

第一章 三角函数

1.2 三角恒等变换

1.2.1 三角函数公式

用向量方法证明两角差余弦公式：

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

证明. 如图，建立平面直角坐标系，并设 A, B 是单位圆上的任意两点，角 α, β 都是顶点在原点 O ，始边为 x 轴正半轴的角，其终边分别落在 OA, OB 上，考虑向量

$$\overrightarrow{OA} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \overrightarrow{OB} = (\cos \beta, \sin \beta)$$

于是 $\cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \cos(\alpha - \beta)$ ，而根据向量数量积的坐标公式有

$$\cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{1} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

于是 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ □

将 (1) 式的 $-\beta$ 替换为 β ，化简得到两角和余弦公式：

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

将 (1) 式的 α 替换为 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ，利用诱导公式化简得到两角和正弦公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (3)$$

将 (3) 式的 $-\beta$ 替换为 β ，化简得到两角差正弦公式：

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (4)$$

用 (3) 式除以 (2) 式，化简得到两角和的正切公式：

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (5)$$

将 (5) 式的 β 替换为 $-\beta$ ，化简得到两角差的正切公式：

$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}} \quad (6)$$

令 $\beta = \alpha$ ，得到常用的二倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

第一章 三角函数

1.2 三角恒等变换

本节习题

习题组 I

1. 【2005 北京 5】对任意的锐角 α, β , 下列不等关系中正确的是

(A) $\sin(\alpha + \beta) > \sin \alpha + \sin \beta$ (B) $\sin(\alpha + \beta) > \cos \alpha + \cos \beta$

(C) $\cos(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$ (D) $\cos(\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta$

2. 【2013 重庆理 9】化简 $4 \cos 50^\circ - \tan 40^\circ$ 。

3. 【2023 安徽六校联考 9】化简 $(\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)(1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ)$ 。

4. 【2015 重庆理 9】已知 $\tan \alpha = 2 \tan \frac{\pi}{5}$, 化简 $\frac{\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right)}$ 。

5. 已知 $\sin(\tan 80^\circ - \sqrt{5}) = \sin 80^\circ$, α 为锐角, 化简 $\sin(\alpha + 30^\circ)$ 。

【2025 “漫游数海”回归课本联赛 6】已知 $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}$, 求 $\frac{\sin 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \tan x}$ 。

6. 【2025 合肥二模 6】已知 $\frac{\tan \theta \tan 2\theta}{\tan \theta - \tan 2\theta} = \frac{4}{5}$, 求 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ 。

7. 【2024 福建省质检 8】已知 $\sqrt{6} \tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 1$, 求 $\sin 2\alpha$ 。

8. 【温州学考模拟 10】已知 $\tan(x + y) = 2, \tan(x - y) = 3$, 求 $\frac{\tan 2x}{\tan 2y}$ 。

9. 【2022 广州零模 5】若 $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \sin \beta) = \sin 2\alpha \cos \beta$, 则

(A) $2\alpha + \beta = \frac{5\pi}{2}$ (B) $2\alpha - \beta = \frac{3\pi}{4}$ (C) $\alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}$ (D) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

10. 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}, \cos(\alpha - \beta) = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = ?$

11. 已知 $\sqrt{6} \tan(\alpha + \frac{\pi}{6}) \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 1$, 则 $\sin 2\alpha =$

12. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}), 2(\sin \beta + \sin^2 \beta) = \frac{\sin^2 \beta}{\tan \alpha}$, 则 $\tan(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{6}) =$

13. 若 $\tan \alpha = 2 \tan \frac{\pi}{5}$, 则 $\frac{\cos(\alpha - \frac{3\pi}{10})}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{5})} = ?$

14. 【2025 辽宁鞍山第一中学高三联考 7】已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{2}{3}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{4}$, 则 $\sin 2\alpha \sin 2\beta = ?$

15. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 且 $\tan \alpha = \frac{\cos 2\beta - 1}{\sin 2\beta} = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) = ?$
16. 【2015 江苏 14】设向量 $\mathbf{a}_k = \left(\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6} \right)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 12$), 则 $\sum_{k=0}^{11} (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_{k+1})$ 的值为?
17. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 证明: $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x - y)\sin(x + y)$
18. 【1986 全国卷理 16】已知 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$, 求 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ 的值。
19. 【1987 全国卷理 16】求 $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ 的值。
20. 【1989 全国卷文 20】证明: $\tan \frac{3x}{2} - \tan \frac{x}{2} = \frac{2 \sin x}{\cos x + \cos 2x}$
21. 【2010 上海理 19】已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 化简: $\lg \left(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) + \lg \left[\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - \lg(1 + \sin 2x)$.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.
- 16.
- 17.
- 18.
- 19.
- 20.
- 21.

第一章 三角函数

1.2 三角恒等变换

第一章 三角函数

1.2 三角恒等变换

第一章 三角函数

1.2 三角恒等变换