
第一章 函数

1.8 变量关系

不同的变量往往不能任意的增长或减小, 它们或多或少地受到各种法则的约束, 彼此之间呈现出多种多样的关系. 我们将在本节研究函数约束下的变量关系.

对于多个变量的关系, 我们通常利用这一关系做消元或换元.

消元是最为常见的处理方式, 我们在解方程时就已经熟练掌握此方法, 只是此处的约束是基于函数的.

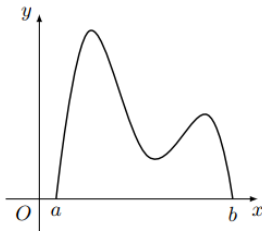
第一章 函数

1.8 变量关系

习 题

A 组

1. 【2013 安徽理 8】函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 在区间 $[a, b]$ 上可找到 n ($n \geq 2$) 个不同的数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得 $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \dots = \frac{f(x_n)}{x_n}$, 求 n 的取值范围.



2. 【2017 全国 I 卷理 11】设 x, y, z 为正数, 且 $2^x = 3^y = 5^z$, 比较 $2x, 3y, 5z$ 的大小.
3. 【2020 全国 I 卷 12】若 $2a + \log_2 a = 4b + 2\log_4 b$, 则
- (A) $a > 2b$ (B) $a < 2b$ (C) $a > b^2$ (D) $a < b^2$
4. 【2023 四省联考 8】已知 a, b, c 满足 $a = \log_5(2^b + 3^b)$, $c = \log_3(5^b - 2^b)$, 则
- (A) $|a - c| \geq |b - c|$, $|a - b| \geq |b - c|$ (B) $|a - c| \geq |b - c|$, $|a - b| \leq |b - c|$
 (C) $|a - c| \leq |b - c|$, $|a - b| \geq |b - c|$ (D) $|a - c| \leq |b - c|$, $|a - b| \leq |b - c|$
5. 【2011 福建 10】(多选) 已知函数 $f(x) = e^x + x$. 对于曲线 $y = f(x)$ 上横坐标成等差数列的三个点 A, B, C , 下列叙述正确的是
- (A) $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形 (B) $\triangle ABC$ 可能是直角三角形
 (C) $\triangle ABC$ 可能是等腰三角形 (D) $\triangle ABC$ 不可能是等腰三角形
6. 【2012 四川文 16 改编】(多选) 设 a, b 为正实数, 下列命题中正确的是
- (A) 若 $a^2 - b^2 = 1$, 则 $a - b < 1$ (B) 若 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 1$, 则 $a - b < 1$
 (C) 若 $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = 1$, 则 $|a - b| < 1$ (D) 若 $|a^3 - b^3| = 1$, 则 $|a - b| < 1$
7. 【2025 “数海漫游二模” (网络联考) 13】若函数 $f(x) = |x| \ln |x| - a$ 的四个不同零点恰构成一个等差数列, 求 a .

8. 解答下述问题:

(1) 【2023 广州零模 12】已知 $a > 0, b > 0, abe^a + \ln b - 1 = 0$, 证明或反驳:

$$(a). \ln b > \frac{1}{a} \quad (b). e^a > \frac{1}{b} \quad (c). a + \ln b < 1 \quad (d). ab < 1$$

(2) 已知正数 a, b 满足等式 $a^2 - b = 2(2\ln b - \ln a)$, 证明或反驳:

$$(a). a > b^2 > \frac{1}{2} \quad (b). a < b^2 < \frac{1}{2} \quad (c). a > b > 1 \quad (d). b < a < 1$$

9. 【2009 辽宁 12】已知 $2x_1 + 2^{x_1} = 5, 2x_2 - 2\log_2(x_2 - 1) = 5$, 求 $x_1 + x_2$;

10. 已知函数 $f(x) = \frac{2\ln(-x)}{x}, g(x) = \frac{x-2m}{3x^2}$, 函数 $h(x) = g[f(x)] + \frac{1}{m}$ 有三个零点 $x_1, x_2, x_3, x_1 < x_2 < x_3$, 求 $f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3)$ 的取值范围.

11. 【2023 长沙适应性考试 16】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$.

(1) 讨论关于 x 的方程 $f(f(x)) = a$ 的不同实根的个数;

(2) 若第 (1) 问中的方程恰有两个不相等的实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求 $\frac{x_2+1}{x_1+2}$ 的取值范围.

12. 【2010 天津理 21 节选】已知函数 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbb{R})$.

(1) 已知函数 $y = f(x), y = g(x)$ 的图象关于 $x = 1$ 对称, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) > g(x)$;

(2) 如果 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

13. 【2016 全国 I 卷理 21】已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$ 有两个零点. 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 < 2$.

14. 【2021 新高考 I 卷 22】已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b\ln a - a\ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

15. 【2022 全国甲卷 21】已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$. 证明: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 x_2 < 1$.

16. 【2018 浙江 22 (1)】已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$, 若 $f(x)$ 在 $x = x_1, x = x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处导数相等, 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 8 - 8\ln 2$

17. 【2012 全国 I 卷 21】已知函数 $f(x) = e^x$. 若 $f(x) \geq (a+1)x + b$ 恒成立, 求 $(a+1)b$ 的最大值.

18. 【2014 湖南文 21】已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x + 1 (x > 0)$. 记 x_i 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $i (i \in \mathbb{N}^*)$ 个零点, 证明: 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} < \frac{2}{3}$.

19. 【2014 湖南理 22】已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{2x}{x+2}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 求 a 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$ 有三个零点 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$

(1) 证明: 若 x_1, x_2, x_3 成等差数列, 则 x_1^2, x_2^2, x_3^2 成等比数列;

(2) 若 x_1, x_2, x_3 成等差数列, 求公差 d ;

(3) 若 x_1, x_2, x_3 成等比数列, 求公比 q .

21. 【2018 全国 I 卷理 21 (2)】已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$, 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

22. 【2008 大纲卷 II 理 22】已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

(1) 求 a 的取值范围, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: $f(x_2) > \frac{1 - 2 \ln 2}{4}$.

23. 【2019 天津文 20】设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbb{R}, 0 < a < \frac{1}{e}$

(1) 证明 $f(x)$ 恰有两个零点;

(2) 设 x_1 为 $f(x)$ 的极值点, x_2 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_2 > x_1$, 证明 $3x_1 - x_2 > 2$.

24. 【2025 新高考 II 卷 18】已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3, k \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的极值点和唯一的零点;

(2) 设 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的极值点和零点.

i. 设函数 $g(t) = f(x_1+t) - f(x_1-t)$, 证明: $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减;

ii. 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明.

25. 【2005 天津 22】设函数 $f(x) = x \sin x (x \in \mathbb{R})$.

(1) 设 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点, 证明: $[f(x_0)]^2 = \frac{x_0^4}{1+x_0^2}$;

(2) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的全部极值点按从小到大的顺序排列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 证明: $\frac{\pi}{2} < a_{n+1} - a_n < \pi (n = 1, 2, \dots)$

26. 设函数 $f(x) = (x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.

(1) 若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x-t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.

27. 【2014 天津理 20】已知函数 $f(x) = x - ae^x, a \in \mathbb{R}$ 有两个零点 $x_1, x_2, x_1 < x_2$:

(1) 证明: $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大;

(2) 证明: $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

28. 【2022 新高考 I 卷 22】已知函数 $f(x) = e^x - x$ 和 $g(x) = x - \ln x$. 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

29. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}, g(x) = \frac{x}{e^x}$, 其中 $a \neq 0$.

- (1) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $g(f(x)) \geq \ln \sqrt{2}$, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 若存在不相等的实数 x_1, x_2 , 满足 $g(x_1) = g(x_2)$, 且 $2x_1 < x_2 < 3x_1$, 求 $g(x_1 + x_2)$ 的取值范围.

1. $\{2, 3, 4\}$.

2. $3y < 2x < 5z$. 对等式每一项取自然对数得 $x \ln 2 = y \ln 3 = z \ln 5 = k$, 比较 $2x = \frac{2k}{\ln 2}$, $3y = \frac{3k}{\ln 3}$, $5z = \frac{5k}{\ln 5}$ 三数大小, 转为比较 $\frac{\ln 2}{2}$, $\frac{\ln 3}{3}$, $\frac{\ln 5}{5}$ 三数大小, 可知

$$\frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 2}{2} = \boxed{\frac{\ln 4}{4}} > \frac{\ln 5}{5}$$

故 $3y < 2x < 5z$ 。

3. B.

$$\boxed{2a + \log_2 a} = 4b + 2\log_4 b < \boxed{2(2b) + \log_2(2b)} \implies a < 2b$$

故 B 选项正确.

4. B. $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$a = \log_5(2^b + 3^b) \approx \log_5 3^b = b \log_5 3, \quad c = \log_3(5^b - 2^b) \approx \log_3 5^b = b \log_3 5$$

有 $a < b < c$, 于是 $|a - c| \geq |b - c|$, 而 $a + c = b(\log_5 3 + \log_3 5) \geq 2b$, 于是 $c - b \geq b - a$, 即 $|a - b| \leq |b - c|$. 故 B 选项正确.

评:

5. AD.

6. AD.

7. $-\frac{\sqrt{3}}{6} \ln 3$.

8. (1) 分离变量 a, b , 有

$$ae^a = \frac{1 - \ln b}{b}$$

由于 $a > 0$, 故 $b \in (0, e)$

(a) 错误: 当 $b \in (0, 1)$ 时, $\ln b < 0 < \frac{1}{a}$, 不成立;

(b) 正确: $f(x) = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 单增, 借助函数 $f(x)$ 的单调性消元.

设 $y = f(x)$ 图象上有一点 $(a, ae^a) = (a, \frac{1 - \ln b}{b})$, 比较 $\frac{1 - \ln b}{b}$ 与 $g(-\ln b)$ 即可;

(c) 正确: 同上, 比较 $\frac{1 - \ln b}{b}$ 与 $g(1 - \ln b)$ 即可;

(d) 正确: 同上, 比较 $\frac{1 - \ln b}{b}$ 与 $g(\frac{1}{b})$ 即可;

9. $\frac{7}{2}$. 由于 $2x_1 + 2^{x_1} = 5$, 则 $x_1 = \log_2(5 - 2x_1)$. 令 $t = \frac{7}{2} - x_1$, 则 $\frac{7}{2} - t = \log_2(2 - 2t) = 1 = \log_2(t - 1)$. 于是 $2t + 2\log_2(t - 1) = 5$. 由于方程 $2x + 2\log_2(x - 1) = 5$ 只有一个根, 所以 $t = x_2$, 故 $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$.

10. $m \in (-\frac{4}{3e}, 0) \cup (0, \frac{2}{e})$.

11. (1)

(2) $[\frac{e}{\ln 2}, e^{e-1})$.

12.

13.

14.

15. () $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(e^x + x)(x-1)}{x^2}$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 不妨设 $x_1 < x_2$. 于是 $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$, 即 $\frac{1}{x_2} \in (0, 1)$. 由于 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 故 $x_1 x_2 < 1$ 等价于 $f(x_1) > f(\frac{1}{x_2})$. 而 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 故 $x_1 x_2 < 1$ 等价于 $f(x_1) > f(\frac{1}{x_1})$, 即

$$\frac{e^{x_2}}{x_2} - \ln x_2 + x_2 > x_2 e^{\frac{1}{x_2}} + \ln x_2 + \frac{1}{x_2},$$

整理得

$$\frac{e^{x_2}}{x_2} + \ln \frac{e^{x_2}}{x_2} > x_2 e^{\frac{1}{x_2}} + \ln \left(x_2 e^{\frac{1}{x_2}} \right). \quad (*)$$

令函数 $g(x) = x + \ln x$, (*) 式化为 $g\left(\frac{e^{x_2}}{x_2}\right) > g\left(x_2 e^{\frac{1}{x_2}}\right)$, 又 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 (*) 式等价于 $\frac{e^{x_2}}{x_2} > x_2 e^{\frac{1}{x_2}}$, 即 $x_2 - 2\ln x_2 - \frac{1}{x_2} > 0$

令 $h(x) = x - 2\ln x - \frac{1}{x}$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$, 所以当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 又 $x_2 > 1$, 所以 $h(x_2) > h(1) = 0$, 即 $x_2 - 2\ln x_2 - \frac{1}{x_2} > 0$. 因此 $x_1 x_2 < 1$.

注: 本题更简易的做法是注意到 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \ln \frac{e^x}{x} - a$, 于是 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 当且仅当 $\frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{x_2}}{x_2}$.

16. 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$, 由题意知, $\frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{x_2}$, 化简得到 $\sqrt{x_1 x_2} = 2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$. 而 $f(x_1) + f(x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - \ln x_1 - \ln x_2 = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2} - \ln x_1 x_2$, 又因为
- $$x_1 + x_2 \geq \sqrt{x_1 x_2} = 2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) > 4\sqrt[4]{x_1 x_2} \Rightarrow x_1 x_2 > 256.$$
- 于是令 $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \ln x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{4x}(\sqrt{x} - 4)$, 当 $x > 16$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(16, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $f(x_1) + f(x_2) = g(x_1 x_2) > g(256) = 8 - 8\ln 2$.

17. (i) 若 $a+1 < 0$, 则对任意常数 b , 当 $x < 0$, 且 $x < \frac{1-b}{a+1}$ 时, 有 $e^x - (a+1)x < b$, 不符题意.
- (ii) 若 $a+1 = 0$, 则当 $b \leq 0$ 时满足题意此时 $(a+1)b = 0$.

(iii) 若 $a+1 > 0$, 设 $g(x) = e^x - (a+1)x$, 则 $g'(x) = e^x - (a+1)$. 当 $x \in (-\infty, \ln(a+1))$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln(a+1), +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 从而 $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln(a+1))$ 内单调递减, 在 $(\ln(a+1), +\infty)$ 内单调递增, 故 $g(x)$ 有最小值

$$g(\ln(a+1)) = a+1 - (a+1)\ln(a+1).$$

所以 $f(x) \geq (a+1)x+b$ 等价于 $b \leq a+1-(a+1)\ln(a+1)$, 因此 $(a+1)b \leq (a+1)^2 - (a+1)^2 \ln(a+1)$.

设 $h(a) = (a+1)^2 - (a+1)^2 \ln(a+1)$, 则 $h'(a) = (a+1)[1-2\ln(a+1)]$. 所以 $h(a)$ 在 $\left(-1, e^{\frac{1}{2}}-1\right)$ 内单调递增, 在 $\left(e^{\frac{1}{2}}-1, +\infty\right)$ 内单调递减, 故 $h(a)$ 在 $a=e^{\frac{1}{2}}-1$ 处取得最大值, 从而 $(a+1)b = h(a) \leq \frac{e}{2}$, 当 $a=e^{\frac{1}{2}}-1$, $b=\frac{e}{2}$ 时取到等号.

综上, $(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

18.

19. 对 $f(x)$ 求导得到

$$f'(x) = \frac{a}{1+ax} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{ax^2 - 4(1-a)}{(1+ax)(x+2)^2}.$$

若 $a \geq 1$, $x > 0$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

若 $0 < a < 1$, $0 < x < \frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$ 时, $f'(x) < 0$; $x > \frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 即

$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 问知, 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 则 $p(x) = ax^2 - 4(1-a) = 0$ 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上有两个不等的根, 于是 $\frac{4(1-a)}{a} > 0$, 且 $p\left(-\frac{1}{a}\right) > 0$, 解得 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. 由韦达定理得到 $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 x_2 = \frac{4(a-1)}{a} = 4 - \frac{4}{a}$. 故

$$\begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= \ln(1+ax_1) + \ln(1+ax_2) - \frac{2x_1}{x_1+2} - \frac{2x_2}{x_2+2} \\ &= \ln[(1+ax_1)(1+ax_2)] - \frac{4x_1x_2 + 4(x_1+x_2)}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4} \\ &= \ln(2a-1)^2 + \frac{2}{2a-1} - 2. \end{aligned}$$

令 $t = 2a-1$, $t \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $g(x) = \ln x^2 + \frac{2}{x} - 2$, 可以证明 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 上单调递减.

$g(-1) = -4$, 因此 $-1 < t < 0$ 也即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $g(t) < g(-1) < 0$, 不满足题意; $g(1) = 0$, 因此 $0 < t < 1$ 也即 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $g(t) > g(1) = 0$, 满足题意.

综上, $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

20. $d = 2\ln(\sqrt{2}+1); q = 2\sqrt{2}+3$.

21. 可知 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 x_2 = 1$. 不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$. 则

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a \left(\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \right) = -2 + a \cdot \frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2}.$$

即证 $\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2} < 1$ 也即 $x_2 - \frac{1}{x_2} - 2\ln x_2 > 0$. 这是显然的, 略证。

22.

23. (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - [ae^x + a(x-1)e^x] = \frac{1-ax^2e^x}{x}$, 令 $g(x) = 1-ax^2e^x$, $x \in (0, +\infty)$, 由 $0 < a < \frac{1}{e}$ 可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 又 $g(1) = 1-ae > 0$, 且

$$g\left(\ln \frac{1}{a}\right) = 1 - a\left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} = 1 - \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 < 0,$$

故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点, 从而 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点, 设该零点为 x_0 , $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$. 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > \frac{g(x_0)}{x} = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} < \frac{g(x_0)}{x} = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减. 因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点。

可知 $f(1) = 0$, 于是 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上有唯一零点 $x = 1$, 而

$$f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln \ln \frac{1}{a} - a\left(\ln \frac{1}{a} - 1\right)e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1 = h\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0,$$

又因为 $f(x_0) > f(1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有唯一零点, 从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点。

- (2) 方法一: 由题意, $f'(x_0) = 0, f(x_1) = 0$, 即

$$\begin{cases} ax_0^2 e^{x_0} = 1 \\ \ln x_1 = a(x_1 - 1)e^{x_1} = 0 \end{cases}$$

从而 $\ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2} e^{x_1 - x_0}$, 即 $e^{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2 \ln x_1}{x_1 - 1}$. 当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$, 又 $x_1 > x_0 > 1$, 故

$$e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2(x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2$$

两边取对数得 $\ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2$, 于是 $x_1 - x_0 < 2\ln x_0 < 2(x_0 - 1)$, 整理得 $3x_0 - x_1 > 2$.

方法二: 即证明 $3x_0 - 2 > x_1$, 可知 $3x_0 - 2 > x_0$, 于是 $3x_0 - 2 > x_1$ 当且仅当 $f(3x_0 - 2) < 0$, 又 x_0 满足 $f'(x_0) = 0$, 即 $1 - ax_0^2 e^{x_0} = 0$, 于是

$$\begin{aligned} f(3x_0 - 2) &= \ln(3x_0 - 2) - a(3x_0 - 3)e^{3x_0 - 2} \\ &= \ln(3x_0 - 2) - \frac{(3x_0 - 3)e^{2x_0 - 2}}{x_0^2} \\ &= \ln(3x_0 - 2) - (3x_0 - 3)e^{2(x_0 - 1 - \ln x_0)} \\ &\leq \ln(3x_0 - 2) - (3x_0 - 3) < 0. \end{aligned}$$

于是完成了证明。

评: 对于第(1)问的取点 $\ln \frac{1}{a}$, 理论上只要取比它大的都可行, 不必被此拘束。第(2)问的方法一进行了多次放缩, 这一做法是有风险的, 每次放缩造成的误差引入难以被事先估计其严重程度, 方法二则先进行等价的消元后再考虑放缩, 减少了误差传递, 是较为稳妥的。

24. (1) 由已知可得 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = \frac{-x^2(3kx + 3k - 1)}{1+x}$

由于 $0 < k < \frac{1}{3}$, 因此 $\frac{1-3k}{3k} > 0$ 。当 $x \in \left(0, \frac{1-3k}{3k}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1-3k}{3k}\right)$ 单调递增; 当 $x \in \left(\frac{1-3k}{3k}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1-3k}{3k}, +\infty\right)$ 单调递减。所以 $x = \frac{1-3k}{3k}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的唯一极值点。

思路 1: 又 $f(0) = 0$, 所以 $f\left(\frac{1-3k}{3k}\right) > 0$ 。由于当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln(1+x) - x < 0$, 因此当 $x > \frac{1}{2k}$ 时, $f(x) < \frac{1}{2}x^2(1-2kx) < 0$ 。所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 存在唯一零点。

思路 2: 又 $f(0) = 0$, 所以当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f(x) > 0$, 且 $f(x_1) > 0$ 。

设 $h(x) = \ln(1+x) - x$, 则当 $x > 0$ 时, $h'(x) = \frac{-x}{1+x} < 0$ 。所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减。从而 $h\left(\frac{1}{2k}\right) < 0$ 。而 $f\left(\frac{1}{2k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2k} = h\left(\frac{1}{2k}\right) < 0$, 且 $\frac{1}{2k} > \frac{1-3k}{3k}$, 所以当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时 $f(x)$ 存在唯一零点 x_2 。

综上, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点。

(2.i) 思路 1: 由 (1) 知 $x_1 = \frac{1-3k}{3k} > 0$, 故 $k = \frac{1}{3(1+x_1)}$, $f'(x) = \frac{x^2(x_1-x)}{(1+x)(1+x_1)}$ 。

由题设可得

$$g'(t) = f'(x_1+t) + f'(x_1-t) = \frac{2t^2(t^2 - x_1^2 - 2x_1)}{(1+x_1+t)(1+x_1-t)(1+x_1)}$$

所以当 $t \in (0, x_1)$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 单调递减。

思路 2: 由 (1) 知 $x_1 = \frac{1-3k}{3k} > 0$, 故 $k = \frac{1}{3(1+x_1)}$ 。故

$$\begin{aligned} g(t) &= \ln(1+x_1+t) - \ln(1+x_1-t) - 2(1-x_1+3kx_1^2)t - 2kt^3 \\ &= \ln(1+x_1+t) - \ln(1+x_1-t) - 2\left(1-x_1 + \frac{x_1^2}{1+x_1}\right)t - \frac{2t^3}{3(1+x_1)} \\ g'(t) &= \frac{1}{1+x_1+t} + \frac{1}{1+x_1-t} - 2\left(1-x_1 + \frac{x_1^2}{1+x_1}\right) - \frac{2t^2}{1+x_1} \\ &= \frac{2t^2(t^2 - x_1^2 - 2x_1)}{(1+x_1+t)(1+x_1-t)(1+x_1)} \end{aligned}$$

所以当 $t \in (0, x_1)$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 单调递减。

思路 3: 由 (1) 知 $x_1 = \frac{1-3k}{3k}$, 故

$$\begin{aligned} g(t) &= \ln(1+x_1+t) - \ln(1+x_1-t) - 2(1-x_1+3kx_1^2)t - 2kt^3 \\ &= \ln(1+3kt) - \ln(1-3kt) - 6kt - 2kt^3 \\ g'(t) &= \frac{3k}{1+3kt} + \frac{3k}{1-3kt} - 6k - 6kt^2 \\ &= \frac{6kt^2(9k^2t^2 + 9k^2 - 1)}{(1+3kt)(1-3kt)} \end{aligned}$$

当 $0 < t < x_1$ 时, $1-3kt > 1-3kx_1 = 3k > 0$, $9k^2t^2 + 9k^2 - 1 < 9k^2x_1^2 + 9k^2 - 1 = 6k(3k-1) < 0$, 故 $g'(t) < 0$, 所以 $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 单调递减。

(2.ii) $2x_1 > x_2$, 证明如下:

由 (2.i) 知, $g(x_1) < G(0) = 0$, 即 $f(2x_1) - f(0) < 0$. 又 $f(0) = 0$, 故 $f(2x_1) < 0$, 于是 $f(2x_1) < f(x_2)$.

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 单调递减, 且 $x_2 > x_1$, $2x_1 > x_1$, 所以 $2x_1 > x_2$.

25. (1) $f'(x) = \sin x + x \cos x$, 依题意 $f'(x_0) = 0$

若 $\cos x_0 = 0$, 则 $\sin x_0 \neq 0$, 进而 $f'(x_0) \neq 0$, 矛盾, 因此 $\cos x_0 \neq 0, x_0 = -\tan x_0$

$$[f(x_0)]^2 = x_0^2 \sin^2 x_0 = x_0^2 \cdot \frac{\sin^2 x_0}{\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0} = x_0^2 \cdot \frac{\tan^2 x_0}{\tan^2 x_0 + 1} = \frac{x_0^4}{x_0^2 + 1}$$

(2) 由 (1) 问可知 $\cos a_n \neq 0$, 因此 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为 $g(x) = \frac{f'(x)}{\cos x} = x + \tan x$ 的零点.

可知, $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ 上单调递增, 且值域为 $\mathbb{R}$, 于是 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)$ 有且仅有一个变号零点, 而 $\cos x$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)$ 上不变号, 因此 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)$ 的变号零点也是 $f'(x)$ 的变号零点, 于是 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的所有零点都是 $f(x)$ 的极值点.

这意味着 $a_n \in \left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \frac{3\pi}{2} + (n-1)\pi\right) (n=1, 2, \dots)$. 又 $g(n\pi) = n\pi > 0$, 因此 $a_n \in \left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, n\pi\right) (n=1, 2, \dots)$, 于是 $\frac{\pi}{2} < a_{n+1} - a_n < \frac{3}{2}\pi$, 完成了左侧的证明.

再证明右侧, 即证明 $a_{n+1} < a_n + \pi$, 而 $a_n + \pi \in \left(\frac{\pi}{2} + n\pi + (n+1)\pi\right)$, 故 $a_{n+1} < a_n + \pi$ 当且仅当 $g(a_n + \pi) > 0$.

而 $g(a_n + \pi) = a_n + \pi + \tan(a_n + \pi) = a_n + \pi + \tan a_n = \pi > 0$. 于是完成了证明.

评: 第 (2) 问如果直接对 $f'(x)$ 继续求导, 就会得到 $f''(x) = 2\cos x - x\sin x$, 再进一步求导得到 $f'''(x) = -3\sin x - x\cos x$, 可见直接多次求导只会让问题变得越来越复杂, 如果对 $f'(x)$ 简单做个处理: $g(x) = \frac{f'(x)}{\cos x} = \tan x + x$, 这就容易分析多了. 此外, 结论的形式其实就是要证 $\tan(a_{n+1} - a_n) < 0$.

26.

27. (1) 由 $f(x) = x - ae^x = 0$, 有 $a = \frac{x}{e^x}$. 设 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 可得 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 且当 $x \in (-\infty, 0]$ 时 $g(x) \leq 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $g(x) > 0$.

设 $a_1 > a_2 \in (0, e^{-1})$, 且 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ 满足 $a_1 = g(\xi_1) = g(\xi_2), a_2 = g(\eta_1) = g(\eta_2)$, $\xi_1, \eta_1 \in (0, 1), \xi_2, \eta_2 \in (1, +\infty)$. 根据函数 $g(x)$ 的单调性可得 $\xi_1 > \eta_1, \xi_2 < \eta_2$, 而 $\xi_1, \eta_1 > 0$, 所以 $\frac{\xi_2}{\xi_1} < \frac{\eta_2}{\eta_1}$. 故 $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大.

(2) 由 $x_1 = ae^{x_1}, x_2 = ae^{x_2}$, 得 $\begin{cases} \ln x_1 = \ln a + x_1, \\ \ln x_2 = \ln a + x_2. \end{cases}$, 故 $x_2 - x_1 = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1}$. 令 $\frac{x_2}{x_1} = t, t > 1$, 解得 $x_1 = \frac{\ln t}{t-1}, x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$. 因此 $x_1 + x_2 = \frac{(t+1) \ln t}{t-1}$. 令 $h(x) = \frac{(x+1) \ln x}{x-1}, x \in (1, +\infty)$, 可以证明 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 结合 (1) 可知, $x_1 + x_2$ 随着 t 的增大而增大; 而 t 随着 a 的减小而增大, 所以 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

28.

29.

第一章 函数

1.8 变量关系

B 组

- 【2024 “数海漫游一模”（网络联考）8】已知 $2^x - x^2 = \frac{2^{x+2}y-2}{y^2}$, 则
 (A) $x \geq 0$ (B) $y > 0$ (C) $x < 2$ (D) $y \leq 2$
- 已知 O 为坐标原点, 函数 $y = e^x$ 与函数 $y = kx + 2$ 的图象有两个不同的交点 $A, B, S_{\triangle AOB} = f(k)$, 求 $f(k)$ 的最小值点.
- 【2022 粤港澳大湾区联考 22】设 a, b 是不相等的正数, 且 $a + \ln b = b + \ln a$, 证明: $a + b + \ln ab > 2$.
- 【2010 浙江理 22】已知 a 是给定的实常数, 设函数 $f(x) = (x-a)^2(x+b)e^x, b \in \mathbb{R}, x=a$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点.
 (1) 求 b 的取值范围;
 (2) 设 x_1, x_2, x_3 是 $f(x)$ 的 3 个极值点, 问是否存在实数 b , 可找到 $x_4 \in \mathbb{R}$, 使得 x_1, x_2, x_3, x_4 的某种排列 $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}$ (其中 $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$) 依次成等差数列? 若存在, 求所有的 b 及相应的 x_4 ; 若不存在, 说明理由.
- 【2019 天津理 20】设函数 $f(x) = e^x \cos x, g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
 (1) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$;
 (2) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 证明:

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$$

1.

2. 方法一: 即求 $|x_A - x_B|$ 的最小值, 设 $A(x_1, e^{x_1}), B(x_2, e^{x_2})$, 已知 $\begin{cases} e^{x_1} = kx_1 + 2 & (1) \\ e^{x_2} = kx_2 + 2 & (2) \end{cases}$, 设 $t = x_2 - x_1$.

(2) - (1) 得: $e^{x_1} = \frac{kt}{e^t - 1}$, 将其带入 (1) 式得到:

$$\frac{kt}{e^t - 1} = k \ln \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) + 2 \quad (*)$$

设 $p = \frac{t}{e^t - 1} \in (0, 1)$, 且 t 增大时, p 减小. 则由求 $t_{\min}$ 转化为求 $p_{\max}$, 整理

整理 (*) 得:

$$p - \ln p = \ln k + \frac{2}{k} = r$$

r 越小越好, 取最小值时, $k = 2$, 即为本题答案.

方法二: 设 $t_1 = x_1 - \ln k, t_2 = x_2 - \ln k$, 则有 $\begin{cases} e^{t_1} = t_1 + \frac{2}{k} \\ e^{t_2} = t_2 + \frac{2}{k} \end{cases}$

即 $y = \frac{2}{k}$ 交 $y = e^x - x$ 的图象有两个交点, 要使这两交点横坐标之差 $|t_1 - t_2| = |x_1 - x_2|$ 最小, $k = 2$ 时取到最小.

3.

4.

5.

第一章 函数

1.8 变量关系

杂 题

- 【2024 长郡二十校联考 8】设方程 $2^x \cdot |\log_2 x| = 1$ 的两根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则
 (A) $0 < x_1 < 1, x_2 > 2$ (B) $x_1 > \frac{1}{x_2}$ (C) $0 < x_1 x_2 < 1$ (D) $x_1 + x_2 > 3$
- 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}, x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 满足 $f(x_1) = f(x_2) = m, x_2 > 3x_1$, 求 m 的取值范围.
- 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x \ln x}$, 证明 $f(x)$ 恰有两个极值点 x_1, x_2 , 并求 $f(x_1) + f(x_2)$ 的值.
- 【2022 武汉四调 22 (2)】已知定义在 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 函数 $f(x) = (x - k) \sin x$. 将 $f(x)$ 的所有极值点按照从小到大的顺序排列构成数列 $\{x_n\}$, 若 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 求 k 的值.
- 【2026 郑州一模 19 节选】已知函数 $f(x) = a \ln x - 2x + 2a$.
 (2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围;
 (3) 设 $g(x) = ax - 2e^x + 2a$, 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 共有 4 个不同的零点, 是否存在实数 a , 使这 4 个零点在调整顺序后成等差数列, 若存在, 求出 a 的值, 否则请说明理由.
- 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - k \left(\frac{2}{x} + \ln x \right)$ 有三个极值点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$.
 (1) 求实数 k 的取值范围;
 (2) 若 2 是 $f(x)$ 的一个极大值点, 证明: $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{k^2}{e} - k$.
- 【2023 武汉二调 22】已知关于 x 的方程 $ax - \ln x = 0$ 有两个不相等的正实数根 $x_1, x_2, x_1 < x_2$.
 (1) 求实数 a 的取值范围;
 (2) 设 k 为常数, 当 a 变化时, 若 $x_1^k x_2$ 有最小值 e^e , 求常数 k 的值.
- 【2025 闵行一模 12】设集合 $T = \{(x, y) | x > 1, y \in \mathbb{R}\}$, 集合 $M_a = \{(x, y) | y = (a \ln x + \frac{1}{a})^2\}$, 若存在 $(x_0, y_0) \in M_{a_0}$, 对属于 T 且不属于任意 M_a 的所有 (x, y) 都有 $y - x \leq y_0 - x_0$, 则 $y_0 - x_0$ 的取值范围是 (Δ)
- 已知函数 $f(x) = x(x - b)^2$, 若 $b > 0$, 直线 $y = 1$ 与函数 $f(x)$ 的图像有三个交点, 其坐标分别为 $A(x_1, 1), B(x_2, 1), C(x_3, 1)$, 且 $x_1 < x_2 < x_3$.
 (1) 求 b 的取值范围;
 (2) 若 x_1, x_2, x_3 成等差数列, 求 b ;
 (3) 判断 $x_3 - x_1$ 与 b 的大小关系.
- 【2025 武汉九调 19】已知函数 $f(x) = (x^2 - kx + 1) \ln x$ 在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 各恰有一个零点, 分别记为 x_1 和 x_2 .
 (1) 求实数 k 的取值范围;
 (2) 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, 0)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积为 S , 求 $\frac{S}{x_2 - x_1}$ 的最大值;

(3) 若函数 $g(x) = f(x) - a$ 有三个零点 t_1, t_0, t_2 , 其中 $t_1 < t_0 < t_2$, 证明: $t_2 - t_1 \leq x_2 - x_1$.

11. 已知函数 $f(x) = ae^{-x} - \ln(x+1)$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $m, n \in \mathbb{R}$ 满足 $f(m) = f(n) + \frac{1}{e} > 0$, 证明: $|n - m| < 1$.

12. 【2023 武汉九调 22】已知函数 $f(x) = (x^2 + mx + n)e^x$. 若 $m = a + b + 2$, $n = a^2 + b^2 + 2$, 且 $f(x)$ 有两个极值点, 分别为 x_1 和 x_2 ($x_1 < x_2$), 求 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{e^{x_2} - e^{x_1}}$ 的最小值.

13. 【2026 湖南九校联考 19】设函数 $f(x) = x^3 - ax - b$, $x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a = 2, b = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象上有且仅有 2 个点到原点距离为 d , 求 d 的取值范围;

(3) 函数 $f(x)$ 的图象上是否存在唯一的一组点 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 构成正 n 边形, $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n \geq 3$? 若存在, 请求出所有满足条件的 n 以及对应 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

第一章 函数

1.8 变量关系