

第一章 向量、解三角形、复数

1.4 复数

实系数一元二次方程并不是总有实数解，这是因为在实数范围内负数不能进行开平方运算. 在数学的发展史上有一件有意思的事：数学家在研究三次方程求解的过程中，即使最终得到实根，过程中却常常要对一些负数开平方，遇到了难以自圆其说的尴尬. 于是，一种被称为“虚数”的新数于 16 世纪开始被引入了数学. 之后，数学家将实数与虚数合称为复数.

复数是人类理性思维的演绎成果，它的产生首先是因为数学家解决数学自身问题的需要，在很长的一段时间内，人们并不清楚它与现实世界到底有怎样的联系. 后来，数学家建立了复数与向量，即复数与几何的关联，复数便在力学和电磁学中发挥了重要作用，在数学及其他科学领域中也越来越体现出它的重要性. 现在，复数已经成为数学工作者与许多领域的科技人员熟练掌握并广泛应用的基本数学工具.

1.4.1 基本概念

定义 1.4.1 (虚数单位). 虚数单位 i 是一个满足 $i^2 = -1$ 的数.

规定虚数单位与实数间的乘法满足交换律、结合律、分配律.

定义 1.4.2 (复数, Complex Number). 形如 $a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ 的数称为**复数**. a, b 分别称为 z 的**实部**, (记作 $\operatorname{Re} z$) 与**虚部** (记作 $\operatorname{Im} z$). 全体复数构成的集合用 $\mathbb{C}$ 表示.

复数常用单个字母 z, w 等表示，复数的表达方式 $a + bi$ 称为它的**代数形式**.

对于复数 $z = a + bi$, 当 $b = 0$ 时, 称 z 为**实数**; 当 $b \neq 0$ 时, 称 z 为**虚数**; 特别地, 当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 称 z 为**纯虚数**. 复数集 $\mathbb{C}$ 可以被划分为实数集 $\mathbb{R}$ 与虚数集 $\mathbb{I}$.

可知, 复数 $z = a + bi$ 一一对应于有序实数对 (a, b) , 而有序实数对与平面直角坐标系上的点 $Z(a, b)$ 也是一一对应的, 因此可以用平面直角坐标系中的点 $Z(a, b)$ 表示复数 $a + bi$, 这称为复数的**坐标形式**, 这种用来表示复数的平面称为**复平面**, 其中 x 轴称为**实轴**, y 轴称为**虚轴**.

定义 1.4.3 (共轭复数). 对于复数 $z, \bar{z}$ 共轭复数是与 z 实部相同, 虚部相反的复数, 记为 $\bar{z}$. 这时也称 z 与 $\bar{z}$ 互为共轭.

若复数 $z = a + bi$, 则 z 的共轭复数为 $\bar{z} = a - bi$. 两个互为共轭的复数在复平面上对应的点关于实轴对称.

复平面上的点 $Z(a, b)$ 可用于表示复数 $z = a + bi$, 而 $Z(a, b)$ 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是一一对应的 (其中 O 是坐标原点), 于是可以用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 来表示复数 z , 这称为复数的**向量形式**.

定义 1.4.4 (复数的模). 对于复数 z , 定义 z 的模为其对应向量的模长, 记为 $|z|$.

命题 1.4.5. 对任意复数 z , 记其共轭复数为 $\bar{z}$, 有 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

1.4.2 复数的运算

当我们引入虚数单位 i ，将实数集扩展为复数集后，接踵而至的问题便是定义运算法则，并且这些运算法则必须与实数的运算法则相兼容.

定义 1.4.6 (复数的运算). 设复数 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 定义复数 z_1, z_2 的运算如下:

加减法: 实部与实部相加减, 虚部与虚部相加减.

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

乘法: 可按多项式相乘, 再用 $i^2 = -1$ 化简.

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

除法: 分子分母同乘分母的共轭实数, 使分母实数化.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

命题 1.4.7. 取共轭复数的过程与复数的四则运算可交换, 即对任意复数 z_1, z_2 及其对应的共轭复数 $\overline{z_1}, \overline{z_2}$, 有

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

且当 $z_2 \neq 0$ 时, 有

$$\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$$

命题 1.4.8. 对复数 z_1, z_2 及其对应的共轭复数 $\overline{z_1}, \overline{z_2}$, 有

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$$

命题 1.4.9. 对于复数 z_1, z_2 , 有

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

由于复数与向量之间存在一一对应关系, 因此复数的加减法在复平面上呈现为向量的加减法, 那么复数的乘法在复平面上又呈现为怎样的几何意义呢?

1.4.3* 复数的三角表示

复数的加减运算公式比较简洁. 但是复数的乘除, 尤其是复数的除法公式比较复杂, 计算起来比较繁琐. 本节将介绍复数的三角表示, 在这种表示下, 复数乘、除、以及乘方和开

方的形式被大大简化了。

如图, 复数 $z = a + bi$ 对应着复平面的一个点 $Z(a, b)$, 定义角 $\theta = \angle POx$ 为 z 的幅角, 记为 $\operatorname{Arg} z$. 可知, 对于同一个复数 z , $\operatorname{Arg} z$ 是多值的, 即, 若 z 的一个幅角为 θ , 则 $\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 为了方便, 把属于 $[0, 2\pi)$ 的 z 的幅角称为 z 的幅角的主值, 记作 $\arg z$.

复数的任意一个幅角 θ 与复数的模 r 一起完全确定了复数, 即, 对于复数 $z = a + bi$, 有 $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$, 则 z 可表示成

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

这称为**复数的三角形式**.

问题 1.1 已知复数 $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha), z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$, 证明:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$$

这是三角形式下的复数乘法、除法公式, 它的一种记忆方法是: “乘法模长相乘、幅角相加; 除法模长相除、幅角相减.”

利用上述公式, 可以证明棣莫弗定理.

定理 1.4.10 (棣莫弗定理, De Moivre's Theorem). 对任意实数 θ 和整数 n , 有

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

这解决了复数的乘方问题。

问题 1.2 设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 证明 z 的 n 次方根为

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

这解决了复数的开方问题。

1.4.4 欧拉公式及其简单应用

定理 1.4.11 (欧拉公式, Euler's Formula).

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

证明. 考虑 $e^x, \sin x, \cos x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒级数:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

将 $x = i\theta$ 代入 e^x 泰勒展开式:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!}$$

据 $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$ 等性质, 将其按实部虚部归类:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

代入 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的泰勒级数, 得

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

□

对上述等式, 令 $\theta = \pi$, 可以得到欧拉恒等式

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

根据欧拉公式, 复数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 可表示为 $z = re^{i\theta}$, 它的共轭复数是 $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

下面略谈欧拉公式的简单应用。

例题 1.4.1. 借助欧拉公式简化复数三角形式的乘法与除法公式推导.

解 设 $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha), z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$, 由欧拉公式

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\alpha} \cdot r_2 e^{i\beta} = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)} = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\alpha}}{r_2 e^{i\beta}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\alpha-\beta) + i \sin(\alpha-\beta))$$

欧拉公式中同时出现了指数, 三角函数与复数, 它将这三种类型的数的运算法则联系起来. 例如, $\cos \theta, \sin \theta$ 可表示为

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

这时的三角函数可适用指数运算的规则.

例题 1.4.2. 借助欧拉公式简化正余弦两角和公式的推导

解 由

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)$$

左式做变形:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$$

展开右式并整理:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

对比 $e^{i(\alpha+\beta)}$ 两种表示方式的实部与虚部, 得

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

由此证明了正余弦两角和公式.

1.4.5 附：为什么可以对 -1 开平方？

在中学数学中，我们认为对 -1 开平方是无意义的，更准确地说，这是未定义的，而随着学习的深入，我们不仅给 -1 的平方根一个假想的结果，并为此创造出一个崭新的数学体系。这又是为什么呢？

我们不妨从一个故事出发：一对朋友道别前，约定在两周后的同一天、同一时间再见。其中一个掏出记事本以便记下见面的日期，他喃喃自语道：“今天是 4 月 20 号，14 天之后是 34 号，那就是 34 减 30——5 月 4 号。”

我们在思考“14 天后是几号”时通常会这样做：10 天之后是 4 月 30 号，11 天之后是 5 月 1 号，那么 14 天之后就是 5 月 4 号。从 4 月到 5 月的过渡使得数字的自然增长被打断了。而这位朋友则并未在这些太过实际的障碍上停滞不前，他发明了一个不存在的日期：4 月 34 号，以便让自己的推导直达目标，而这丝毫没有妨碍他得到正确的结果。

在利用卡尔达诺的三次方程求根公式求解方程 $x^3 = 15x + 4$ ，有

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

但是该方程有一个显而易见的实数根 $x = 4$ 。

意大利数学家邦贝利 (Rafael Bombelli) 则发现：如果“捏着鼻子”暂时接受 $\sqrt{-1}$ 是真实存在的，继续向下化简，最终可以消去 $\sqrt{-1}$ ，得到正确答案 $x = 4$ 。

问题 1.3 按上述思路化简 $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ 。

如果将卡尔达诺的三次方程求根公式置于一个更为“广阔”的数学世界中，我们会发现，运算过程虽然短暂地在这一世界遨游，但最终仍然正确地回归到了现实。这是数学颠覆我们三观的一大优点：有时我们可以用不存在的东西去恰当地思考。虽然我们是从一个现实问题出发的，但我们可以创造一个数学世界，在这个世界中，思维可以自由漫步，不必担心“现实意义”的妨碍。

引入不存在的虚数单位后，数学世界并未毁灭，因它在接纳新事物的同时，其原先的部分依然保持着和谐与统一。而随着复数合理性的确立，人们发现了复数乘除法和向量旋转的关联、欧拉恒等式、代数基本定理等具有深远意义的结论，这些结论不仅在数学世界中是自洽的，并且在量子力学、交流电、信号处理等现实研究问题中也成为了极其强大的工具。

参考文献

- [1] 李忠. 复数的故事 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.

第一章 向量、解三角形、复数

1.4 复数

习 题

A 组

- 【沪教版必修二复习题 A.1】虚数的平方一定是
(A) 正实数 (B) 负实数 (C) 虚数 (D) 虚数或负实数
- 【沪教版必修二习题 9.1.B8】设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 则 “ z_1, z_2 中至少有一个虚数” 是 “ $z_1 - z_2$ 为虚数” 的
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【沪教版必修二复习题 B.2】设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 则 z^2 是纯虚数的充要条件是
(A) $a^2 = b^2$ (B) $a^2 + b^2 \neq 0$ (C) $|a| = |b| \neq 0$ (D) $ab \neq 0$
- 【2021 福建省质检 1】设复数 z_1, z_2 满足 $z_2 \neq 0$, 且 $|z_1 \cdot \overline{z_2}| = 2|z_2|$, 则 z_1 可以是
(A) $-1 - i$ (B) $2 + 2i$ (C) $-1 - \sqrt{3}i$ (D) $4i$
- 【2007 上海文 10 理 9】(多选) 对于非零实数 a, b , 以下四个命题都成立. 那么对于非零复数 a, b , 仍然成立的命题有 (对于复数 a , 记 $|a|$ 为 a 的模长)
(A) $a + \frac{1}{a} \neq 0$ (B) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(C) 若 $|a| = |b|$, 则 $a = \pm b$ (D) 若 $a^2 = ab$, 则 $a = b$
- 解答下述问题:
 - 求复数 $\frac{1}{-2+i} + \frac{1}{1-2i}$ 的虚部;
 - 求 $(1-i)^{2027}$;
 - 【沪教版必修二习题 9.1.A10】已知复数 $z = 1 + i$, 求 $\frac{\overline{z}^2 - \overline{z} + 1}{z^2 + \overline{z} + 1}$ 的值;
 - 【沪教版必修二习题 9.2.A6】求值: $\left| \frac{(\sqrt{5}-2i)(1+\sqrt{3}i)^2}{\sqrt{13}+\sqrt{23}i} \right|, \left| \frac{(1+3i)^2(4-i)}{(1-3i)^2} \right|$.
- 若 $1 + \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一个复根, 求 b, c .
- 已知复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R}, i$ 为虚数单位), 若 $|z| = 1, |z - i| = 1$, 求 $|z - 2i|$.

9. 【2025 “漫游数海”回归课本联赛（网络联考）2】已知实数 a, b, c, d 均不为 0, 有下列四个命题:

甲: 复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的和是实数 乙: 复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的差是实数

丙: 复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的积是实数 丁: 复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的商是实数

甲、乙、丙、丁中至多有几个真命题?

10. 已知复数 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i, z_3 \neq 0$, 证明或反驳

(1) 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$

(2) 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1^2 = z_2^2$

(3) 若 $z \neq 0$, 则 $z^2 = |z|^2, \frac{z}{z} = \frac{z^2}{|z|^2}$

(4) $|z - \overline{z}| = 2y$

(5) $z_1 \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1} \cdot z_2, |z_1 \cdot \overline{z_2}| = |\overline{z_1} \cdot z_2|$

(6) 若 $z^2 \in \mathbb{R}$, 则 $z \in \mathbb{R}$

(7) 若 $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$, 则 $z_1 = \overline{z_2}$

(8) 若 $z_1 z_3 = z_2 z_3$, 则 $z_1 = z_2$

11. 【人教 B 版必修四 52 页第 7 题】已知复数 z 满足 $z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R}, |z - 2| = 2$, 求 z .

12. 【2020 全国 II 卷理 15】设复数满足 $|z_1| = |z_2| = 2, z_1 + z_2 = \sqrt{3} + i$, 求 $|z_1 - z_2|$.

13. 【2026 上海春 9】已知 $m > 1$, 复数 z 满足 $|z| = 2$, 且 $|z - i|$ 的最小值与 $|z - m|$ 的最小值相同, 求 m .

14. 【2025 高联一试 B4】设复数 z 满足 $z + i$ 与 $z^2 + 2i$ 均为实数, 求 $|z^3 + 3i|$.

15. 解答下述问题:

(1) 证明: 对任意 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 有 $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$;

(2) 证明: 对任意 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 有 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. 这称为平行四边形恒等式.

16. 解答下述问题:

(1) 已知复数 z 满足 $|z| = 1$, 求证: $z + \frac{1}{z}$ 是实数.

(2) 已知 z 是虚数, 判断 “ $z + \frac{r^2}{z}$ 是实数” 是否为 “ $|z| = r$ ” 的充要条件?

1. D.2. B.3. D.

4. C. 由 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1||z_2| = 2|z_2|, z_2 \neq 0$, 约去 $|z_2| > 0$, 得 $|z_1| = 2$. 四个选项中只有 $-1 - \sqrt{3}i$ 的模为 2, 故选 C.

5. BD

6. (1) $\frac{1}{5}$, (2) -4 , (3) $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$, (4) $2, \sqrt{17}$.

7. $b = -2, c = 3$.8. $\sqrt{3}$.

9. 2. 四个命题分别等价于 $b+d=0, b-d=0, ad+bc=0, bc-ad=0$. 甲乙同时真会推出 $b=d=0$, 与 $b, d \neq 0$ 矛盾; 丙丁同时真会推出 $ad=bc=0$, 与 $a, b, c, d \neq 0$ 矛盾. 因此至多有两个真命题. 取适当非零数可使任意指定的两条同时成立, 故最大值确为 2.

10.

11. $1 \pm \sqrt{3}i, 4$ 12. $2\sqrt{3}$.13. 314. $\sqrt{5}$

15.

16.

第一章 向量、解三角形、复数

1.4 复数

B 组

1. 设 $r > 0$, 复数 z 满足 $|z| = r$, 则 $z + \frac{1}{z}$ 在复平面上对应的点的轨迹是
(A) 焦距为 4 的椭圆 (B) 焦距为 2 的椭圆 (C) 焦距为 $\frac{4}{r}$ 的椭圆 (D) 焦距为 $\frac{2}{r}$ 的椭圆
2. 【2014 陕西 8】原命题为“若 z_1, z_2 互为共轭复数, 则 $|z_1| = |z_2|$ ”, 求其逆命题、否命题、逆否命题的真值.
3. 【1993 旧高考理 4】已知复数 $z = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, 求 $z^{100} + z^{50} + 1$.
4. 【1983 全国卷文 8】已知复数 $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, 求证: $z^3 + \frac{1}{z^3} = 2 \cos 3\alpha$
5. 已知复数 z_1, z_2 满足 $z_1 = i \cdot \overline{z_2}, |z_1 - 1| = 1$, 求 $|z_1 - z_2|$ 的取值范围.
6. 【1990 全国卷理 24】设 $a \geq 0$, 在复数集 $\mathbb{C}$ 中解方程: $z^2 + 2|z| = a$.
7. 【1996 全国卷理 4 改编】求值: $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$.
8. 【2001 京蒙皖理 18 (1)】已知 $z^7 = 1 (z \in \mathbb{C}, z \neq 1)$. 证明: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$.
9. 在复数域中解关于 z 的方程 $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + az + 9) = 0 (a \in \mathbb{R})$, 得到四个互不相等的根, 若这四个根在复平面上对应的点共圆, 求 a 的取值范围.
10. 【2025 高联一试 A5】若正整数 k 满足 $\left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 25^\circ} + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot i\right)^k \in \mathbb{R}$, 求 k 的最小值.
11. (1) 证明: 如果 a, b 都是复数, $b \neq 0$, 且 s 是正实数, 则三个复数 $a + sbi$, $a - sbi$, $a + b$ 在复平面上对应的三个点构成等腰三角形. 若复平面上的三个点构成等腰三角形, 借助图形, 解释说明如何确定上述 a, b, s 的值, 使得这三个点对应的复数分别为 $a + sbi$, $a - sbi$ 和 $a + b$.
(2) 证明: 如果复平面上的等腰三角形的三个顶点对应的复数恰好是方程 $z^3 + pz + q = 0$ 的根 (p, q 都是复数), 则存在非零实数 s , 使得
$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27(3s^2 - 1)^3}{4(9s^2 + 1)^2}.$$

(3) 求函数 $f(x) = \frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}$ 的单调区间.
(4) 证明: 如果复平面上的等腰三角形的三个顶点对应的复数恰好是方程 $z^3 + pz + q = 0$ 的根, 则 $\frac{p^3}{q^2}$ 是实数且 $\frac{p^3}{q^2} > -\frac{27}{4}$.
12. 【2023 STEP2 第 7 题】
(1) 设复数 z 和 w 都是复数, $z = a + bi$, $w = c + di$. 证明 $|zw| = |z||w|$.

(2) 通过考虑复数 $2+i$ 和 $10+11i$, 求一组正整数 h 和 k 使得 $h^2+k^2=5\times 221$ 。

(3) 求一组正整数 m, n 使得 $m^2+n^2=8045$ 。

(4) 已知 $102^2+201^2=50805$ 。求一组正整数 p 和 q 使得 $p^2+q^2=36\times 50805$ 。

(5) 求三组不同的正整数 r 和 s , 使得 $r^2+s^2=1002082$ 且 $r<s$ 。

(6) 已知 $109\times 9193=1002037$ 。求一组正整数 t 和 u 使得 $t^2+u^2=9193$ 。

13. 数学中的数除实数、复数外, 还有四元数。四元数在计算机图形学中有广泛应用, 其主要用于描述空间中的旋转。

集合 $\mathbf{H}=\{d+ai+bj+ck \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ 中的元素 $\alpha=d+ai+bj+ck$ 称为四元数, 其中 i,j,k 都是虚数单位, d 称为 α 的实部, $ai+bj+ck$ 称为 α 的虚部。两个四元数之间的加法定义为

$$(d_1+a_1i+b_1j+c_1k)+(d_2+a_2i+b_2j+c_2k)=(d_1+d_2)+(a_1+a_2)i+(b_1+b_2)j+(c_1+c_2)k.$$

两个四元数的乘法定义为: $ij=-ji=k, jk=-kj=i, ki=-ik=j, i^2=j^2=k^2=-1$, 四元数的乘法具有结合律, 且乘法对加法有分配律。对于四元数 α , 若存在四元数 β 使得 $\alpha\beta=\beta\alpha=1$, 称 β 是 α 的逆, 记为 $\beta=\alpha^{-1}$ 。实部为 0 的四元数称为纯四元数, 把纯四元数的全体记为 W 。

(1) 设 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 四元数 $\alpha=d+ai+bj+ck$ 。记 $\alpha^*=d-ai-bj-ck$ 表示 α 的共轭四元数;

i. 计算 $\alpha\alpha^*$;

ii. 若 $\alpha\neq 0$, 求 α^{-1} ;

iii. 若 $\alpha\neq 0, \beta\in W$, 证明: $\alpha\beta\alpha^{-1}\in W$;

(2) 在空间直角坐标系中, 把空间向量 $\alpha=(a,b,c)$ 与纯四元数 $\alpha=ai+bj+ck$ 看作同一个数学对象。设 $\alpha, \beta\in W, \gamma=\frac{1}{2}(\alpha\beta-\beta\alpha)$ 。

i. 证明: $\gamma\in W$;

ii. 若 α, β 是平面 X 内的两个不共线向量, 证明: γ 是 X 的一个法向量。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.

第一章 向量、解三角形、复数

1.4 复数

第一章 向量、解三角形、复数

1.4 复数