

第一章 向量、解三角形、复数

1.5 拓展阅读：一元 n 次方程的解

很长一段时间内，解一元多项式方程一直是代数研究的一个中心问题。早在古巴比伦时期，人们就会解一元二次方程。

1.5.1 一元三次方程的求根公式

十六世纪意大利的数学成果可归结为费罗（Scipione del Ferro）、塔塔利亚（Tartaglia）、卡尔达诺（Girolamo Cardano）、费拉里（Ludovico Ferrari）、邦贝利（Rafael Bombelli）等人的工作。他们的主要成果是发现了三次方程和四次方程的求根公式，使得人们在当时对代数方程的理解更进一步。这个成果似乎是代数历史上自从古巴比伦时期发现一元二次方程求根公式以来最重要的成果。

三次方程的求解问题在 16 世纪之前就已经出现过，人们可以解决其中的一部分形式，但未能发现一般的求解法。

塔塔利亚出生在意大利北部的博洛尼亚。

有相当长一段时间，塔塔利亚没法解决这两个问题。但是在 1535 年，他终于想到办法解决了它们，并且他宣称能解决任意形如的不含一次项的三次方程问题。菲奥里表示不服气，认为塔塔利亚只是在虚张声势，所以决定举办公开竞赛挑战塔塔利亚。他们约定，在 1535 年 2 月 22 日，米兰大教堂，塔塔利亚和菲奥里举办了公开竞赛，两人各出 30 道题给对方做。输了的一方要宴请赢家 30 次。

起初塔塔利亚并未重视菲奥里的数学才能，但有人传言：菲奥里在 10 年前就从一位已故的数学大师那里学习了如何求解不含二次项的三次方程。这时塔塔利亚才开始上心，开始去寻找不含二次项的三次方程的一般解。在公开竞赛日的前几天，塔塔利亚仅用了几个小时就解开了这个问题。

这样，塔塔利亚可以求解两种三次方程（不含一次项或者不含二次项），但菲奥里只能求解一种。总之，在两个小时之内，塔塔利亚轻松解决了对手的 30 个问题。而菲奥里得到的问题最终基本上都化简为了，从而一个都不会解。最终塔塔利亚以的比分获胜。塔塔利亚赢得了荣誉，但放弃了赌金。有评论称：“与一个可怜的失败者面对面进餐的场景对他没有任何吸引力。”

卡尔达诺听说塔塔利亚获胜后，便想方设法窃取塔塔利亚的秘密。他在 1539 年 1 月至 3 月和塔塔利亚保持着书信交流。卡尔达诺开了一个诱人的条件：把塔塔利亚介绍给意大利最有权力的男人之一——德阿瓦洛斯，他是整个伦巴底的地方长官（地位仅次于查尔斯五世皇帝）和驻扎在米兰附近的帝国军队司令官。塔塔利亚关于火炮技术的著作在不久前已经出版，卡尔达诺声称已经买了两本，一本给自己，另外一本给自己的朋友，也就是这位长官。他的这位朋友长官非常想见见这本书的作者。

塔塔利亚急急忙忙来到米兰，并在卡尔达诺的家里住了几天。他的这一举动无异于自投罗网。不幸的是，这位长官当时没在米兰。但卡尔达诺对待他的这位客人却真如皇室般尊重。最后在 3 月 25 日，塔塔利亚答应把他的解法告诉卡尔达诺，但坚持要卡尔达诺发重誓不发表这

一成果. 卡尔达诺郑重其事地发誓. 然而, 在 1545 年, 卡尔达诺发表了《大衍术》(Ars Magna), 根据塔塔利亚的解法进一步给出了三次方程的一般解.

塔塔利亚当然大发雷霆, 此前整整五年他一直在静静地翻译欧几里得和阿基米德的著作. 随后的骂战持续了三年, 只是卡尔达诺没有参战, 而是留下费拉里顶替他参战. 直到 1548 年 8 月 10 日, 费拉里与塔塔利亚在米兰举行了一次学术竞赛, 这场骂战才以塔塔利亚的失败告终.

塔塔利亚死于 1557 年, 他是带着愤怒和痛苦离开人世的. 他从没发表过自己的三次方程解的成果, 毫无疑问他独立解决了三次方程的问题, 但是这一荣誉却被费罗和卡尔达诺平分了.

对三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 的求解, 只需考虑如下方程

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0 \quad (1)$$

下面我们尝试推导出卡尔达诺给出的求根公式.

将原方程写成用 $(x + \frac{P}{3})$ 与常数 P, Q, R 表示的方程

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x + \frac{P}{3})^3 + (Q - \frac{P^2}{3})(x + \frac{P}{3}) + (R - \frac{QP}{3} + \frac{2P^3}{27})$$

令 $y = x + \frac{P}{3}$, 只需考虑方程

$$y^3 + py + q = 0 \quad (2)$$

的求解. 设 $y = u + v$, 原方程化为

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

整理得

$$(u^3 + v^3) + 3uv(u + v) = -q - p(u + v)$$

由于 $y = u + v$ 的表示不唯一, 特选取 u, v 使得 $3uv = -p$, 则 $u^3 + v^3 = -q$.

问题 1.1 证明: 总能取到 $u, v \in \mathbb{C}$ 使得 $3uv = -p$.

由 $u^3 + v^3 = -q, u^3v^3 = (uv)^3 = -\frac{p^3}{27}$ 可知, u^3, v^3 是方程

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (3)$$

的两根, 于是

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}, v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

下求解 u^3, v^3 的立方根, 由 1.5.3 所述知识, 可得方程 $x^3 = t (t \in \mathbb{R})$ 的三个根分别为

$$\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{t}\omega, \sqrt[3]{t}\omega^2, \text{ 其中 } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

设 u_0, v_0 是 u^3 和 v^3 的一个实立方根, u^3 的三个立方根分别为 $u_0, u_0\omega, u_0\omega^2, v^3$ 的三个立方根分别为 $v_0, v_0\omega, v_0\omega^2, x = u + v$ 共有 9 种组合方式, 又由于 $3uv = -p \in \mathbb{R}$, 方程 (2) 的所有解只可能为

$$\boxed{u_0 + v_0, wu_0 + w^2v_0, w^2u_0 + wv_0} \quad (4)$$

综上, (4) 是方程 (2) 的三个复根.

下探讨一元三次方程的解的不同类型, 方程 (3) 中涉及的式 $q^2 + \frac{4p^3}{27}$ 称为一元三次方程的判别式, 记为 Δ .

问题 1.2 讨论 Δ 以确定方程 (2) 的实根与复根数.

1.5.2 一元四次方程的求根公式

对于一元四次方程

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$$

类比一元三次方程, 我们可以通过换元消去三次项.

记 $x = y - \frac{P}{4}$, 左式化为

$$y^4 + (Q - \frac{3P^2}{8})y^2 + (\frac{P^3}{8} - \frac{PQ}{2} + R)y + (S - \frac{PR}{4} + \frac{P^2Q}{16} - \frac{3P^4}{256}) = 0$$

因此只需求解方程

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad (5)$$

引入变量, 考虑 $(x^2 + t)^2 = x^4 + 2tx^2 + t^2$, 于是 (5) 可变为

$$(x^2 + t)^2 = (2t - p)x^2 - qx + t^2 - r \quad (6)$$

为将上端右式写成平方形式, 需要取合适的, 使得右式判别式为 0, 即

$$\Delta = (-q)^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

这是关于的三次方程, 可利用一元三次方程的求根公式.

为简化问题, 假设 t 已知, 则 (6) 可化为

$$(x^2 + t)^2 = (2t - p)\left(x - \frac{q}{2(2t - p)}\right)^2$$

两边开方, 得到两个一元二次方程. 通过解上述一元二次方程, 我们可以得出一元四次方程的求根公式. 由于解的表示过于复杂, 此处略去, 学生仅了解大致推导过程即可.

1.5.3 一元五次方程的可解性

尽管一元四次方程的根看起来十分复杂, 但它只包含算术运算: 四则运算与开方, 并且随着次数的增高, 一元方程的一般解在复杂度上也是不断增加的.

我们是否可以做出猜想, 五次方程的一般解应该比前面这些方程更加复杂, 可能需要整整一页甚至更多页, 但它的解也只是由算术运算得到的呢? 这一猜想是完全合理的. 如同之前给出四次方程一般解的表达式那样, 给出五次方程的一般解正是数学家们梦寐以求的目标.

但事实上, 这样的解不存在. 第一位相信一般五次方程没有代数解的人是意大利数学家拉菲尼 (Paolo Ruffini), 他大概在 18 世纪末确认了这一想法. 第二年他发表了一份证明. (高斯在 1799 年所写的博士论文中也陈述了相同的观点, 但是没有给出证明.) 接着, 拉菲尼分别在 1803 年、1808 年、1813 年发表了第二个、第三个、第三个证明. 这些证明没有一个让当时的数学家感到满意, 他们甚至没有关注这些证明.

公认的真正给出一般五次方程不存在代数解这一结论的人, 是挪威数学家阿贝尔 (Abel), 他在 1824 年发表了他的证明.

阿贝尔出生于欧洲北部边缘地带, 这个地方本身就很穷, 时局不稳就使它更穷、更不幸. 阿贝尔的家庭属于上流社会中的穷人, 他的父亲和祖父都是当地的牧师. 阿贝尔的父亲政途不顺, 染上酗酒, “死于酒精中毒, 留下九个孩子和一个寡妇. 这位母亲也为寻求安慰而酗酒. 丈夫丧礼后牧师来访时, 她与她的农夫情人竟然仍在床上鬼.”

阿贝尔很早就接触到了数学, 并幸运地受到霍尔姆博老师的指导, 这位老师非常欣赏他的才能. 尽管霍尔姆博自己不是有创造能力的数学家, 但他知道当时数学界的主流话题. 得到霍尔姆博的鼓励和经济上的帮助, 阿贝尔于 1821 年到 1822 年在克里斯蒂安娜大学求学.

1820 年, 阿贝尔证明了一般五次方程是不可解的. 1824 年, 他自己掏钱印制证明论文, 并把它寄送给当代著名的数学家. 为了节约开支, 阿贝尔把这一证明压缩到只有 6 页纸, 因此牺牲了证明中的很多细节部分. 尽管如此, 他肯定这 6 页纸就能为他打开欧洲最伟大数学家之门.

事与愿违的是, 阿贝尔也和当年的拉菲尼一样受到忽视, 寄出去的论文全都石沉大海, 伟大的高斯甚至信封都没拆开 (不是说高斯是个不怎样的家伙. 高斯在当时已是一位相当有名望的数学家, 因此经常遭受一些声称自己已经证明了某某著名问题的行为古怪之人的骚扰. 在其声望鼎盛时期, 高斯很不喜欢被人愚弄.), 即使有人打开来看, 也因他浓缩后的证明过于精简, 以至于到了晦涩难懂的地步, 懒得仔细研读.

阿贝尔本想借此划时代的发现谋得教职, 以图生活与研究的安定, 奈何天不从人愿. 于是他远赴柏林寻求机会. 似乎是老天有意给阿贝尔一份补偿, 阿贝尔在这里遇见了克瑞勒 (Crelle), 一位数学史中独一无二的人物. 克瑞勒是一名数学经纪人. 善于发现数学领域的优秀人才, 而且会倾其所有来帮助他们. 阿贝尔来到柏林时, 克瑞勒正打算创办属于自己的数学期刊, 他

相中了这位年轻的挪威数学天才，把他介绍给柏林的每一个人，在刚办的《纯数学和应用数学》期刊的第一期发表了他的不可解证明。他还发表了更多阿贝尔的论文。五次方程不可解证明只是阿贝尔广泛数学兴趣中小小的一部分。他主要研究的是分析学和函数论。

1826 年阿贝尔到达巴黎，埋首数月完成了一篇关于超越函数的论文后，满怀期待地把论文寄给法国科学院。当时科学院的秘书傅里叶将论文交给勒让德和柯西审阅，但前者老态龙钟，无力了解；后者高傲自负，完全没有意识到这篇论文的重要性，看了一阵没什么头绪就晾了一遍。阿贝尔苦等几个月都没有消息，祸不单行的是，这一时期他又染上肺结核，在那个时代，肺结核是不治之症。阿贝尔只好先到德国投靠好友克瑞勒。阿贝尔抱病完成一系列椭圆函数的文章后，思乡心切，于 1827 年春天回到了挪威。

找不到工作的阿贝尔只能靠当家教挣钱，贫病交迫中，他得知雅可比也发表了椭圆函数的论文，于是阿贝尔夜以继日地赶工，交出了椭圆函数的加法定理，双周期性以及椭圆积分的反演等重大发现。

1829 年 4 月 6 日，阿贝尔病逝，在他去世两天后，原在德国的克瑞勒尚未闻其死讯，欣喜地写信告诉他已被柏林大学聘为教授。这个迟到的教职并非毫无意义，学界同行在此后的十几年中开始打听这位“英年早逝的教授”的生前成果，逐步把他未发表的重要成果挖掘出来，阿贝尔的价值，终于在死后被人所认可。

阿贝尔的证明（严格来说是阿贝尔-拉菲尼的证明），即一般五次方程没有代数解的证明，开辟了代数史上第一个伟大的新纪元。

然而阿贝尔并没有终结一元多项式方程的一般理论。哪些五次方程可以代数求解，而且这些解可以用加、减、乘、除、开方符号以及五次方程系数组成的多项式表示？

对这个问题给出完整答案的是另一位法国数学天才伽罗瓦（Evariste Galois），他的故事和阿贝尔一样悲壮而传奇。

1.5.4

离巴黎十八公里，有一座名叫布尔拉林的小城，现在还是像十九世纪初叶那样十分宁静，大街两旁至今还屹立着集装从令人难忘的往昔完整地幸存下来的、门上有宽檐的尖顶房屋

伽罗瓦出生于巴黎郊外一个名叫布拉雷纳的小镇，他在中学的前两年成绩优异。14 岁时，伽罗瓦开始跟随韦尼耶（Vernier）学习数学，并疯狂地爱上了数学，以至于对其他学校的其他课程滋生了厌恶情绪。他看欧拉、拉格朗日那些大数学家的著作毫不费力，但他在数学方面的日常功课依然很平庸。

1828 年伽罗瓦进入巴黎高等师范学院的预科学校，并于 1829 年 3 月 1 日发表第一篇论文，几乎同时，他开始了在代数方程方面的研究，并将与此相关的两篇论文呈交给了法国科学院，这两篇论文由柯西负责审阅，然而都未被准予发表。主流说法是，柯西意识到了文章的价值，但他希望将论文合并去搏一搏数学学术大奖。伽罗瓦长时间未能收到回复，便痛苦地把论文投给了傅里叶，然而傅里叶在审阅中途因病去世，伽罗瓦又将论文投给泊松，泊松看完伽罗瓦的论文后退稿了，回复到：“我完全不能理解你写的是什么！”伽罗瓦向法国科学院的三次投稿中，除了傅里叶是不可抗力因素，另外两位都让伽罗瓦感受到了深切的侮辱。

伽罗瓦是一个血气方刚的小伙子，政治观点非常激进，他强烈支持共和主义。1830 年，法国爆发七月革命后，伽罗瓦非常抵触上台的新国王。自己就读的高等师范学校的校长将学生锁在

高墙之内，他就在校报上抨击校长的做法。伽罗瓦并无多少社会地位和民望，他单枪匹马反抗国家机器也绝对不会有什好下场，他除了被学校开除外，还因政治问题两度下狱。伽罗瓦一边践行他的政治观念，一边独立创造了新的理论，给出了一元多项式方程可解的充要条件。

据说，在苦闷的服刑与研究的日子，伽罗瓦遇到了一个令他狂热的女人——一位医生的女儿。出狱不久后，他就因为这个女人而卷入一场决斗，情敌是一名军官。文弱书生与职业军人的对决，结果可想而知，但他仍参加了这一场明知必死的决斗，在决斗的前两天，伽罗瓦奋笔疾书，把自己这辈子所有的数学成果记录下来，就像预料到自己的人生下一刻即将结束一样，他在信的最后写道：“别了！我为公共的福利已经献出了自己的大部分的生命”。最后他拿上枪，去和人进行自己人生中的第一次也是最后一次决斗。1832年5月30日清晨，在冈提勒（Gentilly）的葛拉塞尔（Glacière）湖附近，决斗双方用手枪在相距几公尺的地方互相射击。随着一声枪响，伽罗瓦腹部中弹倒地。几小时之后，当地一个居民偶然发现了他，把他送到了科申医院。

“不要哭，”伽罗瓦对最后几分钟和自己在一起的弟弟亚耳弗勒说，“不要哭，我在二十岁的年纪死去，需要我全部的勇气。”伽罗瓦拒绝了神父替他起到。

1832年5月31日上午10时，伽罗瓦与世长辞。

在此之后，法国科学院——那个伽罗瓦曾经极为抵触的机构，吸收了一位叫做刘维尔的中年数学家，他在四处奔波小半辈子之后，终于空闲下来，得以在巴黎对年轻数学家进行培养，这时，他发现了已经去世了十几年的伽罗瓦曾经寄给科学院的论文。他完完全全被伽罗瓦的天才构想所震惊了，于是他联系到伽罗瓦的亲属朋友，寻找到他的其他遗稿，并逐步发表在纯粹与应用数学杂志上。同一时期，阿贝尔曾经在德根建议下而进行的椭圆函数和超越数的研究，也被人们广泛注意到，并连带着发现了他自己独自创造，险些被埋没了的工具，这个新工具的名字最终由伽罗瓦给出，他在论文中使用了法语单词“Group”，表示“群体”，相应的，他所创造的全新分析工具，也被后人称为“群论”。从这一刻开始，解代数方程的时代结束了，抽象代数（或称近世代数）的理论也被正式开启。

第一章 向量、解三角形、复数

1.5 拓展阅读：一元 n 次方程的解

第一章 向量、解三角形、复数

1.5 拓展阅读：一元 n 次方程的解

第一章 向量、解三角形、复数

1.5 拓展阅读：一元 n 次方程的解

第一章 向量、解三角形、复数

1.5 拓展阅读：一元 n 次方程的解