
第一章 函数

1.7 含参数, 逻辑变量的函数问题

前一节的方法主要适用于需理清函数变化走势的题目, 这一方法同样适用于本节主讲的部分问题.

相比于上一节的问题, 本节问题可等价变形的空间更大, 可用更为灵活的方式解决, 我们也需要介绍另外的方法, 并指出其优势与劣势.

分离参数 这一方法将含有参数的不等式 $f_a(x) \geq 0$ 化简为 $h(a) \geq \varphi(x)$ 或 $h(a) \leq \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 不含参数 a . 若 $\varphi(x)$ 的单调性求解起来较为轻松, 走势较为清晰, 则可以考虑将此方法继续下去.

例题 1.7.1. 已知函数 $f(x) = e^x \cos 3x - ae^{3x} \cos x$, 若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上没有零点, 求实数 a 的取值范围.

例题 1.7.2. 已知函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a(a < 1)$, 若存在唯一整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$, 求 a 的取值范围.

分离参数的劣势如下:

- (1) 只有当原不等式能规约成 $h(a) > \varphi(x)$ 形式时才可使用;
- (2) 如果存在不等式左右同时除以某函数 $g(x)$ 的情况, 如此变形前需验证 $g(x)$ 的零点(如果有的话)并刨去. 最终得到的 $\varphi(x)$ 可能是多段函数, 且每一步的讨论可能较为繁杂;
- (3) 得到的新函数可能不易求导;
- (4) 如果临界情况是未定义点的极限, 则需借助高等数学中求解极限的方法解决.

必要性探路 其构造多半基于: (1) 修改简单放缩式的参数, (2) 复合放缩式, (3) 函数的多项式展开, 其论证基于连续函数的保号性.

端点效应 这一方法主要考虑目标函数在区间端点处的各阶导数.

对于问题: 若 $f_a(x) \geq 0$ 在 $x \in [b, +\infty)$ 上恒成立, 求解 a 的取值范围.

如果函数 $f_a(x)$ 满足 $f_a^{(k)}(b) = 0, k = 0, 1, \dots, n, f_a^{(n+1)}(b) \neq 0$, 那么 “ $f_a^{(n+1)}(b) \geq 0$ ” 是 “ $f_a(x) \geq 0$ 在 $x \in [b, +\infty)$ 上恒成立” 的**必要条件**.

必须验证 $f_a^{(n+1)}(b) \geq 0$ **也是该命题的充分条件**.

内点效应 若 $f_a(x) \geq 0$ 在 $x \in [a, b]$ 上恒成立, 且 $f_a(c) = 0, c \in (a, b)$, 则 “ $f'_a(c) = 0$ ” 是 “ $f_a(x) \geq 0$ 在 $x \in [a, b]$ 上恒成立” 的必要条件.

例题 1.7.3. 已知函数 $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$, 若 $g(x) \geq 2 + ax$ 恒成立, 求 a .

注意: 等价变形、换元、分类讨论等方法是基本功, 学生在掌握“通性通法”的前提下可适当学习一些套路与技巧, 切忌舍本逐末.

第一章 函数

1.7 含参数, 逻辑变量的函数问题

习 题

A 组

- 已知函数 $f(x) = x^2 + 2 (x \geq 0)$, $g(x) = ae^{-x} (a > 0)$, 点 P, Q 分别在函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象上, O 为坐标原点.
 - 若关于 x 的方程 $f(x) - g(x) = 0$ 在 $[0, 1]$ 上无解, 求实数 a 的取值范围;
 - 证明: 存在 P, Q 关于直线 $y = x$ 对称;
 - 若存在 P, Q 关于 y 轴对称, 求实数 a 的取值范围;
 - 若存在 P, Q 满足 $\angle POQ = 90^\circ$, 求实数 a 的取值范围.
- 若对任意 $x \geq 1$, 有 $x + 2 \leq ae^x + \frac{2x}{ae^x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
- 设函数 $f(x) = (x + 2 \sin x)(2^{-x} + 1)$, $x \in (0, +\infty)$, 证明或反驳:
 - 函数 $g(x) = f(x) - x$ 有且仅有一个零点;
 - 函数 $g(x) = f(x) - ax - b$ 有且仅有一个零点, 其中 $a < 0, b > 0$;
 - 存在实数 m , 使得 $|f(x) - 2x| \leq m$ 恒成立;
 - 存在实数 a, b, m , 使得 $|f(x) - ax - b| \leq m$ 恒成立.
- 【2019 全国 I 文 20】已知函数 $f(x) = 2 \sin x - x \cos x - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
 - 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点;
 - 若 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.
- 【2011 新课标 I 卷 21】已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{x}$. 如果当 $x > 0$, 且 $x \neq 1$ 时, $f(x) > \frac{\ln x}{x-1} + \frac{k}{x}$, 求 k 的取值范围.
- 【2022 新高考 II 卷 22 (2)】设函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求 a 的取值范围.
- 【2008 全国 II 卷 22】设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$. 对任意 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \leq ax$, 求 a 的取值范围.
- 【2011 浙江文 21】设函数 $f(x) = a^2 \ln x - x^2 + ax, a > 0$.
 - 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
 - 求所有的实数 a , 使 $e - 1 \leq f(x) \leq e^2$ 对 $x \in [1, e]$ 恒成立.
- 【2011 浙江理 22】设函数 $f(x) = (x - a)^2 \ln x, a \in \mathbb{R}$. 求 a 取值范围, 使得对任意 $x \in (0, 3e]$, 恒有 $f(x) \leq 4e^2$ 成立.

10. 当 $x \geq 0$ 时, 函数 $g(x) = 2(e^x - ax) - x^2 - a^2 \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
11. 【2022 长郡十五校联考 22】 $e^x - 2(a+1)x + \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}x^2 + 2(a+1)^2$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.
12. 【2023 湖南师大附中月考—22】已知函数 $f(x) = (x-a)(e^x + 1)$, $g(x) = ax \ln x + x + \frac{1}{e^2}$, 设 $F(x) = \max(f(x), g(x))$. 当 $x > 0$ 时, $F(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.
13. 【2026 浙江强基联盟开学考 18】
- (1) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 有 $\sin x - \sin 3x \geq -2x$;
 - (2) 若对任意 $x \geq 0$, 都有 $|\sin x - \sin 3x| \leq ax$ 成立, 求实数 a 的取值范围.
14. 已知函数 $f(x) = e^{ax} \sin x$, 当 $x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) \geq x$ 恒成立, 求正实数 a 的取值范围.
15. 【2008 湖南理 21】已知函数 $f(x) = \ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x}$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 若不等式 $(1 + \frac{1}{n})^{n+\alpha} \leq e$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立, 求 α 的最大值.
16. 【2014 北京 18 加强】
- (1) 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, 若 $m(\pi - x) \leq 1$, 求 m 的取值范围;
 - (2) 设集合 $S = \{x \mid \sin x \leq \pi x(\pi - x)\}$, 证明: $[0, \frac{\pi}{2}] \subseteq S$ 当且仅当 $[\frac{\pi}{2}, \pi] \subseteq S$;
 - (3) 若不等式 $ax(\pi - x) \leq \sin x \leq bx(\pi - x)$ 对于任意 $0 \leq x \leq \pi$ 恒成立, 求实数 a 的最大值与实数 b 的最小值.
17. 【2023 全国甲卷理 21】已知函数 $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若 $f(x) < \sin 2x$, 求 a 的取值范围.
18. 【2023 杭州一模 22】已知函数 $f(x) = e^x - \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$).
- (1) 讨论函数 $f(x)$ 零点个数;
 - (2) 若 $|f(x)| > a \ln x - a$ 恒成立, 求 a 的取值范围
19. 已知函数 $f(x) = a^{x-1} - \log_a x$, $a > 1$. 若关于 x 的不等式 $f(x) < 1$ 的解集为集合 $B \subseteq (\frac{1}{a}, a)$, 求 a 的取值范围.
20. 【2025 浙江学考 21】已知函数 $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x - 2}$, $g(x) = \frac{a \cos x + 2}{\sin x + 1}$, $a \in \mathbb{R}$
- (1) 若 $g(x)$ 的最小值为 0, 求 a 的值;
 - (2) 若对任意 $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, 存在 $x_0 \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, 使得 $f(x) \geq g(x_0)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.
21. 已知函数 $f(x) = (m+1) \sin x - x \cos x$, $x \in [0, \pi]$.
- (1) 若 $f(x)$ 存在唯一的极值且为极小值, 求 m 的取值范围;
 - (2) 设 $n \in \mathbb{R}$, 若存在 $m \in (-\infty, 0)$ 使得 $m \leq \sqrt{2}(f(x) - n)$ 对 $x \in [0, \pi]$ 恒成立, 求 n 的最大值.

22. 【2025 新高考 I 卷 19】

- (1) 求函数 $f(x) = 5 \cos x - \cos 5x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 的最大值;
- (2) 给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 证明: 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$;
- (3) 设 $b \in \mathbb{R}$, 若存在 $\varphi \in \mathbb{R}$ 使得 $5 \cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求 b 的最小值.

1.

2.

3.

4.

$$f'(x) = \cos x + x \sin x - 1,$$

令 $g(x) = \cos x + x \sin x - 1$, 则

$$g'(x) = x \cos x.$$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 又 $g(0) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $g(\pi) = -2 < 0$, 因此 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点, 即 $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点.

问直接考虑两个端点: $f(0) = 0$, 暂时看不出对 a 有什么限制; $f(\pi) = 0$, 那么 $a\pi \leq 0$, 即 $a \leq 0$, 之后利用 (1) 问结论进一步分析即可得到最终结论:

$$f(\pi) = 0 \geq a\pi \Rightarrow a \leq 0.$$

由 (1) 问过程可知, $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点 x_0 , 且在 $(0, x_0)$ 上 $f'(x) > 0$, 在 (x_0, π) 上 $f'(x) < 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 (x_0, π) 上单调递减.

又 $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$, 即在 $[0, \pi]$ 上 $f(x) \geq 0$, 因此 $a \leq 0$ 时, $f(x) \geq ax$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立.

综上, $a \in (-\infty, 0]$.

5. 可知

$$f(x) - \left(\frac{\ln x}{x-1} + \frac{k}{x}\right) = \frac{1}{1-x^2} \left(2\ln x + \frac{(k-1)(x^2-1)}{x}\right)$$

考虑函数 $h(x) = 2\ln x + \frac{(k-1)(x^2-1)}{x}$ ($x > 0$), 则

$$h'(x) = \frac{(k-1)(x^2+1) + 2x}{x^2}$$

(i) 设 $k \leq 0$. 由 $h'(x) = \frac{k(x^2+1) - (x-1)^2}{x^2}$ 知, 当 $x \neq 1$ 时, $h'(x) < 0$. 而 $h(1) = 0$, 故

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$, 可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x) > 0$.

从而当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $f(x) - \left(\frac{\ln x}{x-1} + \frac{k}{x}\right) > 0$, 即 $f(x) > \frac{\ln x}{x-1} + \frac{k}{x}$.

(ii) 设 $0 < k < 1$. 由于当 $x \in \left(1, \frac{1}{1-k}\right)$ 时, $(k-1)(x^2+1) + 2x > 0$, 故 $h'(x) > 0$. 而 $h(1) = 0$, 故当 $x \in \left(1, \frac{1}{1-k}\right)$ 时, $h(x) > 0$, 可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x) < 0$. 与题设矛盾.

(iii) 设 $k \geq 1$. 此时 $h'(x) > 0$, 而 $h(1) = 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x) < 0$. 与题设矛盾.

综合得 k 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

6. 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x = e^{ax} [1+ax - e^{(1-a)x}]$. 令 $g(x) = 1+ax - e^{(1-a)x}$, 则 $g'(x) = a - (1-a)e^{(1-a)x}$.

若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则 $1-a > 0$, 于是当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^{(1-a)x} > 1$, 故 $g'(x) < 2a-1 \leq 0$, 因此 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $g(x) < g(0) = 0$, 从而 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x) < f(0) = -1$, 满足题意.

若 $\frac{1}{2} < a < 1$, 则 $1-a > 0$, $\frac{a}{1-a} > 1$, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{1-a} \ln \frac{a}{1-a}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{1-a} \ln \frac{a}{1-a}\right)$ 上单调递增, 故 $g(x) > g(0) = 0$, 所以 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{1-a} \ln \frac{a}{1-a}\right)$ 上单调递增. 在该区间上有 $f(x) > f(0) = -1$.

若 $a \geq 1$, 则 $f(1) = e^a - e \geq 0 > -1$. 不符题意.

综上, a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

7. 令 $g(x) = ax - f(x)$, 则

$$g'(x) = a - \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} = a - \frac{2}{2 + \cos x} + \frac{3}{(2 + \cos x)^2} = 3\left(\frac{1}{2 + \cos x} - \frac{1}{3}\right)^2 + a - \frac{1}{3}.$$

当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $g'(x) \geq 0$. 又 $g(0) = 0$, 所以当 $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$, 即 $f(x) \leq ax$.

当 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, 由于 $g'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增, 当 $g'(\pi) > 0$ 时, $g'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一的零点 x_0 , 且在 $(0, x_0)$ 上 $g'(x) < 0$, 在 (x_0, π) 上 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 (x_0, π) 上单调递增, 故 $g(x_0) < g(0) = 0$, 不符题意. 当 $g'(\pi) \leq 0$ 时, $g'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上取负值, 于是 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 有 $g(\pi) < g(0) = 0$, 不符题意.

综上: $a \geq \frac{1}{3}$.

附: 另一种证明 $0 < a < \frac{1}{3}$ 不符题意的方法: 令 $h(x) = \sin x - 3ax$, 则 $h'(x) = \cos x - 3a$. 故当 $x \in [0, \arccos 3a]$ 时, $h'(x) > 0$. 因此 $h(x)$ 在 $[0, \arccos 3a]$ 上单调增加, 故当 $x \in (0, \arccos 3a)$ 时, $h(x) > h(0) = 0$, 即 $\sin x > 3ax$. 于是, 当 $x \in (0, \arccos 3a)$ 时,

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x} > \frac{\sin x}{3} > ax.$$

不符题意.

8. (1) 因为 $f(x) = a^2 \ln x - x^2 + ax$, 其中 $x > 0$, 所以 $f'(x) = \frac{a^2}{x} - 2x + a = -\frac{(x-a)(2x+a)}{x}$.

由于 $a > 0$, 所以 $f(x)$ 的增区间为 $(0, a)$, 减区间为 $(a, +\infty)$.

(2) 由题意得, $f(1) = a - 1 \geq e^{-1}$, 即 $a \geq e$.

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 单调递增,

要使 $e^{-1} \leq f(x) \leq e^2$ 对 $x \in [1, e]$ 恒成立,

只要

$$\begin{cases} f(1) = a - 1 \geq e^{-1}, \\ f(e) = a^2 - e^2 + ae \leq e^2, \end{cases}$$

解得 $a = e$.

9. 当 $0 < x \leq 1$ 时, 对于任意的实数 a , 恒有 $f(x) \leq 0 < 4e^2$ 成立.

当 $1 < x \leq 3e$ 时, 若 $a \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, 3e]$ 上单调递增, 而 $f(3e) = (3e - a)^2 \ln(3e) > 9e^2 \ln(3e) > 4e^2$, 不符题意. 于是考虑 $a > 0$ 的情况. 由题意, 首先有 $f(3e) = (3e - a)^2 \ln(3e) \leq 4e^2$, 解得 $3e - \frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}} \leq a \leq 3e + \frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}}$.

而 $f'(x) = (x - a) \left(2\ln x + 1 - \frac{a}{x} \right)$, 令 $h(x) = 2\ln x + 1 - \frac{a}{x}$, 则 $h(1) = 1 - a < 0$, $h(a) = 2\ln a > 0$, 而 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点, 记此零点为 x_0 , $1 < x_0 < a$, 于是 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递增, 在 (x_0, a) 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 而 $h(3e) = 2\ln(3e) + 1 - \frac{a}{3e} < 2\ln(3e) + 1 < 3e$, 所以 $x_0 < 3e$, $f(x)$ 在 $(1, 3e]$ 上的最大值为 $\max\{f(x_0), f(3e)\}$.

对于 $f(3e) \leq 4e^2$, 解得 $3e - \frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}} \leq a \leq 3e + \frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}}$, 下求解 $f(x_0) \leq 3e$, 已知 x_0 满足 $2x_0 \ln x_0 + x_0 = a$, 于是 $f(x_0) = (x_0 - a)^2 \ln x_0 = 4x_0^2 (\ln x_0)^3$, 而函数 $x^2 \ln^3 x$ 在 $[1, +\infty)$ 内单调递增, 于是解 $f(x_0) \leq 4e^2$ 得到 $1 < x_0 \leq e$, 故 $a = 2x_0 \ln x_0 + x_0 \in (1, 3e]$.

综上所述, a 的取值范围是 $3e - \frac{2e}{\sqrt{\ln(3e)}} \leq a \leq 3e$.

新答案 (来源: 341-360 必要性探路同构与拟合.md):

(1)

$$f'(x) = 2(x - a) \ln x + \frac{(x - a)^2}{x} = (x - a) \left(2\ln x - \frac{a}{x} + 1 \right).$$

依题意 $f'(e) = 0$, 即 $(e - a) \left(3 - \frac{a}{e} \right) = 0$, 解得 $a = e$ 或 $a = 3e$.

经检验, $a = e, a = 3e$ 均满足题意, 因此 $a = e$ 或 $a = 3e$.

- (2) 问首先可以看成是一个端点效应题目, 因此 $f(3e) \leq 4e^2$, 这样可以初步得到 a 的范围, 借助 (1) 问提示, $f(e) \leq 4e^2$, 这样进一步缩小了 a 的范围, 之后论述其充分性即可:

$$f(3e) \leq 4e^2, \quad (3e - a)^2 \ln 3e \leq 4e^2,$$

$$\text{解得 } 3e - \frac{2e}{\sqrt{\ln 3e}} \leq a \leq 3e + \frac{2e}{\sqrt{\ln 3e}}.$$

$$f(e) \leq 4e^2, \quad (e - a)^2 \leq 4e^2,$$

解得 $-e \leq a \leq 3e$.

$$\text{于是 } 3e - \frac{2e}{\sqrt{\ln 3e}} \leq a \leq 3e.$$

令 $g(x) = 2\ln x - \frac{a}{x} + 1$, 显然 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(1) = 1 - a < 0$, $g(a) = 2\ln a > 0$, 因此 $g(x)$ 在 $(1, a)$ 上有唯一零点 x_0 , 且 $0 < x < x_0$ 时, $g(x) < 0$; $x > x_0$ 时, $g(x) > 0$, 对 $f'(x), f(x)$ 列表如下:

x	$(0, x_0)$	x_0	(x_0, a)	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由表可知, $f(x_0) \leq 4e^2$, $f(3e) \leq 4e^2$ 时满足题意, $f(3e) \leq 4e^2$ 已论证, 只需考虑 $f(x_0) \leq 4e^2$.

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow a = 2x_0 \ln x_0 + x_0, \quad f(x_0) = 4x_0^2 \ln^3 x_0.$$

$2x \ln x + x$ 在 $(1, +\infty)$ 上随 x 增大而增大, $a = 2x_0 \ln x_0 + x_0 \leq 3e$, $x_0 > 1 \Rightarrow 1 < x_0 \leq e$.

又 $4x^2 \ln^3 x$ 在 $(1, +\infty)$ 上随 x 增大而增大, 因此 $f(x_0) \leq 4e^2$.

综上, $3e - \frac{2e}{\sqrt{\ln 3e}} \leq a \leq 3e$.

10.

11.

12.

13.

14.

15. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, +\infty)$ 。

$$f'(x) = \frac{2 \ln(1+x)}{1+x} - \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x) \ln(1+x) - x^2 - 2x}{(1+x)^2}.$$

设 $g(x) = 2(1+x) \ln(1+x) - x^2 - 2x$, 则 $g'(x) = 2 \ln(1+x) - 2x$.

$$\text{令 } h(x) = 2 \ln(1+x) - 2x, \text{ 则 } h'(x) = \frac{2}{1+x} - 2 = \frac{-2x}{1+x}.$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为增函数,

当 $x > 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数。

所以 $h(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值, 而 $h(0)=0$, 所以 $g'(x) < 0 (x \neq 0)$, 函数 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为减函数。

于是当 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $g(x) < g(0) = 0$ 。

所以, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为增函数,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数。

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$ 。

不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e$ 等价于不等式 $(n+\alpha) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$ 。

由 $1 + \frac{1}{n} > 1$ 知, $\alpha \leq \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n$ 。

设 $G(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, 则

$$G'(x) = -\frac{1}{(1+x) \ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x) \ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x) \ln^2(1+x)}.$$

由 (1) 知, $\ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x} \leq 0$, 即 $(1+x) \ln^2(1+x) - x^2 \leq 0$ 。

所以 $G'(x) < 0$, $x \in (0, 1]$, 于是 $G(x)$ 在 $(0, 1]$ 上为减函数。

故函数 $G(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最小值为 $G(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$ 。

所以 α 的最大值为 $\frac{1}{\ln 2} - 1$ 。

【解题思路】解第(1)问时, 要求函数 $f(x)$ 的单调区间, 即要确定导函数 $y = f'(x)$ 的符号。如果 $y = f'(x)$ 的符号不能直接判定, 就取不能直接判定符号的部分构造新的函数, 再利用导数的相关知识解决问题。

具体来说, 首先求出 $f'(x) = \frac{2(1+x)\ln(1+x) - x^2 - 2x}{(1+x)^2}$, 然后构造新函数, 即 $g(x) = 2(1+x)\ln(1+x) - x^2 - 2x$, 则 $h(x) = g'(x) = 2\ln(1+x) - 2x$ 。再分区间 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ 判断 $h(x)$ 的单调性, 从而确定函数 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为减函数。最后, 分区间 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ 说明 $f'(x)$ 的符号, 求出函数 $f(x)$ 的单调区间。

解第(2)问时, 由对数函数 $y = \ln x$ 的性质可知, 所证不等式等价于不等式 $\alpha \leq \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$,

再将问题转化为求函数 $G(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值。由(1)知, 函数 $G(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上为减函数, 从而得到 $G(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值, 亦即 α 的最大值为 $G(1)$ 。

【实测数据】本题难度为 0.078, 区分度为 0.589。

分段得分 (单位: 分) 人数百分比:

	0 ~ 2	3 ~ 4	5 ~ 6	7 ~ 8	9 ~ 10	11 ~ 13
	88.7%	7.6%	2.2%	1.2%	0.2%	0.1%

【易错警示】考生解答本题的主要问题有:

(1) 相关基础知识不熟练。

不会求函数的定义域。如将 $f(x)$ 的定义域错写为 $(-\infty, +\infty)$ 。

直接对数列求导数, 如: 由 $f(n) = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n (n \in \mathbb{N}^*)$, 得 $f'(n) = -\frac{1}{(1+n)\ln^2(1+n)} + \frac{1}{n^2}$ 。

(2) 计算能力较差。

如出现下列错误:

$$f'(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} - \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} = \frac{2(x+1)[\ln(1+x)-x]}{(1+x)^2}。$$

$$(n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1 \Rightarrow 2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n。$$

(3) 思维不严密。有些考生直接引用既不是定理、定义、公理而又未加证明的相关结论。

16.

17. 设 $g(x) = f(x) - \sin 2x$, 对 $g(x)$ 求导得到

$$g'(x) = a - \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} - 2\cos 2x = a - \frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} - 2(2\cos^2 x - 1)。$$

令 $h(t) = a - \frac{3-2t}{t^2} - 4t + 2$, 其中 $t \in (0, 1)$ 。则 $g'(x) = h(\cos^2 x)$ 。可知 $h'(t) = -4 - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t^3} = -\frac{6-2t-4t^3}{t^3}$, 在 $(0, 1)$ 上取正值, 于是 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增。因此, $h(t) < h(1) = a - 3$ 。

(i) 若 $a-3 \leq 0$ 即 $a \leq 3$, 则 $g'(x) = h(\cos^2 x) < a-3 \leq 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 故 $g(x) < g(0) = 0$, 即 $f(x) < \sin 2x$, 符合题意.

(ii) 若 $a > 3$, 则 $h(1) = a-3 > 0$, 而

$$h(t) = a - \frac{3-2t}{t^2} - 4t + 2 < a - \frac{1}{t^2} + 2 = \varphi(t)$$

于是 $h\left(\frac{1}{\sqrt{a+2}}\right) < \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{a+2}}\right) = 0$, 所以存在 $t_0 \in \left[\frac{1}{\sqrt{a+2}}, 1\right]$ 使得 $h(t_0) = 0$. 取 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $\cos^2 x_0 = t_0$, 则当 $t \in (t_0, 1)$ 时, $h(t) > 0$, 从而当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) = h(\cos^2 x) < 0$. 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 故 $g(x_0) > g(0) = 0$, 即 $f(x_0) > \sin 2x_0$, 不符合题意.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 3]$.

18.

19.

20. 10. 解法 1: 由题设得, 存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $f(x)_{\min} \geq g(x_0)$ 成立.

因为 $y = 1 - \sin x$, $y = \frac{1}{2 - \cos x}$ 均在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 单调递减.

任取 $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $x_1 < x_2$, 则 $1 - \sin x_1 > 1 - \sin x_2 > 0$,

$$\frac{1}{2 - \cos x_1} > \frac{1}{2 - \cos x_2} > 0,$$

所以 $\frac{1 - \sin x_1}{2 - \cos x_1} > \frac{1 - \sin x_2}{2 - \cos x_2}$, 即 $\frac{\sin x_1 - 1}{\cos x_1 - 2} > \frac{\sin x_2 - 1}{\cos x_2 - 2}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 单调递减, 所以 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $f(x)_{\min} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$.

所以存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $g(x_0) = \frac{a \cos x_0 + 2}{\sin x_0 + 1} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$.

$$g(x_0) = \frac{a \left(\cos^2 \frac{x_0}{2} - \sin^2 \frac{x_0}{2} \right) + 2 \left(\sin^2 \frac{x_0}{2} + \cos^2 \frac{x_0}{2} \right)}{2 \sin \frac{x_0}{2} \cos \frac{x_0}{2} + \left(\sin^2 \frac{x_0}{2} + \cos^2 \frac{x_0}{2} \right)} = \frac{(2-a) \tan^2 \frac{x_0}{2} + a + 2}{2 \tan \frac{x_0}{2} + \tan^2 \frac{x_0}{2} + 1}$$

令 $t = \tan \frac{x_0}{2}$, $t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,

$$\text{则 } g(x_0) = \frac{(2-a)t^2 + a + 2}{t^2 + 2t + 1} = \frac{4}{(t+1)^2} + 2(a-2) \cdot \frac{1}{t+1} + 2 - a.$$

令 $m = \frac{1}{t+1}$, $m \in \left[\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right]$, 则 $g(x_0) = h(m) = 4m^2 + 2(a-2)m + 2 - a$.

当 $\frac{2-a}{4} < \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, 即 $a > 2\sqrt{3} - 4$ 时, $h(m)_{\min} = 8 - 4\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})a \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$, 解得 $a \leq -\frac{11}{3}$, 这与 $a > 2\sqrt{3} - 4$ 矛盾;

当 $\frac{2-a}{4} > \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, 即 $a < -4 - 2\sqrt{3}$ 时, $h(m)_{\min} = 8 + 4\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})a \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$, 解得 $a \leq \frac{-5 - 4\sqrt{3}}{3}$, 所以 $a < -4 - 2\sqrt{3}$;

当 $-4-2\sqrt{3} \leq a \leq -4+2\sqrt{3}$ 时, $h(m)_{\min} = 1 - \frac{a^2}{4} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, 解得 $a \leq -\frac{2}{3}\sqrt{3+3\sqrt{3}}$, 所以 $-4-2\sqrt{3} \leq a \leq -\frac{2}{3}\sqrt{3+3\sqrt{3}}$. 综上, $a \leq -\frac{2}{3}\sqrt{3+3\sqrt{3}}$.

解法 2: 因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos x > 0$, 所以 $g(x) = \frac{a \cos x + 2}{\sin x + 1} = \frac{a + 2\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}}$,

设 $t = \tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}$, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $t = \tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}$ 为增函数, $t \in [1, 2+\sqrt{3}]$;

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ 时, $t = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x} - \tan x}$ 为增函数, $t \in [2-\sqrt{3}, 1]$;

所以 $t \in [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$. 由 $t = \tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}$, 得 $\tan x = \frac{t^2-1}{2t}$.

设 $m = \frac{1}{t}$, $h(m) = m^2 + am + 1$, $m \in [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$.

当 $-\frac{a}{2} \leq 2-\sqrt{3}$, 即 $a \geq -4+2\sqrt{3}$ 时, $h(m)$ 在 $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$ 单调递增.

所以 $h(m)_{\min} = h(2-\sqrt{3}) = (2-\sqrt{3})^2 + a(2-\sqrt{3}) + 1 \leq \frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

解得 $a \leq -\frac{11}{3}$ 与 $a \geq -4+2\sqrt{3}$ 矛盾.

当 $-\frac{a}{2} \geq 2+\sqrt{3}$, 即 $a \leq -4-2\sqrt{3}$ 时, $h(m)$ 在 $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$ 单调递减.

所以 $h(m)_{\min} = h(2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^2 + a(2+\sqrt{3}) + 1 \leq \frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

解得 $a \leq \frac{-5-4\sqrt{3}}{3}$, 所以 $a \leq -4-2\sqrt{3}$.

当 $-4-2\sqrt{3} \leq a \leq -4+2\sqrt{3}$ 时, $h(m)_{\min} = h\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + a\left(-\frac{a}{2}\right) + 1 = \frac{4-a^2}{4} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

解得 $a \leq -\frac{2}{3}\sqrt{3+3\sqrt{3}}$, 所以 $-4-2\sqrt{3} \leq a \leq -\frac{2}{3}\sqrt{3+3\sqrt{3}}$. 综上 $a \leq -\frac{2}{3}\sqrt{3+3\sqrt{3}}$.

解法 3: 记函数 $p(x) = 1 - \sin x$, $q(x) = 2 - \cos x$, 则在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上, $p(x)$ 单调递减且恒正, $q(x)$ 单调递增且恒正, 于是 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 单调递减, 因此 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最小值 $m = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{3} \in (0, 0.1)$.

故对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, 存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, 都有 $f(x) \geq g(x_0)$ 成立转化为, 存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $m \geq g(x_0)$,

即 $\frac{a \cos x_0 + 2}{\sin x_0 + 1} \leq m$, 亦即 $a \cos x_0 - m \sin x_0 \leq m - 2$.

设点 $A(a, -m)$, $P(\cos x, \sin x) \left(x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]\right)$, 则存在点 $P_0(\cos x_0, \sin x_0)$, 使得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \leq m - 2$.

因 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OP}| = -|\overrightarrow{OA}| = -\sqrt{a^2 + m^2}$, 故 $-\sqrt{a^2 + m^2} \leq m - 2$, 解得 $a \leq -2\sqrt{1-m}$ 或 $a \geq 2\sqrt{1-m}$.

当 $a \leq -2\sqrt{1-m} \left(\leq \frac{\sqrt{3}}{3}m \right)$ 时, $\overrightarrow{OP_0}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 反向共线时, 符合题意;

当 $a \geq 2\sqrt{1-m} (>1)$ 时, 对任意点 P , 都有 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} > 0$, 不合题意. 所以 $a \leq -2\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

解法 4: 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, 设 $f(x)$ 的最小值为 m , 则有 $\frac{a \cos x_0 + 2}{\sin x_0 + 1} \leq m$,

即当 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $a \leq \frac{m \sin x_0 + m - 2}{\cos x_0}$, 令 $h(x) = \frac{m \sin x + m - 2}{\cos x}$, 则 $h'(x) = \frac{m + (m-2) \sin x}{\cos^2 x}$,

由 $h'(x_i) = 0$ 解得 $\sin x_1 = \frac{m}{2-m}$, 所以当 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $h(x_0)_{\max} = \max \left\{ h\left(-\frac{\pi}{3}\right), h(x_1), h\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\}$, 得

$$h(x)_{\max} = h(x_1) = -2\sqrt{1-m}$$

因为 $m = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, 所以 $a \leq -2\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

解法 5: 如图, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, 设 $f(x)$ 的最小值为 m , 则有

$$\frac{a \cos x_0 + 2}{\sin x_0 + 1} \leq m,$$

即当 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $a \leq \frac{m \sin x_0 + m - 2}{\cos x_0}$. 设 $k = \frac{m \sin x + m - 2}{\cos x}$, 令 $\sin x = s$, $\cos x = t$,

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $\frac{k}{m} = \frac{s - \frac{2-m}{m}}{t-0}$, 通过数形结合可得

$$\frac{k}{m} \leq \frac{2\sqrt{1-m}}{m},$$

因为 $m = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$, 所以 $k_{\max} = -2\sqrt{1-m}$, 所以 $a \leq -2\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

21.

22. 12. (1) 思路 1: $f'(x) = 5(\sin 5x - \sin x)$. 当 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 时, $x < 5x < \pi - x$, 故 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增; 当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\pi}{2} < \pi - x < 5x < \frac{3}{2}\pi$, 故 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 单调递减.

因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$.

思路 2: 由于

$$\begin{aligned} \cos 5x &= \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x \\ &= \cos 2x (\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) - \sin 2x (\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x) \\ &= (2\cos^2 x - 1)^2 \cos x - 2(2\cos^2 x - 1) \sin^2 x \sin x - \cos x \sin^2 2x \\ &= (2\cos^2 x - 1)^2 \cos x - 4\cos x (2\cos^2 x - 1)(1 - \cos^2 x) - 4\cos^3 x (1 - \cos^2 x) \\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x. \end{aligned}$$

则 $f(x) = -16\cos^5 x + 20\cos^3 x$, 设 $t = \cos x$, $g(t) = -16t^5 + 20t^3$, 则当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $t \in$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right].$$

而 $g'(t) = -80t^4 + 60t^2 = 80t^2 \left(\frac{3}{4} - t^2 \right)$, 故 $g(t)$ 在区间 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 单调递增, 在区间 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$ 单调递减, 因此 $g(t)$ 在区间 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$ 上的最大值为 $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$, 即 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$.

(2) 思路 1: 因为余弦函数以 2π 为周期, 所以不妨设 $a \in [0, 2\pi)$.

若 $0 \leq a \leq \pi - \theta$, 则取 $y = a + \theta$, 有 $\cos y = \cos(a + \theta) \leq \cos \theta$;

若 $\pi - \theta < a < \pi + \theta$, 则取 $y = \pi$, 有 $\cos y = -1 < \cos \theta$;

若 $\pi + \theta \leq a < 2\pi$, 则取 $y = a - \theta$, 有 $\cos y = \cos(a - \theta) < \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$.

综上, 给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$.

思路 2: 因为余弦函数以 2π 为周期, 所以不妨设 $a \in (-\pi, \pi]$.

如果对实数 a , 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$, 那么对 $a' = -a$, 可取 $y' = -y$, 这时 $y' \in [-a - \theta, -a + \theta]$ 且 $\cos y' = \cos y \leq \cos \theta$. 因此只需考虑 $a \in [0, \pi]$ 的情况.

若 $0 \leq a \leq \pi - \theta$, 则取 $y = a + \theta$, 有 $\cos y = \cos(a + \theta) \leq \cos \theta$;

若 $\pi - \theta < a \leq \pi$, 则取 $y = \pi$, 有 $\cos y = -1 < \cos \theta$.

综上, 给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$.

思路 3: 当 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 时, 点 $(\cos y, \sin y)$ 的轨迹是平面直角坐标系中单位圆上一段长度为 2θ 的弧 Γ_1 , 而单位圆上横坐标小于等于 $\cos \theta$ 的部分是一段长度为 $2\pi - 2\theta$ 的弧 Γ_2 . 由于 Γ_1 与 Γ_2 长度的总和等于单位圆的周长, 且两者的端点都可以取到 (即都是闭的), 所以两段弧的交集非空, 即给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$.

思路 4: 因为余弦函数以 2π 为周期, 所以不妨设 $a \in (-\pi, \pi]$.

注意 $\cos \theta - \cos y = 2 \sin \frac{y + \theta}{2} \sin \frac{y - \theta}{2}$. 使用反证法, 假设结论不成立, 则对任意 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 均有 $\sin \frac{y + \theta}{2} \sin \frac{y - \theta}{2} < 0$, 这蕴含着 $\sin \frac{y + \theta}{2}$ 与 $\sin \frac{y - \theta}{2}$ 均不能取到 0.

由于当 $y = a$ 时, $-\pi < \frac{a - \theta}{2} < \frac{a + \theta}{2} < \pi$, 且 $\sin \frac{a + \theta}{2} \sin \frac{a - \theta}{2} < 0$, 故必有 $-\pi < \frac{a - \theta}{2} < 0$, $0 < \frac{a + \theta}{2} < \pi$, 结合正弦函数的连续性 & $\sin(-\pi) = \sin 0 = \sin \pi = 0$ 知, 当 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 时, 恒有 $-\pi < \frac{y - \theta}{2} < 0$, $0 < \frac{y + \theta}{2} < \pi$. 因此 $\frac{(a + \theta) - \theta}{2} < 0 < \frac{(a - \theta) + \theta}{2}$, 矛盾! 因此假设不成立, 即给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$.

思路 5: 因为余弦函数以 2π 为周期, 所以不妨设 $a \in [0, 2\pi)$.

() 若 $\theta \in [a - \theta, a + \theta]$, 即 $0 \leq a \leq 2\theta$, 则存在 $y = \theta \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y = \cos \theta$.

() 若 $2\theta < a < 2\pi$, 则 $2\pi - \theta > a - \theta$.

若 $2\pi - \theta \leq a + \theta$, 即 $a \geq 2\pi - 2\theta$, 取 $y = 2\pi - \theta$, 此时 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 且 $\cos y = \cos \theta$;

若 $2\theta < a \leq 2\pi - 2\theta$, 由 $\theta \in (0, \pi)$ 及 $2\theta < 2\pi - 2\theta$ 得 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta > 0$.

(反证法) 若对任意 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, $\cos y > \cos \theta$, 则

$\cos(a-\theta) > \cos\theta$, 即 $\cos a \cos\theta + \sin a \sin\theta > \cos\theta$.

$\cos(a+\theta) > \cos\theta$, 即 $\cos a \cos\theta - \sin a \sin\theta > \cos\theta$.

将两个不等式相加, 得 $\cos a \cos\theta > \cos\theta$, 即 $(\cos a - 1) \cos\theta > 0$, 得 $\cos a - 1 > 0$, 矛盾!

因此存在 $y \in [a-\theta, a+\theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos\theta$.

综合, 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in [a-\theta, a+\theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos\theta$.

(3) 思路 1: 由 (1) 知当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时 $f(x) \leq 3\sqrt{3}$. 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 时, $f(x) < 5 \cos \frac{\pi}{4} - (-1) < 3\sqrt{3}$.

又 $f(x)$ 是周期为 2π 的偶函数, 故 $f(x) \leq 3\sqrt{3}$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立. 所以当 $b \geq 3\sqrt{3}$ 时, 存在 $\varphi = 0$ 使得 $5 \cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立.

当 $b < 3\sqrt{3}$ 时, 令 $\theta = \frac{5\pi}{6}$, 由 (2) 知对任意 φ , 存在 $y \in \left[\varphi - \frac{5\pi}{6}, \varphi + \frac{5\pi}{6}\right]$ 使得

$$\cos y \leq \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

令 $x = \frac{y - \varphi}{5}$, 则 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, 故

$$5 \cos x - \cos(5x + \varphi) = 5 \cos x - \cos y \geq 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3} > b.$$

因此 $b < 3\sqrt{3}$ 时均不符合题意.

综上, b 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

思路 2: $f'(x) = 5(\sin 5x - \sin x) = 10 \sin 2x \cos 3x$.

当 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 时, $\sin 2x > 0, \cos 3x > 0$, 故 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增; 当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin 2x > 0, \cos 3x < 0$, 故 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减; 当 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$ 时, $\sin 2x < 0, \cos 3x > 0$, 故 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 单调递减; 当 $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$ 时, $\sin 2x < 0, \cos 3x < 0$, 故 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$ 单调递增. 因此 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $f(\pi)$ 中较大的一个. 因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$, $f(\pi) = -4$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值为 $3\sqrt{3}$. 又 $f(x)$ 是周期为 2π 的偶函数, 故 $f(x) \leq 3\sqrt{3}$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立. 以下同思路 1.

思路 3: 同第 (1) 问的思路 2, 设 $t = \cos x$, 则 $g(t) = -16t^5 + 20t^3$, 且当 $x \in \mathbb{R}$ 时 $t \in [-1, 1]$.

由于 $g'(t) = -80t^4 + 60t^2 = 80t^2\left(\frac{3}{4} - t^2\right)$, 所以 $g(t)$ 在区间 $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 单调递减, 在区间 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 单调递增 (在此区间上只有 $t = 0$ 时 $g'(t) = 0$), 在区间 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 单调递减.

因此 $g(t)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为 $g(-1)$ 与 $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中较大的一个. 因为 $g(-1) = -4$,

$g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$, 所以 $g(t)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为 $3\sqrt{3}$. 以下同思路 1.

思路 4: 同思路 1 可知当 $b \geq 3\sqrt{3}$ 时, 存在 $\varphi = 0$ 使得 $5 \cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立.

下面证明当 $b < 3\sqrt{3}$ 时均不符合题意, 即证明对任意 $\varphi \in \mathbb{R}$, 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \geq 3\sqrt{3}$. 由于余弦函数以 2π 为周期, 所以不妨设 $\varphi \in (-\pi, \pi]$. 由于 $5\cos x - \cos(5x + \varphi)$ 的图象与 $5\cos x - \cos(5x - \varphi)$ 的图象关于 y 轴对称, 若上述结论对 φ 成立, 则它对 $-\varphi$ 也成立, 由此可设 $\varphi \in [0, \pi]$.

令 $x = \frac{\pi - \varphi}{6}$, 则 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) = 5\cos x - \cos(\pi - x) = 6\cos x \geq 6\cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$,

故对任意 $\varphi \in \mathbb{R}$, 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \geq 3\sqrt{3}$.

综上, b 的最小值是 $3\sqrt{3}$.

注: 当 $\varphi \in [0, \pi)$ 时, $h(x) = 5\cos x - \cos(5x + \varphi)$ 的导数为 $h'(x) = 5(\sin(5x + \varphi) - \sin x)$, 由此可知 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的第一个零点就是 $\frac{\pi - \varphi}{6}$, 且 $h(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi - \varphi}{6})$ 单调递增, 这也是选择 $x = \frac{\pi - \varphi}{6}$ 的原因. 另外 $\varphi = \pi$ 时, $h(0) = 6 > 3\sqrt{3}$.

思路 5: 同思路 1 可知当 $b \geq 3\sqrt{3}$ 时, 存在 $\varphi = 0$ 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立.

下面证明当 $b < 3\sqrt{3}$ 时均不符合题意, 即证明对任意 $\varphi \in \mathbb{R}$, 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \geq 3\sqrt{3}$. 同思路 4 可设 $\varphi \in [0, \pi]$.

当 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 时, 令 $x = \frac{\pi}{6}$, 则 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \geq 5\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} = 3\sqrt{3}$;

当 $\varphi \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi]$ 时, 令 $x = \frac{\pi}{10}$, 则 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) = 5\cos \frac{\pi}{10} + \sin \varphi > 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

当 $\varphi \in (\frac{2}{3}\pi, \pi]$ 时, 令 $x = 0$, 则 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) = 5 - \cos \varphi > 5 + \frac{1}{2} > 3\sqrt{3}$.

故对任意 $\varphi \in \mathbb{R}$, 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \geq 3\sqrt{3}$.

综上, b 的最小值是 $3\sqrt{3}$.

【解题思路】 (1) 思路 1: 先求出 $f'(x)$ 并考虑它的单调性, 然后求解, 过程同参考答案.

思路 2: 先将 $f(x)$ 化为关于 $\cos x$ 的函数, 再求最大值.

思路 3: 求导后, 用和差化积公式处理 $\sin 5x - \sin x$.

(2) 思路 1: 先使用诱导公式 (或三角函数的周期性) 假设 $a \in [0, 2\pi)$, 再分类讨论, 过程同参考答案.

思路 2: 同时使用余弦函数的周期性和对称性假设 $a \in [0, \pi]$, 再分类讨论.

思路 3: 使用数形结合的方法, 考虑角 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 时, y 的终边与单位圆交点的变化范围来求解.

思路 4: 同思路 1、思路 2, 先假设 a 在某个范围内, 再使用三角函数的和差化积公式, 结合反证法进行证明. 考虑到和差化积之后的式子, 选择一个合适的区间作为 a 的范围会使过程更加简捷.

思路 5: 分平凡的情形与没那么平凡的情形讨论, 给出构造性证明. 平凡的情形是 $\theta \in [a - \theta, a + \theta]$. 不平凡的情形是用三角函数的对称性来找合适的 y , 如注意到 $\cos y = \cos(\pm y + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$ 等等. 这里考虑 $2\pi - \theta$. 下面的解答分三种情况讨论: $0 \leq a \leq 2\theta$, $2\theta < a \leq 2\pi - 2\theta$, $2\pi - 2\theta < a < 2\pi$ 进行讨论.

(3) 没有“新定义”就是最好的新定义. 一个命题中含多个量词, 是当前绝大部分高中学生和部分高中老师都欠缺的部分.

思路 1: 先将第 (1) 问的结论推广到全体实数来证明当 $b \geq 3\sqrt{3}$ 时, 存在 $\varphi = 0$, 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立. 接下来对任意 φ , 使用第 (2) 问的结论可以选择一个 x , 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \geq 3\sqrt{3}$, 从而证明当 $b < 3\sqrt{3}$ 时均不符合题意.

具体而言, 定义命题 $P(b)$ 为: 存在 φ 使得对任意 x , 都有 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$, 题目改写为: 设 $P(b)$ 是真命题, 求 b 的最小值.

首先由 (1) 知命题 $P(3\sqrt{3})$ 成立: 这是因为存在 $\varphi = 0$ 使得对任意 x 都有 $5\cos x - \cos 5x \leq 3\sqrt{3}$.

下面说明 b 的最小值确实是 $3\sqrt{3}$, 只需证明当 $b < 3\sqrt{3}$ 时 $P(b)$ 是假命题,

即证: 当 $b < 3\sqrt{3}$ 时, 对任意 φ , 存在 x 使得 $5\cos x - \cos(5x + \varphi) > b$.

思路 2: 讨论 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的单调性来求出 $f(x)$ 的最大值, 使用和差化积公式会减少一些讨论.

思路 3: 与第 (1) 问的思路 2 相同, 先将 $f(x)$ 化为关于 $\cos x$ 的函数, 再求最大值.

思路 4: 证明当 $b < 3\sqrt{3}$ 时均不符合题意, 先用余弦函数的周期性和对称性将 φ 固定在一个小范围内, 再对函数 $h(x) = 5\cos x - \cos(5x + \varphi)$ 求导来求其最大值来证明结论.

思路 5: 证明当 $b < 3\sqrt{3}$ 时均不符合题意, 先用余弦函数的周期性和对称性将 φ 固定在一个小范围内, 再对 φ 分类讨论来证明结论.

第一章 函数

1.7 含参数, 逻辑变量的函数问题

B 组

1. 【2021 八省联考 22】

已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$, $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$.

- (1) 证明: 当 $x > -\frac{5\pi}{4}$ 时, $f(x) \geq 0$;
- (2) 若 $g(x) \geq 2 + ax$, 求 a .

1. (1) $f'(x) = e^x - \cos x + \sin x$.

() 当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $-\sin x - \cos x \geq 0$, 故 $f(x) \geq 0$.

() 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时, $-\cos x + \sin x < -1$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 而 $f(0) = 0$, 故 $f(x) \geq 0$.

() 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$;

() 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $1 + x > \cos x + \sin x$. 设 $h(x) = e^x - x - 1$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) = e^x - 1 > 0$, 故 $h(x)$ 单调递增, $h(0) = 0$, 所以 $f(x) > h(x) > 0$.

(2) 设 $h(x) = (g(x) - 2 - ax)' = g'(x) - a = e^x + \cos x - \sin x - a$, 则 $h'(x) = f(x)$, 由 (1) 知, 当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, +\infty\right)$ 时, $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{4}, +\infty\right)$ 单调递增, $h(0) = 2 - a$.

() 若 $a > 2$, $h(0) < 0$, $h(\ln a + 1) > 0$, 故存在唯一 $x_0 \in (0, \ln a + 1)$, 使得 $h(x_0) = 0$. 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, $g(x) - 2 - ax$ 单调递减, 而 $g(0) - 2 - a \times 0 = 0$, 故 $g(x_0) - 2 - ax_0 < 0$.

() 若 $0 < a < 2$, $h(0) > 0$, $h(-\pi) < 0$, 故存在唯一 $x_1 \in (-\pi, 0)$, 使得 $h(x_1) = 0$, 当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $h(x) > 0$, $g(x) - 2 - ax$ 单调递增, 而 $g(0) - 2 - a \times 0 = 0$, 故 $g(x_1) - 2 - ax_1 < 0$;

() 若 $a \leq 0$, $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 - a\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$;

() 若 $a = 2$, $h(x)$ 单调递增, $h(0) = 0$.

当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ 时, $h(x) < 0$, $g(x) - 2 - 2x > 0$;

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $g(x) - 2 - 2x > 0$;

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, $g(0) - 2 - 2 \times 0 = 0$, 故 $g(x) - 2 - 2x > 0$.

综上, $a = 2$.

第一章 函数

1.7 含参数, 逻辑变量的函数问题

B 组

1. 【2026 “神算杯一摸” (B 卷) (网络联考) 18】

- (1) 已知 $a > 0$, 若 $\sin x^a > (\sin x)^a$ 在 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;
(2) 若存在 $a > 1$, 使得 $\sin x^a > (\sin x)^a$ 在 $x \in (0, b)$ 恒成立, 求 b 的取值范围.

2. 【2023 长沙市适应性考试 22】若不等式 $ax \geq e^x + |\ln x|$ 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

1.

2.

第一章 函数

1.7 含参数, 逻辑变量的函数问题