行平面的**公垂线**, 它夹在这两个平行平面间的部分, 叫做这两个平行平面的**公垂线段**, 两个平行平面的公垂线段都相等, 我们把公垂线段的长度叫做两个平行平面的**距离**.

1.1.13 二面角

修筑水坝时, 为了使水坝坚固耐久, 必须使水坝面和水平面成适当的角度; 发射人造地球卫星时, 也要根据需要, 使卫星的轨道平面和地球赤平面成一定的角度. 下面我们来研究两个平面所成的角.

定义 1.1.16 (二面角). 一个平面内的一条直线, 把这个平面分成两部分, 其中的每一部分都叫做半平面, 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角, 这条直线叫做二面角的棱. 这两个半平面叫做二面角的面.

棱为 l 、面为 α, β 的二面角记作二面角 $\alpha - l - \beta$.

定义 1.1.17 (二面角的平面角). 以二面角的棱上任意一点为端点, 在两个面内分别作垂直于棱的两条射线, 这两条射线所成的角叫做**二面角的平面角**.

二面角的大小, 可以用它的平面角来度量, 二面角的平面角是几度, 就说这个二面角是几度.

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

1.1.14 两个平面垂直的判定和性质定理

定义 1.1.18 (两个平面互相垂直). 两个平面相交, 如果所成的二面角是直二面角, 就说这两个平面互相垂直.

判定两个平面垂直, 有下面的定理:

定理 1.1.19 (两个平面垂直的判定定理). 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.

定理 1.1.20 (两个平面垂直的性质定理). 如果两个平面垂直, 那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

第一章 立体几何

1.1 直线与平面

本节习题

- 【2004 全国 I 卷理 16】(多选) 已知 a, b 为不垂直的异面直线, α 是一个平面, 则 a, b 在 α 上的射影有可能是
(A) 两条平行直线 (B) 两条互相垂直的直线 (C) 同一条直线 (D) 一条直线及其外一点
- 【2012 浙江理 10】已知矩形 $ABCD$, $AB = 1, BC = \sqrt{2}$, 将 $\triangle ABD$ 沿矩形的对角线 BD 所在的直线进行翻折, 在翻折过程中, 对于下述三对直线, 分别判断是否存在某个位置使其互相垂直:
(a). 直线 AC 与直线 BD (b). 直线 AB 与直线 CD (c). 直线 AD 与直线 BC
- 【2008 辽宁文 12】在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, CC_1 的中点, 问在空间中与三条直线 A_1D_1, EF, CD 都相交的直线有多少条。
- 试以部分生活实例来论述平面的三个基本性质。
- 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间。把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球上一点 A 的纬度是指与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面。在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 40° , 求晷针与点 A 处的水平面所成角的大小。
- 已知空间中有平面 α, β , 直线 m 与平面 α 所成的角为 θ , 直线 $n \subset \alpha$, 直线 $m \subset \beta$, 设 m 与 n 的夹角为 θ_1 , α 与 β 的夹角为 θ_2 , 分别判断 θ_1, θ_2 与 θ 的大小关系。
- 【2014 广东理 7】若空间中四条两两不同的直线 l_1, l_2, l_3, l_4 , 满足 $l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3, l_3 \perp l_4$, 能否确定 l_1 与 l_4 的位置关系?
- 【2010 四川文 15 理 15】二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小是 60° , 线段 $AB \subset \alpha$, $B \in l$, AB 与 l 所成的夹角为 30° , 求 AB 与平面 β 所成的角的正弦值。
- 【2006 辽宁 16】若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为 α , 求 $\cos \alpha$ 。
- 【2005 全国 III 卷 11】不共面的四个定点到平面 α 的距离相等, 求满足此条件的平面 α 的个数。
- 【2025 “数海漫游二模”(网络联考) 14】已知异面直线 l_1, l_2 的夹角为 45° , 距离为 1, 动点 $P \in l_1, Q \in l_2$, 满足 $PQ = 2$, 若直线 PQ 与 l_1, l_2 的夹角相等, 求满足条件的线段 PQ 的条数。
- 【2007 浙江理 16】已知点 O 在二面角 $\alpha - AB - \beta$ 的棱上, 点 P 在 α 内, 且 $\angle POB = 45^\circ$. 若对于 β 内异于 O 的任意一点 Q , 都有 $\angle POQ \geq 45^\circ$, 求二面角 $\alpha - AB - \beta$ 的大小。

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

第一章 立体几何

1.1 直线与平面

第一章 立体几何

1.1 直线与平面

第一章 立体几何

1.1 直线与平面