

第一章 向量、解三角形、复数

1.1 向量

1.1.1 平面向量

向量是高中阶段引入的一个重要的数学研究对象.

1.1.1.2 基本概念

定义 1.1.1 (向量). 平面上的一条有向线段被称为**向量**, 通常用粗体字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 等表示. 向量的**模长**被定义为该线段的长度, 模长为零的向量称为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$. 模长为 1 的向量称为**单位向量**.

向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 平行当且仅当它们的方向相同或相反, 记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 此时也称向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线. 零向量与任意向量平行. 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 垂直当且仅当它们所在的直线互相垂直, 记作 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. 向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 相等当且仅当它们的模长相等且方向相同, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

1.1.1.3 向量的线性运算

规定向量的加法与数乘运算如下:

定义 1.1.2 (向量的加法运算). 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是两个向量, 在平面中作出 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, 定义向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 为 $\overrightarrow{OB}$.

定义 1.1.3 (向量的数乘运算). 设 λ 是一个实数, $\mathbf{a}$ 是一个向量, 则 $\lambda\mathbf{a}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与实数 λ 的数乘.

当 $\lambda \neq 0$ 且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 的模长为 $|\lambda||\mathbf{a}|$, 当 $\lambda > 0$ 时, 与 $\mathbf{a}$ 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, 与 $\mathbf{a}$ 的方向相反;

当 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时, $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

向量的加法、数乘运算统称为**向量的线性运算**. 对于向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 与实数 λ, μ , 称 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的**线性组合**, 若 $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2$, 则称 $\mathbf{c}$ 可以由 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ **线性表出**.

定理 1.1.4 (平面向量基本定理). 平面内取定不共线的两个向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, 则该平面内的任意一个向量 $\mathbf{a}$ 可以唯一地表示成 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 的线性组合 $\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2$

称平面内不共线的两个向量组成的集合 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 为该平面上向量的一组基底. 如果平面向量的基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 中 $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, 则称这组基底为正交基底.

1.1.1.4 向量的直角坐标表示

以单位正交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 中 $\mathbf{e}_1$ 的方向为 x 轴正方向, $\mathbf{e}_2$ 的方向为 y 轴正方向, 建立平面直角坐标系. 由**定理 1.1.4**, 平面内任意一个向量 $\mathbf{a}$ 都可以唯一地表示为 $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, 其中 x, y 是实数, 称 (x, y) 为向量 $\mathbf{a}$ 在基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 下的直角坐标.

1.1.5 向量的数量积

定义 1.1.5 (向量的夹角). 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是两个非零向量, 平移这两条向量, 使得它们的始点重合, 记为 O , 此时这两个向量的终点分别记为 A, B , 定义向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角 θ 为 $\angle AOB$ 的大小, 其中 $\angle AOB$ 取不超过平角大小的情况。

定义 1.1.6 (向量的数量积). 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是两个向量, 实数 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$ 称为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积 (内积)。

由上述定义可以得出: 两个非零向量互相垂直当且仅当 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 。

问题 1.1 解答下述问题:

- (1) 在平面直角坐标系中, 已知向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 证明: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$
- (2) 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 设向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 方向上的投影向量为 $\mathbf{c}$ 。证明: 当 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相同时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, 当 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相反时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ 。
- (3) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 记 BC 的中点为 D , 连接 AD , 证明: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AD^2 - BD^2$

第一章 向量、解三角形、复数

1.1 向量

习 题

A 组

1. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是非零平面向量, 则 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影向量是

(A) $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$ (B) $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$ (C) $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b}$ (D) $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$

2. 设 V 是全体平面向量构成的集合, $\mathbf{a}$ 为非零平面向量, 定义集合

$$A = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{a}, \mathbf{x} \text{ 方向相反}\}, \quad B = \{\mathbf{x} \in V \mid |\mathbf{x}| = |\mathbf{a}|\}, \quad C = \{\mathbf{x} \in V \mid |\mathbf{x}| = |\mathbf{a}| \text{ 且 } \mathbf{a} \parallel \mathbf{x}\}$$

则下列命题中正确的是

(A) $C \subseteq A$ (B) $\{\mathbf{a}\} \subset A \cap B$ (C) $C \subseteq B$ (D) $A \cup C = B \cup C$

3. 【2008 琼宁卷理 8】平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线的充要条件是

- (A) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 方向相同
 (B) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 中至少有一个为零向量
 (C) $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$
 (D) 存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 使得 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}$

4. 【2024 上海 15】集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, 且满足对任意 $P_1, P_2, P_3 \in \Omega$, 存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得 $\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OP_3} = \vec{0}$. 已知 $(1, 0, 0) \in \Omega$, 则 $(0, 0, 1) \notin \Omega$ 的充分条件是

(A) $(0, 0, 0) \in \Omega$ (B) $(-1, 0, 0) \in \Omega$ (C) $(0, 1, 0) \in \Omega$ (D) $(0, 0, -1) \in \Omega$

5. 【2006 陕西理 9】已知非零向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为

- (A) 三边均不相等的三角形 (B) 直角三角形
 (C) 等腰非等边三角形 (D) 等边三角形

6. 【2010 辽宁理 8】平面上 O, A, B 三点不共线, 设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于

(A) $\sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ (B) $\sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$
 (C) $\frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ (D) $\frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$

7. 【2014 浙江理 8】已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为平面向量, 则

(A) $\min\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|\} \leq \min\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\}$ (B) $\min\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|\} \geq \min\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\}$

$$(C) \min\{|a+b|^2, |a-b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2\}$$

$$(D) \min\{|a+b|^2, |a-b|^2 \geq |a|^2 + |b|^2\}$$

8. 【2014 安徽 10】在平面直角坐标系中, 单位向量 a, b 互相垂直, 点 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \sqrt{2}(a+b)$, 曲线 $C = \{P \mid \overrightarrow{OP} = a \cos \theta + b \sin \theta, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, 区域 $\Omega = \{P \mid 0 < r \leq |\overrightarrow{PQ}| \leq R, r < R\}$, 若 $C \cap \Omega$ 为两段分离的曲线, 则

$$(A) 1 < r < R < 3$$

$$(B) 1 < r < 3 \leq R$$

$$(C) r \leq 1 < R < 3$$

$$(D) 1 < r < 3 < R$$

9. 【2026 “fiddie” 模拟考 8】已知 x, y 是平面向量, $|x| = 1, |y| \neq 0$. 设甲: $|x \cdot y| \leq 1$; 乙: 存在平面向量 z , 使得 $|y - z| \leq 1$ 且 $(x \cdot y)(x \cdot z) \leq 0$. 则

(A) 甲是乙的充分不必要条件

(B) 甲是乙的必要不充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲是乙的既不充分又不必要条件

10. 【2013 上海理 18】在边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 中, 记以 A 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ; 以 D 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 . 若 m, M 分别为 $(a_i + a_j + a_k) \cdot (d_r + d_s + d_t), \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{r, s, t\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的最小值、最大值, 则

$$(A) m = 0, M > 0$$

$$(B) m < 0, M > 0$$

$$(C) m < 0, M = 0$$

$$(D) m < 0, M < 0$$

11. 【2014 浙江文 9 改编】(多选) 设 θ 为非零向量 a, b 的夹角, 已知对任意实数 $t, |b + ta|$ 的最小值为 1, 则下列命题中错误的是

(A) 若 θ 确定, 则 $|a|$ 唯一确定

(B) 若 θ 确定, 则 $|b|$ 唯一确定

(C) $|a|$ 确定, 则 θ 唯一确定

(D) 若 $|b|$ 确定, 则 θ 唯一确定

12. 已知向量 a, b 均为单位向量, 求 $\frac{|a - 2b|}{\sqrt{1 - (a \cdot b)^2}}$ 的最小值.

13. 若向量 a 与 b 不共线, $a \cdot b \neq 0$, 且 $c = a - \left(\frac{a \cdot a}{a \cdot b}\right)b$, 求向量 a 与 c 的夹角.

14. 【2011 上海理 17】设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是平面上给定的 5 个不同点, 求使得 $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = 0$ 成立的点 M 的个数.

15. 【2025 上海 12】已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ a, b, c 是平面内三个不同的单位向量. 若 $f(a \cdot b) + f(b \cdot c) + f(c \cdot a) = 0$, 则 $|a + b + c|$ 的取值范围是 (Δ)

16. 【2020 浙江 17】单位向量 e_1, e_2 满足 $|2e_1 - e_2| \leq \sqrt{2}$, 已知 $a = e_1 + e_2, b = 3e_1 + e_2$, 设 a, b 的夹角为 θ , 求 $\cos^2 \theta$ 的最小值.

17. 【2007 重庆理 10】如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{DC}| = 4$, $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{DC}| = 4$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, 求 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值.

18. 【2006 辽宁 12】设 $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$, 点 P 是线段 AB 上的一个动点, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, 求实数 λ 的取值范围.

19. 【2017 上海 10】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 和 $C_2: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$. P 为 C_1 上的动点, Q 为 C_2 上的动点, w 是 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最大值. 记 $\Omega = \{(P, Q) \mid P \text{ 在 } C_1 \text{ 上}, Q \text{ 在 } C_2, \text{ 且 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = w\}$ 求 $|\Omega|$.
20. 【2018 天津理 8】在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC, AD \perp CD, \angle BAD = 120^\circ, AB = AD = 1$. 若点 E 为边 CD 上的动点, 求 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值.
21. 【2017 全国 II 卷理 12】已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 求 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值.
22. 【2023 全国乙卷理 12】已知 $\odot O$ 的半径为 1, 直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A , 直线 PB 与 $\odot O$ 交于 B, C 两点, D 为 BC 的中点. 若 $|PO| = \sqrt{2}$, 求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的最大值.
23. 【2013 安徽 9】平面直角坐标系中, O 是坐标原点, 定点 A, B 满足 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$, 求点集 $\{P \mid \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}, |\lambda| + |\mu| \leq 1, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ 所表示区域的面积.
24. 【2025 绍兴一模 8 改编】在平面直角坐标系中, 已知 $A(-1, 0), B(0, 3), C(2, 0), D(0, -6), P$ 是平面内任意一点, 记 $\overrightarrow{PA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{PB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{PC} = \mathbf{c}, \overrightarrow{PD} = \mathbf{d}$, 分别求
(a). $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}|$, (b). $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})$ (c). $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$ (d). $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d})$ 的最小值
25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}, F$ 为 AD 与 BE 的交点, 且 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3$, 当向量 $\overrightarrow{CF}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 上的投影向量的模取最小值时, 求 $|\overrightarrow{CB}|$.
26. 【2021 八省联考变式 6】已知 A, B, C 是单位圆上的三个动点, 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的最小值.
27. 【上海 11】已知实数 $\lambda > 0$, 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = \lambda$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 2$, 求 λ .
28. 【2017 浙江 15】已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$, 求 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 的最小值与最大值.
29. 【2019 江苏 12】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE = 2EA$, AD 与 CE 交于点 O . 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$, 求 $\frac{AB}{AC}$ 的值.
30. 【2007 陕西理 15】如图, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120° , $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30° , 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1, |\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$. 若 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 求 $\lambda + \mu$ 的值.
31. 【2020 江苏 13】在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4, AC = 3, \angle BAC = 90^\circ$, D 在边 BC 上, 延长 AD 到 P , 使得 $AP = 9$, 若 $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + \left(\frac{3}{2} - m\right)\overrightarrow{PC}$ (m 为常数), 求 CD 的长度. (只考虑 $CD > 0$ 的情况)
32. 【2017 江苏 12】如图, 在同一个平面内, 向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 的模分别为 1, 1, $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α , 且 $\tan \alpha = 7$, $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45° . 若 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 求 $m + n$.
33. 【2015 上海理 14】在锐角三角形 ABC 中, $\tan A = \frac{1}{2}$, D 为边 BC 上的点, $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积分别为 2 和 4. 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 $E, DF \perp AC$ 于 F , 求 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$.

34. 【2026 上海春 10】在 $\triangle ABC$ 中, D, E 在 BC 上, 且 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$, $\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \rangle = \frac{\pi}{3}$, 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的最大值.
35. 【2011 天津理 14】已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = 1$, P 是腰 DC 上的动点, 求 $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值.
36. 【2006 湖南理 15】如图, $OM \parallel AB$, 点 P 在由射线 OM 、线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 设 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.
- (1) 求 x 的取值范围;
- (2) 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 求 y 的取值范围.
37. 【2009 天津理 15】四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (1, 1)$, $\frac{1}{|\overrightarrow{BA}|} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{|\overrightarrow{BC}|} \overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{BD}|} \overrightarrow{BD}$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.
38. 【2021 天津 15】在边长为 1 的等边三角形 ABC 中, D 为线段 BC 上的动点, $DE \perp AB$ 且交 AB 于点 E , $DF \parallel AB$ 且交 AC 于点 F , 求 $|2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}|$ 的值与 $(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA}$ 的最小值.
39. 设 A, B 是平面直角坐标系中关于 y 轴对称的两点, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 2$, 若存在 $m, n \in \mathbb{R}$, 使得 $m\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$ 与 $n\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB}$ 垂直, 且 $|(m\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}) - (n\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB})| = 2$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$ 的最小值.
40. 【2019 浙江 17】已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 求 $|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|$, $\lambda_i \in \{-1, 1\} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 的最小值与最大值.
41. 【2016 上海理 14】如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为正八边形 $A_1 A_2 \cdots A_8$ 的中心, $A_1(1, 0)$, 任取不同的两点 A_i, A_j , 点 P 满足 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} = \mathbf{0}$, 求点 P 落在第一象限的概率.
42. 【2010 浙江理 16】已知平面向量 α, β ($\alpha \neq \mathbf{0}, \alpha \neq \beta$) 满足 $|\beta| = 1, \langle \alpha, \beta - \alpha \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 求 $|\alpha|$ 的取值范围.
43. 【2013 浙江理 17】设 e_1, e_2 为单位向量, 非零向量 $b = xe_1 + ye_2, x, y \in \mathbb{R}$. 若 $\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{\pi}{6}$, 求 $\frac{|x|}{|b|}$ 的最大值.
44. 【2015 浙江 15】已知 e_1, e_2 是空间单位向量. 若空间向量 b 满足 $b \cdot e_1 = 2, b \cdot e_2 = \frac{5}{2}$, 且对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$,
- $$|b - (xe_1 + ye_2)| \geq |b - (x_0e_1 + y_0e_2)| = 1 (x_0, y_0 \in \mathbb{R})$$
- 求 $x_0, y_0, |b|$.
45. 【2026 闵行二模 16】已知平面上存在 13 个向量 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_{13}}$, 其中 $|\overrightarrow{a_1}| = 1$. 且对任意 $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 12$, 有 $|\overrightarrow{a_{n+1}}| = \sqrt{2}|\overrightarrow{a_n}|, \overrightarrow{a_n} \cdot \overrightarrow{a_{n+1}} = 0$, 求 $|\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \cdots + \overrightarrow{a_{13}}|$ 的最小值.
46. 【2021 浙江 17】已知平面向量 a, b, c ($c \neq \mathbf{0}$) 满足 $|a| = 1, |b| = 2, a \cdot b = 0, (a - b) \cdot c = 0$, 记平面向量 d 在 a, b 方向上的投影分别为 $x, y, d - a$ 在 c 方向上的投影为 z , 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值.
47. 【2022 浙江 17】设点 P 在单位圆的内接正八边形 $A_1 A_2 \cdots A_8$ 的边 $A_1 A_2$ 上, 求 $\overrightarrow{PA_1}^2 + \overrightarrow{PA_2}^2 + \cdots + \overrightarrow{PA_8}^2$ 的取值范围.

48. 【2026 海淀一模 10】已知平面上互不重合的点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 满足 $\angle A_1 A_2 A_3 = \angle A_2 A_3 A_4 = \angle A_3 A_4 A_5 = 120^\circ$ 且 $\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_2 A_3} = \overrightarrow{A_2 A_3} \cdot \overrightarrow{A_3 A_4} = \overrightarrow{A_3 A_4} \cdot \overrightarrow{A_4 A_5}$, 下列命题中一定不成立的是

- (A) $\overrightarrow{A_1 A_5} = \overrightarrow{A_2 A_4}$ (B) $\overrightarrow{A_1 A_5} = \frac{3}{2} \overrightarrow{A_2 A_5}$ (C) $\overrightarrow{A_1 A_5} = 2 \overrightarrow{A_2 A_4}$ (D) $\overrightarrow{A_1 A_5} = \frac{5}{2} \overrightarrow{A_4 A_5}$

49. 在 $\triangle ABC$ 中, P 为 AB 中点, O 在边 AC 上, BO 交 CP 于 R , 且 $|\overrightarrow{AO}| = 2|\overrightarrow{AC}|$, 设 $|\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{AC}| = 1, \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \theta$.

(1) 若 $\theta = 60^\circ$, 求 $\cos \angle ARB$;

(2) 若 H 在线段 BC 上, 且 $RH \perp BC, \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, 设, 求 $\frac{|CH|}{|CB|}$ 的取值范围.

1. A. 设向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影向量 $\mathbf{p} = t\mathbf{b}$. 由投影的数量关系 $t|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ 可得 $t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$. 因此投影向量为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$, 选 A.
2. C. 由题意, A 中的向量与 $\mathbf{a}$ 方向相反, 所以 A 是以 $-\mathbf{a}$ 为端点、沿 $-\mathbf{a}$ 方向延伸的射线; 集合 B 是以原点为圆心、半径 $|\mathbf{a}|$ 的圆; 集合 C 中的向量既与 $\mathbf{a}$ 共线, 又与 $\mathbf{a}$ 等长, 所以 $C = \{\mathbf{a}, -\mathbf{a}\}$. 因为 C 中的每个向量模长都等于 $|\mathbf{a}|$, 所以 $C \subseteq B$, 选项 C 正确. 而 $\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 相同, 故 $\mathbf{a} \notin A$, 选项 B 错误; 因为 $\mathbf{a} \in C$ 且 $\mathbf{a} \notin A$, 故 $C \not\subseteq A$, 选项 A 错误. $A \cup C$ 只包含与 $\mathbf{a}$ 共线的向量, $B \cup C$ 还包含其他方向的向量, 二者不相等, 选项 D 错误.
3. D. 两个向量共线, 则它们的方向相同或相反. 因此选项 A 错误. 两个向量共线时, 它们可能全不为零向量, 因此选项 B 错误. 当 $\mathbf{a}$ 为零向量, $\mathbf{b}$ 不为零向量时, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线, 对任意实数 λ , $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0} \neq \mathbf{b}$, 因此选项 C 错误. 对于 D 选项, 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线, 可以验证一定存在不全为零的实数 λ, μ 使得 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$. 反过来, 若存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 , 使得 $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则当 $\lambda_2 \neq 0$ 时有 $\mathbf{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathbf{a}$; 当 $\lambda_2 = 0$ 时必有 $\lambda_1 \neq 0$, 从而 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 此时 $\mathbf{a}$ 与任意向量共线. 因此该条件必然推出 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线. 因此 D 正确.
4. C. 如果 $(0, 1, 0) \in \Omega$, 下面证明 $(0, 0, 1) \notin \Omega$, 采取反证法. 假设 $(0, 0, 1) \in \Omega$, 则 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 构成空间中向量的一组基底, 若存在实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, 则只能有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 与题设矛盾, 假设错误. 故 $(0, 0, 1) \notin \Omega$, 选项 C 正确. 可以验证其余选项均不正确.

注: 已知向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, 如果存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 使得 $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, 则称向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是线性相关的, 也就是说, 其中存在某个向量可以被表示为其余向量的线性组合. 若由 $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ 只能解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, 则称向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是线性无关的.

新答案 (来源: 4.4 多个量词的问题 (3) 向量、几何.md): C

【解题思路】 设 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$.

思路 1: 若 $O(0, 0, 0) \in \Omega$, 取 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, 则 $\lambda_1\overrightarrow{OO} + \lambda_2\overrightarrow{OA} + \lambda_3\overrightarrow{OB} = \vec{0}$, 所以 $O \in \Omega$ 不能推出 $B \notin \Omega$. 不合题意.

若 $Q_1(-1, 0, 0) \in \Omega$, 取 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, 则 $\lambda_1\overrightarrow{OQ_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA} + \lambda_3\overrightarrow{OB} = \vec{0}$, 所以 $Q_1 \in \Omega$ 不能推出 $B \notin \Omega$, 不合题意.

若 $Q_2(0, 0, -1) \in \Omega$, 取 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, 则 $\lambda_1\overrightarrow{OB} + \lambda_2\overrightarrow{OQ_2} + \lambda_3\overrightarrow{OA} = \vec{0}$, 所以 $Q_2 \in \Omega$ 不能推出 $B \notin \Omega$, 不合题意.

排除 A、B、D 选项, 选 C.

思路 2: “存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足 $\lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \lambda_2\overrightarrow{OP_2} + \lambda_3\overrightarrow{OP_3} = \vec{0}$ ” 等价于 “ O, P_1, P_2, P_3 不在同一平面上”.

而四个选项中, $D_1(0, 0, 0)$ 在平面 OAB 上, $D_2(-1, 0, 0)$ 在平面 OAB 上, $D_3(0, -1, 0)$ 不在平面 OAB 上, $D_4(0, 0, -1)$ 在平面 OAB 上, 故选 C.

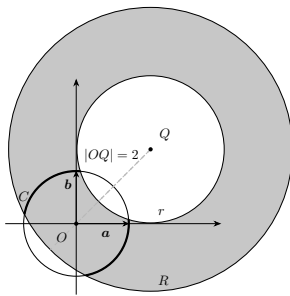
5. D. 设 $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$. 由 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}$ 及 $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$, 可知 $\angle BAC = 60^\circ$.

向量 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 的方向是 $\angle BAC$ 的角平分线方向, 由 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 可知, 该角平分线垂直于对边, 因此它也是垂线, 根据三线合一可推得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 进而得出 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 选 D.

6. C. $\triangle OAB$ 的面积为 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |a| |b| \sin \theta$. 而 $|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta$. 因此 $\triangle OAB$ 的面积可表示为 $\frac{1}{2} \sqrt{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}$, 选 C.

7.

8. A. 因为 a, b 是互相垂直的单位向量, 所以 $\sqrt{2}(a+b)$ 的模长为 2. 区域 Ω 是以 Q 为圆心、内外半径分别为 r, R 的圆环, 作示意图如下.



第 8 题示意图

圆 C 与圆环的交集由条件 $r \leq |\overrightarrow{PQ}| \leq R$ 给出. 要使交集为两段分离的曲线, 内圆必须真正截过圆 C , 故 $r > 1$; 外圆也必须截过圆 C , 故 $R < 3$. 结合题设 $r < R$, 得到 $1 < r < R < 3$, 选 A.

9. C. 取单位向量 x 为横轴正方向, 设 $y = (s, t)$, 其中 $s = x \cdot y$. 若 $s > 0$, 条件乙要求存在 $z = (u, v)$ 满足 $|y - z| \leq 1$ 且 $u \leq 0$; 若 $s < 0$, 则要求存在 z 满足 $|y - z| \leq 1$ 且 $u \geq 0$. 当 $s > 0$ 时, 点 y 到半平面 $u \leq 0$ 的最短距离为 s , 所以存在这样的 z 当且仅当 $s \leq 1$. 当 $s < 0$ 时同理, 存在这样的 z 当且仅当 $-s \leq 1$. 当 $s = 0$ 时取 $z = y$ 即可满足乙. 综上, 乙成立当且仅当 $|s| \leq 1$, 即当且仅当 $|x \cdot y| \leq 1$, 这正是甲. 因此甲是乙的充要条件, 选 C.

10. 新答案 (来源: 1.8 三角恒等变换.md): A

【解题思路】若 $\sin x = 0$, 则 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$, 所以 $E \subset F$. 但反之不对, $x = \frac{\pi}{2}$ 满足 $\sin 2x = 0$ 但 $\sin x \neq 0$, 所以 $E \subsetneq F$.

11.

12.

13. 方法一: 由 $c = a - \frac{a \cdot a}{a \cdot b} b$, 有 $a \cdot c = a \cdot a - \frac{a \cdot a}{a \cdot b} (a \cdot b) = 0$. 又因为 a, b 不共线, 所以 $c \neq 0$. 因此 $a \perp c$, 它们的夹角为 90° .

方法二: 记 θ 为向量 a, b 的夹角, 有 $\frac{a \cdot a}{a \cdot b} b = \frac{|a|}{|b| \cos \theta} b$,

14. 在平面内取定一个点 O , 由 $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}$ 可得

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} - 5\overrightarrow{OM}.$$

令其等于零, 得到

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5}).$$

于是 $\overrightarrow{OM}$ 是唯一确定的, 所以满足条件的点 M 有 1 个.

评: 这是求解三角形重心的其中一种方法的延伸。设平面直角坐标系中 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, 则该三角形的重心为 $G(\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3))$ 。一种证明方法利用 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, 再复用该题采用的上述方法即可。

15.

16. 设 $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = t, -1 \leq t \leq 1$. 对 $|2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2| \leq \sqrt{2}$ 两边平方, 结合单位向量条件, 化简得 $5 - 4t \leq 2$, 所以 $t \geq \frac{3}{4}$. 综合得到 t 的取值范围为 $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$.

计算得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 + 4t, |\mathbf{a}|^2 = 2 + 2t, |\mathbf{b}|^2 = 10 + 6t$, 故

$$\cos^2 \theta = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2} = \frac{(4 + 4t)^2}{(2 + 2t)(10 + 6t)} = \frac{4(1 + t)}{5 + 3t}.$$

设 $f(t) = \frac{4(1+t)}{5+3t}$, 因为 $f'(t) = \frac{8}{(5+3t)^2} > 0$, 所以 $f(t)$ 在 $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$ 时单调递增, 最小值在 $t = \frac{3}{4}$ 时取得, 带入得到 $\cos^2 \theta_{\min} = \frac{28}{29}$.

注: 求 $f(t) = \frac{4(1+t)}{5+3t}$ 也可分离常数得 $f(t) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3(5+3t)}$, 据此判断 $f(t)$ 在 $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$ 时单调递增。

17.

18.

19.

20.

21. 设 BC 的中点为 D , AD 的中点为 O , 则

$$\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = 2(PO^2 - OD^2) \geq -OD^2 = -\frac{3}{2}.$$

故最小值为 $-\frac{3}{2}$.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28. 设 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = t$, 其中 $-2 \leq t \leq 2$. 令 $x = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, $y = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2 = 10 \\ x^2 y^2 &= (|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2)^2 \\ &= (|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= (|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)^2 - 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= 25 - 4t^2. \end{aligned}$$

所以 $(x+y)^2 = 10 + 2\sqrt{25-4t^2}$. 当 $|t| = 2$ 时取得最小值 16, 当 $t = 0$ 时取得最大值 20, 故所求最小值为 4, 最大值为 $2\sqrt{5}$.

29.

30.

31.

32. 新答案 (来源: 2024 上海, 15 (立体几何、向量).md): $\frac{5}{28}$

【解题思路】 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} = \vec{0}$ 等价于 $\overrightarrow{OP} = -(\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j})$, P 点由取定的 A_i, A_j 唯一确定. 在八个点中任取不同的两点的取法数为 C_8^2 即 28. 其中, 使得 $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} = \vec{0}$ 即 P 落在原点的取法有 4 种, 分别是 A_1 与 A_5 、 A_2 与 A_6 、 A_3 与 A_7 、 A_4 与 A_8 ; 使得 $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}$ 是与坐标轴平行的向量即 P 落在除原点外的坐标轴上的取法也有 4 种, 分别是 A_2 与 A_8 、 A_4 与 A_6 、 A_2 与 A_4 、 A_6 与 A_8 . 因此, 使得 P 落在四个象限的取法有 20 种, 而 P 落在每个象限的机会均等, 从而使得 P 落在第一象限的取法有 5 种, 由此求得 P 落在第一象限的概率是 $\frac{5}{28}$.

【实测数据】本题理科难度为 0.425, 区分度为 0.50.

新答案 (来源: 1.18 空间直角坐标系与空间向量.md): 1; 2; $2\sqrt{2}$

【解题思路】因为 $|\vec{b} - (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)| \geq |\vec{b} - (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2)| = 1 (x_0, y_0 \in \mathbb{R})$,

两边平方, 得

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) + |x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2|^2 \geq |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2) + |x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2|^2$$

由于 $\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{e}_2 = \frac{5}{2}$, 且

$$|x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2|^2 = x^2|\vec{e}_1|^2 + y^2|\vec{e}_2|^2 + 2xy\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = x^2 + y^2 + xy$$

所以

$$|\vec{b}|^2 - 4x - 5y + x^2 + y^2 + xy \geq |\vec{b}|^2 - 4x_0 - 5y_0 + x_0^2 + y_0^2 + x_0y_0 = 1$$

考虑函数 $g(x, y) = |\vec{b}|^2 - 4x - 5y + x^2 + y^2 + xy$. 由题意, $g(x, y)$ 在 $(x, y) = (x_0, y_0)$ 取到最小值, 且最小值为 1.

将 $g(x, y)$ 视作 x 的函数, 然后再配方, 可得

$$g(x, y) = x^2 + (y-4)x + y^2 - 5y + |\vec{b}|^2 = \left(x + \frac{y-4}{2}\right)^2 - \frac{(y-4)^2}{4} + y^2 - 5y + |\vec{b}|^2 = \left(x + \frac{y-4}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} - 3y + 4 + |\vec{b}|^2$$

因此, 当 $x + \frac{y-4}{2} = 0$, 且 $y-2=0$ 时 $g(x, y)$ 取到最小值, 所以 $x_0 + \frac{y_0-4}{2} = 0$ 且 $y_0 = 2$, 故 $x_0 = 1$.

最小值 $|\vec{b}|^2 - 7 = 1$, 所以 $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41.

42.

43.

44.

45. 相邻向量互相垂直, 故奇数项方向均在同一直线上, 偶数项方向均在与其垂直的直线上. 奇数项模长为 $1, 2, 4, \dots, 64$, 其带符号和的模最小为 $64 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 1$; 偶数项模长为 $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \dots, 32\sqrt{2}$, 其带符号和的模最小为 $32\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \dots + 16\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. 两方向垂直, 故总和模长的最小值为 $\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$.

46.

47.

48.

49.

第一章 向量、解三角形、复数

1.1 向量

第一章 向量、解三角形、复数

1.1 向量

杂 题

1. 【2026 “数海漫游一摸”（网络联考）5】已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, 2)$ ，求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的最大值。
2. 【2024 宁波二模 9 改编】若平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 1, |\mathbf{c}| = 3$ 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ ，分别求 $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ 的最大值与最小值。
3. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $|\overrightarrow{AB}| = 2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = -1, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$ ，求 $\angle ABC$ 的最大值。
4. 【2021 浙江十校联考 17】已知空间向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两夹角均为 60° ，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 6$ ，若向量 $\vec{x}, \vec{y}$ 分别满足 $\vec{x} \cdot (\vec{x} + \vec{a} - \vec{b}) = 0$ 与 $\vec{y} \cdot \vec{c} = 8$ ，求 $|\vec{x} - \vec{y}|$ 的最小值。

1.

2.

3.

4.

第一章 向量、解三角形、复数

1.1 向量