

第一章 三角函数

1.3 三角函数的图象

第一章 三角函数

1.3 三角函数的图象

本节习题

习题组 I

- 【2025 赣州一模 3】求函数 $f(x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ 的最小正周期。
- 【2008 广东文 5】判断函数 $f(x) = (1+\cos 2x)\sin^2 x$ 的奇偶性，并求其最小正周期。
- 【2023 武汉二调 7】已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示，其中 $A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ ，在已知 $\frac{x_2}{x_1}$ 的条件下，则下列选项中可以确定其值的量为
(A) ω (B) φ (C) $\frac{\varphi}{\omega}$ (D) $A\sin \varphi$
- 【2026 “fiddie” 模拟考 7】设函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ 。若 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$ ，且 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 单调递增，求 $f(x)$ 的最小正周期。
- 【2024 新高考 I 卷 7 加强】【“圆梦杯（六）”（网络联考）8】已知集合
 $A = \{\theta | 0 < \theta < 10\pi\}, B = \{\theta | \sin 3\theta = \cos(\theta + \frac{7\pi}{6})\}$
求 $|A \cap B|$ 。
- 【2023 长郡十八校第一次联考 6】已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, \varphi \in \mathbb{R})$ 在区间 $(\frac{7\pi}{12}, \frac{51\pi}{60})$ 上单调，且满足 $f(\frac{7\pi}{12}) = -f(\frac{3\pi}{4})$ ，若函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{6})$ 上恰有 5 个零点，求 ω 的取值范围。
-
- 【“圆梦杯（十）”（网络联考）10 改编】将方程 $\sin x = a (0 < a < \frac{1}{2})$ 的所有正根从小到大依次记为 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ，设 $k \in \mathbb{N}^*$ ，证明或反驳：
(a). $x_1, 3x_3, x_{2k}$ 可能成等差数列 (b). x_1^2, x_5^2, x_{2k+1}^2 可能成等比数列
- 【2022 新高考 I 卷 6】记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b (\omega > 0)$ 的最小正周期为 T ，若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$ ，且 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称，求 $f(\frac{\pi}{2})$ 。
- 已知函数 $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，若 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ ，且 $f(x_1) = f(x_2) = -2$ ，求 $\sin(x_1 - x_2)$ 。
- 【2023 上海 15 改编】（多选）已知 $a > 0$ ，函数 $y = \sin x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最小值为 s ，在区间 $[2a, 3a]$ 上的最小值为 t ，当 a 变化时，下列可能成立的是
(A) $s > 0, t > 0$ (B) $s < 0, t < 0$ (C) $s < 0, t > 0$ (D) $s > 0, t < 0$

12. (多选) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi > 0$), $f(x)$ 的三个相邻零点为 x_1, x_2, x_3 (从小到大排序), 若 $x_3 = 4x_2$, 则

(A) $x_2 + \frac{\pi}{\omega} = x_3$ (B) $x_1 < 0$ (C) $[f(0)]^2 = \frac{1}{2}$ (D) $f(0)f'(0) < 0$

13. 【2021 八省联考 12】(多选) 已知函数 $f(x) = \frac{\cos 2x}{2 + \sin x \cos x}$, 则

(A) $f(x) = f(x + \pi)$ (B) $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$
(C) $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 单调递增 (D) $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 单调递减

14. 函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上没有零点, 求 ω 的取值范围.

15. 【2015 上海理 13】已知函数 $f(x) = \sin x$. 若存在 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 满足 $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$. 且

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12 \quad (m \geq 2, m \in \mathbb{N}^*)$$

求 m 的最小值.

16. 若 $f(x) = \sin(x + \theta) + \cos(x + \theta) + \sqrt{2}\sin(x + \theta + \frac{\pi}{4})$ 是偶函数, 求 θ .

17. 【2016 全国 I 卷 12】已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 单调, 求 ω 的最大值.

18. 【“圆梦杯(九)”(网络联考)14】已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$), 若存在唯一的 $\varphi \in (-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, 使得 $|f(\frac{2\pi}{3})| = 1$, 求 ω 的最小值.

19. 若 $\forall \theta \in \mathbb{R}, \exists x \in [\frac{\pi}{3} + \theta, m + \theta]$, 使得 $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 m 的最小值.

20. 【2005 辽宁 16】 ω 是正实数, 设 $S_\omega = \{\theta \mid f(x) = \cos[\omega(x + \theta)] \text{ 是奇函数}\}$, 满足

$$\forall a \in \mathbb{R}: |S_\omega \cap (a, a + 1)| \leq 2 \quad \exists a \in \mathbb{R}: |S_\omega \cap (a, a + 1)| = 2$$

求 ω 的取值范围.

21. 【2015 福建文 21】已知函数 $f(x) = 10\sqrt{3}\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 10\cos^2 \frac{x}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再向下平移 a ($a > 0$) 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 且函数 $g(x)$ 的最大值为 2.

i. 求函数 $g(x)$ 的解析式;

ii. 证明: 存在无穷多个互不相同的正整数 x_0 , 使得 $g(x_0) > 0$.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.

13. 新答案 (来源: 1.32 函数性质综合 (2).md): AD

【解题思路】 $f(x) = \frac{2\cos 2x}{4 + \sin 2x}$.

因为 $\cos 2x$ 和 $\sin 2x$ 都以 π 为周期, 所以 $f(x)$ 以 π 为周期, 故 $f(x) = f(x + \pi)$, 故 A 正确.

$f(x)$ 可以看作点 $A(\sin 2x, \cos 2x)$ 与点 $B(-4, 0)$ 连成直线的斜率的两倍. 而点 A 在单位圆上, 所以当 AB 与单位圆相切的时候 $f(x)$ 取最大值, 可算得最大值为 $\frac{2}{\sqrt{15}}$, 故 B 错误.

当 x 从 0 增加到 $\frac{\pi}{4}$ 的过程中时, 点 A 从 A_1 移动到 A_3 , 斜率一直变小; 当 x 从 0 减小到 $-\frac{\pi}{4}$ 的过程中时, 点 A 从 A_1 移动到 A_2 , 斜率先变大, 经过 A_0 后变小. 则 D 正确, C 错误.

- 14.
- 15.
- 16.
- 17.
- 18.
- 19.
- 20.
- 21.

第一章 三角函数

1.3 三角函数的图象

第一章 三角函数

1.3 三角函数的图象

第一章 三角函数

1.3 三角函数的图象