

第一章 向量、解三角形、复数

1.3 解三角形

1.3.1 基本概念

问题 1.1 解答下述问题：

- (1) 试述正弦定理, 余弦定理并给出推导过程;
- (2) 试述海伦公式并给出推导过程.

第一章 向量、解三角形、复数

1.3 解三角形

习 题

- 【2010 上海理 18】某人要作一个三角形, 要求它的三条高的长度分别是 $\frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{5}$, 则此人将

(A) 不能作出满足要求的三角形 (B) 作出一个锐角三角形

(C) 作出一个直角三角形 (D) 作出一个钝角三角形
- 【2010 湖北理 10】已知 $\triangle ABC$ 的三边边长为 a, b, c ($a \leq b \leq c$), 定义它的倾斜度为 $t = \max \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\} \cdot \min \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\}$, 则 “ $t = 1$ ” 是 “ $\triangle ABC$ 为等边三角形” 的

(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【2025 “集英苑测试”(网络联考) 6】已知 $a, b, c > 0$, 则 “ a, b, c 可以构成锐角三角形的三边长” 是 “ a^2, b^2, c^2 可以构成三角形的三边长” 的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【2014 全国 II 卷 4】已知钝角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}$, $AB = 1, BC = \sqrt{2}$, 求 AC .

(A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) 2 (D) 1
- 【2025 “fiddie” 模拟考 6】在 $\triangle ABC$ 中, 有 $\frac{A}{B} = \frac{b}{c} = 2$, 求 $\frac{a}{c}$.
- 【2024 全国甲卷理 11 文 12 改编】在 $\triangle ABC$ 中, 有 $B = \frac{2\pi}{3}, b^2 = 6ac$, 求 $\cos A + \cos C$.
- 【2008 江苏 13】求满足 $AB = 2, AC = \sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积最大值.
- 【2005 湖南理 10】设 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积, $\lambda_1 = \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}, \lambda_2 = \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}, \lambda_3 = \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$, 定义 $f(P) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $f(Q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, 则

(A) 点 Q 在 $\triangle GAB$ 内 (B) 点 Q 在 $\triangle GBC$ 内 (C) 点 Q 在 $\triangle GCA$ 内 (D) 点 Q 与点 G 重合
- 【2006 安徽理 11】如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值, 则

(A) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形

(B) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形

(C) $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形

(D) $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

10. 【2020 江苏 13】在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 6 \cos C$, 求 $\frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B}$.

11. 【2016 江苏 14】在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = 2 \sin B \sin C$, 求 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值.

12. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a^2 = b^2 + bc$, 求 $\frac{c}{b} + \frac{2}{\cos^2 B}$ 的最小值.

13. 【2013 重庆理 20】在 $\triangle ABC$ 中, 已知

$$a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = c^2, \quad \cos A \cos B = \frac{3\sqrt{2}}{5}, \quad \frac{\cos(\alpha + A) \cos(\alpha + B)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

求 $\tan \alpha$.

14. 【2007 四川文 12】 l_1, l_2, l_3 是同一平面内从上到下排布的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是 1, l_2 与 l_3 间的距离是 2, 正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1, l_2, l_3 上, 求 $\triangle ABC$ 的边长.

15. 【2021 全国乙卷理 9】魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛的高. 如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”, 则海岛的高 $AB =$

(A) $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ (B) $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$ (C) $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$ (D) $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

16. 【1998 全国卷文 14 改编】一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列, 求其最小内角的正弦值.

17. 【2006 全国 II 卷 14】已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 成等差数列, $AB = 1$, $BC = 4$, 求边 BC 上的中线 AD 的长.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 6, \angle B - \angle C = 60^\circ$, 求 BC .

19. 【2022 全国甲卷理 16】已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB = 120^\circ, AD = 2, CD = 2BD$, 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, 求 BD .

20. 【2023 全国甲卷理 16】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ, AB = 2, BC = \sqrt{6}, \angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D , 求 AD .

21. 【2015 全国 I 卷 16】平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ, BC = 2$, 求 AB 的取值范围.

22. 【2023 温州三模 15】已知 $\triangle ABC$ 内有一点 P , 满足 $\angle PAB = \angle PBC = 30^\circ, AB = 2, \sin \angle ABC = \frac{3}{5}$, 求 PB .

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A = 60^\circ, \angle C = 30^\circ, AC = 4, D, E, F$ 分别在边 AC, BC, AB 上, 且 $\triangle DEF$ 为等边三角形, 求 $\triangle DEF$ 面积的最小值.

24. 【2000 京皖理 19】在 $\triangle ABC$ 中, 证明: $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}$.

25. 四边形 $ABCD$ 中, $AB = 1, CD = AD = 2, BC = 3, \angle BAD + \angle BCD = \pi$. P 为边 BC 上一点, 且 $\triangle PCD$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABP$ 的外接圆半径.

26. 【2026 新高考 I 卷 16】已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, BC = 2\sqrt{3}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$;

- (2) 设 D, E 两点满足: D 在 BA 的延长线上, $DE \parallel BC$, $AE \perp AC$. 若 $DE = \sqrt{6}$, 求 CE .
27. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 2, AC = 6\sqrt{2}, \angle BAC = 45^\circ$, BC, AC 边上的两条中线 AM, BN 相交于点 P . 分别求 $\angle BAM$ 的正弦值与 $\angle MPN$ 的余弦值.
28. 【2024 长沙适应性考试 20】在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 - b^2 = bc^2$. 点 D 在线段 AB 的延长线上, 且 $|AB| = 3, |BD| = 1$, 当点 C 运动时, 判断 $|CD| - |CA|$ 是否为定值.
29. 【2023 新高考 I 卷 17】【2004 全国 II 卷理 17】已知锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$, $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$. 设 $AB = 3$, 求 AB 边上的高.
30. 【2022 全国乙卷理 17】 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$.
- (1) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$;
- (2) 若 $a = 5, \cos A = \frac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.
31. 【2022 新高考 I 卷 18】 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$. 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值.
32. 【2023 温州一模 18】锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\frac{\sin(A-B)}{\cos B} = \frac{\sin(A-C)}{\cos C}$.
- (1) 求证 $B = C$;
- (2) 若 $a \sin C = 1$, 求 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最大值.
33. $\triangle ABC$ 中, 已知 $2 \sin C = \sin(B-A) = 2 \sin A \sin C - \sin^2 B$.
- (1) $\angle B$ 是否可能为直角? 请说明理由.
- (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的取值范围.
34. 【2021 新高考 I 卷 19】 $\triangle ABC$ 中, $b^2 = ac$, 点 D 在边 AC 上, $BD \sin \angle ABC = a \sin C$. 若 $AD = 2DC$, 求 $\cos \angle ABC$.
35. 在凸四边形 $ABCD$ 中, 记 $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, 四边形 $ABCD$ 的面积为 S . 已知 $\angle B + \angle D = 180^\circ$.
- (1) 证明: $2(ab + cd) \cos B = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$;
- (2) 证明: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, 其中 $p = \frac{a+b+c+d}{2}$;
- (3) 若 $b = c = d = 1$, 求四边形 $ABCD$ 面积 S 的最大值.
36. 【2025 “数海漫游二模” (网络联考) 15】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A = \frac{bc}{c^2 - a^2}$. 若 $B = b = \frac{\pi}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

1. **B.** 设三边为 a, b, c , 对应高为 $h_a = 1/13, h_b = 1/11, h_c = 1/5$. 因此三边之比为

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = 13 : 11 : 5.$$

这是可以作出的, 由于 $5^2 + 11^2 = 146 < 13^2$, 该三角形为锐角三角形。

新答案 (来源: 1.12 解三角形.md): D

【解题思路】因为 $\triangle ABC$ 的面积可表示为

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

其中 h_a, h_b, h_c 分别是 a, b, c 所在的边的高.

$$\text{则 } a = \frac{2S}{h_a}, b = \frac{2S}{h_b}, c = \frac{2S}{h_c}.$$

不妨设 $h_a = \frac{1}{13}, h_b = \frac{1}{11}, h_c = \frac{1}{5}$, 则 $a : b : c = 13 : 11 : 5$.

于是 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{121 + 25 - 169}{2 \times 11 \times 5} < 0$, 所以, 一定是钝角三角形.

【实测数据】本题难度 0.55, 区分度 0.34, 选 A, B, C, D 分别占比 16.74%、23.39%、4.46%、54.94%.

【易错警示】本题在解题过程中, 隐含着一个高与边转换的关系, 有些学生不能洞察这一关系, 显得一筹莫展, 这样的学生一般选择了 A , 所占比率有 16.74%.

2. **A.** 必要性成立, 若三角形为等边三角形, 易得 $t = 1$. 充分性不成立, 由 $a \leq b \leq c$, 有

$$\max \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\} = \frac{c}{a}, \min \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\} = \min \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c} \right\}.$$

假设 $\frac{a}{b} < \frac{b}{c}$, 那么 $t = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$, 于是 $b = c$, 取 $(a, b, c) = (1, 2, 2)$ 可以构成三角形, 满足对应的 $t = 1$, 但不是等边三角形. 于是选 A .

评: 实测数据: 本题文科难度 0.51, 区分度 0.40, 选 A, B, C, D 的比率分别为 21.13%、50.56%、21.32%、6.77%; 理科难度 0.67, 区分度 0.42, 选 A, B, C, D 的比率分别为 11.6%、67.38%、16.96%、3.88%

3. **C.** 充分性成立, 不妨设最大边为 c . 三角形为锐角三角形当且仅当 $c^2 < a^2 + b^2$. 此时 a^2, b^2, c^2 可以构成三角形的三边长. 必要性成立, 已知 a^2, b^2, c^2 能构成三角形, 则一定有 $c^2 < a^2 + b^2$, 此时 a, b, c 构成一个锐角三角形的三边长.

4.

5. 由正弦定理可得 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} = 2$. (*) 又 $A/B = 2$, 所以 $A = 2B, C = \pi - 3B$, 即 $\sin C = \sin 3B$. 带入 (*) 式有

$$2 \sin 3B = \sin B.$$

展开三倍角 $\sin 3B = 3 \sin B - 4 \sin^3 B$ 并约去 $\sin B$, 得到 $2(3 - 4 \sin^2 B) = 1$, 于是 $\sin^2 B = \frac{5}{8}$.

故 $\cos^2 B = 3/8$, 由于 B 为锐角, 所以 $\cos B = \sqrt{3/8}$. 于是

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin 2B}{\sin 3B} = \frac{2 \sin B \cos B}{\sin B/2} = 4 \cos B = 4 \sqrt{3/8} = \sqrt{6}.$$

6. $\sqrt{42}/4$. 将 $b^2 = 6ac$ 边化角, 可以得到 $\sin A \sin C = \frac{1}{6} \sin^2 B = \frac{1}{8}$. 又由 $\cos B = -\cos(A+C) = \sin A \sin C - \cos A \cos C$ 可以得到 $\cos A \cos C = \frac{5}{8}$

由余弦定理, 有

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B}{2 \sin A \sin C} = \cos B$$

可以得到 $\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{5}{8}$, 于是 $\cos^2 A + \cos^2 C = \frac{11}{8}$, 故

$$\cos A + \cos C = \sqrt{\cos^2 A + \cos^2 C + 2 \cos A \cos C} = \frac{\sqrt{42}}{4}$$

7.

8. **A.** 重心 G 满足 $f(G) = (1/3, 1/3, 1/3)$, 考虑由 G 作若干移动到 Q , 为保证第二个分量仍为 $1/3$, 应将 G 沿直线 AC 平移, 要使得第一个分量增大到 $1/2$, 则应向 $\overrightarrow{CA}$ 方向平移到 $\triangle GAB$ 内部。

评: 实测数据: 本题理科难度为 0.550, 区分度为 0.549

9. **D.** 三角形 $A_1 B_1 C_1$ 的三个余弦值等于正数, 故其三个角均为锐角. 下证明三角形 $A_2 B_2 C_2$ 为钝角三角形, 采取反证法证明. 假设三角形 $A_2 B_2 C_2$ 为锐角三角形, 记三角形 $A_1 B_1 C_1$ 中的三个角的大小为 x, y, z (忽略顺序), 于是 $\sin A_2 = \cos x, \sin B_2 = \cos y, \sin C_2 = \cos z$. 对于 $\sin C_2$ 要保证 $\cos z$ 为正值, 即 $x + y > \frac{\pi}{2}$. 下分析 A_2, B_2 . 可知

$$\sin A_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin B_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

讨论诸情况, 只可能有 $A_2 = \frac{\pi}{2} - x, B_2 = \frac{\pi}{2} - y$, 而 $A_2 + B_2 = \pi - x - y < \frac{\pi}{2}$, 此时 $C_2 > \frac{\pi}{2}$, 矛盾, 故假设错误, $\triangle A_2 B_2 C_2$ 为钝角三角形.

10.

11. 题设可化为

$$\sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin B \sin C.$$

因三角形为锐角, 令 $x = \tan B, y = \tan C$, 两边同除 $\cos B \cos C > 0$ 得 $x + y = 2xy$. 设 $xy = p$, 由 $x + y = 2xy \geq 2\sqrt{xy}$ 可以得到 p 的取值范围是 $p \geq 1$. 由 $\tan A = -\tan(B+C) = \frac{x+y}{xy-1}$. 可得 (设 $p-1=u$)

$$\tan A \tan B \tan C = \frac{xy(x+y)}{xy-1} = \frac{2p^2}{p-1} = \frac{2(u+1)^2}{u} \geq 8$$

当 $u=1$, 即 $xy=2$ 时取到等号, 所以最小值为 8.

12.

13. 由 $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = c^2$ 及余弦定理得到 $C = 3\pi/4$. 展开第三式, 得到

$$\frac{(\sin \alpha \sin A - \cos \alpha \cos A)(\sin \alpha \sin B - \cos \alpha \cos B)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

化简有

$$\tan^2 \alpha \sin A \sin B - \tan \alpha \sin(A+B) + \cos A \cos B = \frac{\sqrt{2}}{5} (*)$$

因为 $-\cos C = \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, 由此得到 $\sin A \sin B = \frac{\sqrt{2}}{10}$, 将上述已知量代入 (*) 式, 得到

$$\tan^2 \alpha - 5 \tan \alpha + 4 = 0$$

解得 $\tan \alpha = 1$ 或 $\tan \alpha = 4$ 。

14.

15.

16.

17.

18.

19. 令 $BD = x$, 则 $CD = 2x$, 故 $BD = x$. 分别在 $\triangle ADB, ADC$ 中用余弦定理

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos 120^\circ = x^2 + 2x + 4.$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos 60^\circ = 4x^2 - 4x + 4.$$

不妨求 $\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$ 的最小值, 分离分子的二次项有

$$\begin{aligned} \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 &= \frac{4x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 4} = 4\left[1 - 3 \times \frac{x+1}{(x+1)^2 + 3}\right] \\ &= 4\left[1 - 3 \times \frac{1}{x+1 + \frac{3}{x+1}}\right]. \end{aligned}$$

当 $x+1 + \frac{3}{x+1}$ 取到最小值时, 上式取到最小值, 此时 $x = \sqrt{3} - 1$, 于是当 $\left(\frac{AC}{AB}\right)$ 取最小值时, $BD = \sqrt{3} - 1$

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26. (1) 由余弦定理, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 9 + 12 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 9$, 所

以 $AC = 3$. 由余弦定理, $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{3}$.

(2) 因为 $DE \parallel BC$, D 在 BA 的延长线上, 所以 $\angle ADE = \pi - \angle DBC$. 由 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $B \in (0, \pi)$ 得 $\sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 从而 $\sin \angle ADE = \sin B = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $AE \perp AC$, 所以 $\angle DAE = \pi - \angle AEC - \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle BAC$, 从而 $\sin \angle DAE = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle BAC\right) = \cos \angle BAC = \frac{1}{3}$.

在 $\triangle ADE$ 中, 由正弦定理, $\frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{DE}{\sin \angle DAE}$, 所以 $AE = \frac{DE \sin \angle ADE}{\sin \angle DAE} = 6$. 又 $AE \perp AC$, 所以 $CE = \sqrt{AE^2 + AC^2} = 3\sqrt{5}$.

27.

28.

29.

30. (1) 展开题述等式, 有

$$\sin C(\sin A \cos B - \sin B \cos A) = \sin B(\sin C \cos A - \cos C \sin A)$$

由正弦定理, 角化为边

$$ac \cos B - bc \cos A = bc \cos A - ab \cos C$$

移项, 并用余弦定理

$$ac\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) + ab\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = 2bc\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

化简得到 $2a^2 = b^2 + c^2$.

(2) 当 $a = 5, \cos A = 25/31$ 时, 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $25 = b^2 + c^2 - \frac{50}{31}bc$. 结合 $b^2 + c^2 = 2a^2 = 50$, 可以解得 $bc = \frac{31}{2}$, 于是 $(b+c)^2 = 81$, 得到 $b+c=9$, 于是 $\triangle ABC$ 的周长为 14.

31. 对等式的右侧变形

$$\frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B} = \frac{2 \sin B \cos B}{2 \cos^2 B} = \frac{\sin B}{\cos B}.$$

于是 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin B}{\cos B}$, 对比例等式作交叉相乘, 有

$$\cos A \cos B = \sin B + \sin A \sin B$$

从这有 $\cos(A+B) = \sin B$, 即 $\sin B + \cos C = 0(*)$. 由诱导公式, 有 $-\cos C = \sin(C - \frac{\pi}{2})$, 于是 $\sin B = \sin(C - \frac{\pi}{2})$, 由此解得

$$B = C - \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \quad B + C - \frac{\pi}{2} = (2k_2 + 1)\pi, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

根据题意, 只可能有 $k_1 = 0$, 于是 $B = C - \frac{\pi}{2}$. 故 $A = \frac{3\pi}{2} - 2C$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{c^2} &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2(\frac{3\pi}{2} - 2C) + \sin^2(C - \frac{\pi}{2})}{\sin^2 C} \\ &= \frac{\cos^2 2C + \cos^2 C}{\sin^2 C} \\ &= \frac{4\sin^4 C - 5\sin^2 C + 2}{\sin^2 C} \\ &= 4\sin^2 C + \frac{2}{\sin^2 C} - 5 \geq 4\sqrt{2} - 5 \end{aligned}$$

当 $4\sin^2 C = \frac{2}{\sin^2 C}$, 即 $\sin C = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ 时取到等号.

故 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 5$.

32.

33.

34.

35.

36.

第一章 向量、解三角形、复数

1.3 解三角形

B 组

1. 【2025 新高考 I 卷 11 节选】已知 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin C$, 证明: $C = 90^\circ$
2. 【2026 成都二诊 14】在直角三角形 ABC 中, $AC = 2, BC = 1, D$ 为斜边 AB 上一点, $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 的内切圆面积相等, 求 BD .

1.

2.

第一章 向量、解三角形、复数

1.3 解三角形

第一章 向量、解三角形、复数

1.3 解三角形