

第一章 函数

1.6 分析函数的基础方法

本节讲分析函数最为基础通用的方法, 学生应做到:

- (1) 正确, 迅速地利用求导与对极限的分析确定函数的走势;
- (2) 熟练地运用分类讨论、换元、因式分解、分段讨论等基本方法.
- (3) 熟练地变形问题与分析对象;

1.6.1 如何求导

在分析函数走势时, 导数一般起判断原函数单调性的作用. 任何工具都不是万能的, 光对函数死求导只能解决一小部分问题, 函数的分析不一定随着求导次数的增加而显得轻松, 甚至是越求越繁. 在求导之间, 我们还应适时穿插等价变形、化简、换元、因式分解、分类讨论、分段讨论(取舍)等基础操作.

我不求你掌握五花八门的技巧, 只希望你能将上述基础的方法思想联系起来并灵活运用.

要分析一个函数, 首先要确定其定义域, 观察其是否具有简单、平凡的特性, 这无需花费多少时间. 对于下述陈述, 即使证实其中一项, 也能给我们省去不少麻烦:

- (1) 函数是否具有显而易见的单调性?
- (2) 函数是否具有对称性或周期性?
- (3) 如果是与零点个数和分布相关的问题, 所研究的函数是否有恒正恒负的区间(可舍去)? 是否具有平凡的零点?

.....

其次, 能否通过对问题的等价变形, 将待研究的函数变为易于求导与后续分析的形式?

我们直观上认为, 如果一个函数混有多项式、指数、对数函数, 处理起来是较为麻烦的, 即使只混有其中两项, 在无法通过因式分解化简, 且单调性也不明朗的前提下, 处理起来也并不轻松, 我们当然希望函数只由其中一项组成, 这一项最好还是多项式函数.

有这样的“经验法则”: “指数找朋友, 对数单身狗.”¹具体指:

指数与多项式 已知 $g(x)$ 是多项式函数, 讨论 $\varphi(x) = g(x) + e^x$ 的零点个数可等价于讨论 $p(x) = \frac{g(x)}{e^x} + 1$ 的零点个数, 后者的导数只含多项式函数.

例题 1.6.1. 已知实数 $1 < a \leq 2$, 函数 $f(x) = e^x - x - a$. 证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点 x_0 , 且 $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq 2\sqrt{a-1}$.

例题 1.6.2. 已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 求 a 的取值范围.

¹所谓“经验法则”并不适用于所有情况.

对数与多项式 已知 $f(x), g(x)$ 是多项式函数且 $g(x) \neq 0$, 其所有的零点均已事先被验证过, 分析 $\varphi(x) = \ln x \cdot g(x) + f(x)$ 等价于分析 $p(x) = \ln x + \frac{f(x)}{g(x)}$ 的零点个数, 后者的导数只含多项式函数.

例题 1.6.3. 已知函数 $f(x) = (1 - ax) \ln(1 + x) - x$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

例题 1.6.4. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.

- (1) 若 $b = 0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;
- (2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;
- (3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.

例题 1.6.5. 已知函数 $f(x) = xe^x - 3x + 1$.

- (1) 当 $x > 0$ 时, $f(x+m) - f(x) > m$, 求 m 的取值范围;
- (2) 当 $x > 0$ 时, $f(x+k) + f(k-x) > 2f(k)$, 求 k 的最小值.

例题 1.6.6. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$, 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 各有一个零点, 求 a 的取值范围.

正文问题答案

例题 1.6.1. 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = e^x - 1$ 。当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 于是 $f(x)$ 单调递增, 而 $f(0) = 1 - a < 0$, $f(2) = e^2 - 2 - a > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点 x_0 。

要证明 $x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$, 即证明 $f(\sqrt{2(a-1)}) \geq 0$, 设 $\sqrt{2(a-1)} = t \in (0, \sqrt{2}]$, 化简后即证明

$$e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 \leq 1, \text{ 即证明 } g(t) = \frac{\frac{1}{2}t^2 + t + 1}{e^t} \leq 1.$$

可知 $g'(t) = -\frac{t^2}{2e^t} < 0$, 于是 $g(t)$ 单调递减, $g(t) < g(0) = 1$, 得证。

再证明 $x_0 \geq \sqrt{a-1}$, 即证明 $f(\sqrt{a-1}) \leq 0$, 设 $\sqrt{a-1} = t \in (0, 1]$, 化简后即证明 $e^t - t^2 - t - 1 \leq 0$, 即证明 $\varphi(t) = \frac{t^2 + t + 1}{e^t} \geq 1$ 。

可知 $\varphi'(t) = \frac{t(1-t)}{e^t}$, 于是 $\varphi(t)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 于是 $\varphi(t) > \varphi(0) = 1$, 得证。

于是 $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$ 。

评: 本题节选自【2020 浙江 22】。

本题第 (3) 问为: 证明 $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$ 。

例题 1.6.2. $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 等价于 $\left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1\right)e^{-x} \leq 1$ 。

设函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1\right)e^{-x}$ ($x \geq 0$), 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1 - \frac{3}{2}x^2 + 2ax - 1\right)e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2}x[x^2 - (2a+3)x + 4a+2]e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2}x(x-2a-1)(x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

(i) 若 $2a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$, 则当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$ 。所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增, 而 $g(0) = 1$, 故当 $x \in (0, 2)$ 时, $g(x) > 1$, 不合题意。

(ii) 若 $0 < 2a+1 < 2$, 即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, 则当 $x \in (0, 2a+1) \cup (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (2a+1, 2)$ 时, $g'(x) > 0$ 。所以 $g(x)$ 在 $(0, 2a+1), (2, +\infty)$ 单调递减, 在 $(2a+1, 2)$ 单调递增。由于 $g(0) = 1$, 所以 $g(x) \leq 1$ 当且仅当 $g(2) = (7-4a)e^{-2} \leq 1$, 即 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$ 。所以当 $\frac{7-e^2}{4} \leq a < \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \leq 1$ 。

(iii) 考虑将 $g(x)$ 写成以 a 为主元的函数 $\varphi(a)$, $\varphi(a)$ 是单调递减函数, 即, 若 $\varphi(a_0) \leq 0$ 对任意 x 成立, 则当 $a \geq a_0$ 时, $\varphi(a) \leq 0$ 对任意 $x \geq 0$ 成立。于是当 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$ 时, $\varphi(a) \leq 0$ 对任意 $x \geq 0$ 成立, 即 $g(x) \leq 1$ 恒成立。

综上, a 的取值范围是 $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty\right)$ 。

方法二: 当 $x=0$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 成立, 此时 $a \in \mathbb{R}$; 当 $x > 0$ 时, 由不等式 $f(x) \geq$

$\frac{1}{2}x^3 + 1$ 成立, 得 $a \geq \frac{\frac{1}{2}x^3 + x + 1 - e^x}{x^2} = g(x)$ 恒成立。

对 $g(x) (x > 0)$ 求导得到

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - x - 2 - (x-2)e^x}{x^3} = \frac{(x-2)\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^x\right)}{x^3}.$$

而 $e^x \geq \frac{1}{2}e^x + x + 1$ 在 $x \geq 0$ 时恒成立, 于是当 $x \in (0, 2)$ 时, $x-2 < 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在

$(0, 2)$ 单调递增; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $x-2 > 0$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递减. 所以 $g(x)_{\max} = g(2) = \frac{7-e^2}{4}$. 所以 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$.

综上, a 的取值范围是 $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty\right)$.

例题 1.6.3. 若 $a > 0$, 则 $f\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} < 0$, 不合题意.

因此 $a \leq 0$, 当 $x \geq 0$ 时, $1-ax > 0$, 从而 $f(x) \geq 0$ 等价于

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1-ax} \geq 0.$$

设 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1-ax}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1-ax)^2} = \frac{(1-ax)^2 - (1+x)}{(1-ax)^2(1+x)} = \frac{x(a^2x - (2a+1))}{(1-ax)^2(1+x)}.$$

若 $a=0$, 则 $g'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减. 于是当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq g(0) = 0$. 不符合题意.

若 $a \neq 0$, (i) 若 $2a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$, 则当 $x > 0$ 时, $a^2x - (2a+1) > 0$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增. 于是当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \geq g(0) = 0$. 符合题意.

(ii) 若 $2a+1 > 0$, 即 $-\frac{1}{2} < a < 0$, 则当 $x \in (0, \frac{2a+1}{a^2})$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{2a+1}{a^2})$ 单调递减. 于是 $g(\frac{2a+1}{a^2}) < g(0) = 0$, 不符合题意.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$.

评: 建议在解决含参数的函数问题时, 优先用通性通法——求导后因式分解, 讨论因式分解后的零点. 官方的参考答案在大多数情况下都在采用这样的做法, 没有理由不去掌握它. 在这个基础打好了之后, 再去考虑某些特殊情况下的便捷做法, 切勿本末倒置. 平时训练时, 优先用真题, 而不是用模拟题去练习.

例题 1.6.4. $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2)$. $f(x) = \ln x - \ln(2-x) + ax + b(x-1)^3$

(1) 当 $b=0$ 时, $f'(x) = \frac{2}{x(2-x)} + a$.

因为 $0 < x(2-x) \leq 1$, 所以 $\frac{2}{x(2-x)} \geq 2$, 等号成立当且仅当 $x=1$. 由题意, $a \geq -\frac{2}{x(2-x)}$, 故 a 的最小值为 -2 .

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域关于 1 对称, 且

$$f(x) + f(2-x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3 + \ln \frac{2-x}{x} + a(2-x) + b(1-x)^3 = 2a$$

所以曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形, 对称中心为点 $(1, a)$.

(3) 令函数 $g(x) = f(x) + 2$, 依题意 $g(x) > 0$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 从而 $g(1) \leq 0$. 若 $g(1) < 0$, 因为 $g\left(\frac{3}{2}\right) > 0$, 所以存在 $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, 使 $g(x_0) = 0$, 矛盾, 从而 $g(1) = 0$, 故 $a = -2$.

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} + 3b(x-1)^2 = (x-1)^2 \left[\frac{2}{x(2-x)} + 3b \right]$$

若 $b < -\frac{2}{3}$, 当 $x \in \left(1, 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3b}}\right)$ 时, $\frac{2}{x(2-x)} + 3b < 0$, 从而 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(1, 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3b}}\right)$

单调递减, 不符题意.

若 $b \geq -\frac{2}{3}$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $\frac{2}{x(2-x)} + 3b \geq 0$. 从而 $f'(x) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x=1$, 故 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 单调递增, 符合题目要求.

因此 b 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

例 1.6.5. (2) 设 $g(x) = f(x+m) - f(x) - m$, 整理得 $g(x) = xe^x(e^m - 1) + m(e^{x+m} - 4)$.

题目条件等价于: 对任意 $x > 0$, 都有 $g(x) > 0$.

思考: 可知 $g(0) = m(e^m - 4)$, $g(0) \geq 0$, 即 $m \leq 0$ 或 $m \geq \ln 4$ 是 $g(x) \geq 0$ 的必要条件. (注意: 这里必须用到连续函数的保号性, 即当 $g(0) < 0$ 时, 一定存在 $x = 0$ 的右邻域 $(0, \delta)$, 在该邻域内函数值为负, 故这一部分只用于辅助分析.)

若 $m \leq 0$, 则 $g(x) = xe^x(e^m - 1) + m(e^{x+m} - 4) \leq m(e^{x+m} - 4)$, 当 $x_0 \in (\ln 4 - m, +\infty)$ 时, $g(x_0) \leq 0$, 不符题意.

若 $0 < m < \ln 4$, 则 $g(0) = m(e^m - 4) < 0$, 而 $g(x) = xe^x(e^m - 1) + m(e^{x+m} - 4) > m(e^{x+m} - 4)$, 对于 x_0 , 当 $x_0 \in (\ln 4 - m, +\infty)$ 时, $g(x_0) > 0$, 于是存在 $x_1 \in (0, x_0)$ 使得 $g(x_1) = 0$, 不合题意.

若 $m \geq \ln 4$, 则当 $x > 0$ 时, $g'(x) = (x+1)e^x(e^m - 1) + me^{x+m} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增. 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = m(e^m - 4) \geq 0$, 符合题意.

综上, m 的取值范围是 $[\ln 4, +\infty)$.

注: 还可考虑换元 $e^x = t \in (1, +\infty)$, 原问题等价于: 对任意的 $t > 1$, $\varphi(t) = (e^m - 1)t \ln t + m(e^m \cdot t - 4) > 0$ 恒成立, 即对任意的 $t > 1$, 函数 $F(t) = (e^m - 1) \ln t + m(e^m - \frac{4}{t}) > 0$ 恒成立. (根据前面提到的经验法则如此变形, 可简化求得的导数.)

(3) 首先,

$$\begin{aligned} & f(x+k) + f(k-x) - 2f(k) \\ &= (x+k)e^{x+k} + (k-x)e^{k-x} - 2ke^k \\ &= e^k[(x+k)e^x + (k-x)e^{-x} - 2k] \\ &= e^k[x(e^x - e^{-x}) + k(e^x + e^{-x} - 2)] \end{aligned}$$

令 $x = \ln t$. 上式经过化简可等价于: 当 $t > 1$ 时, $\ln t + k \cdot \frac{t-1}{t+1} > 0$. 设 $h(x) = \ln x + k \cdot \frac{x-1}{x+1}$,

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} + k \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2(k+1)x + 1}{x(x+1)^2}.$$

二次函数 $u(x) = x^2 + 2(k+1)x + 1$ 的判别式为 $\Delta = 4(k+1)^2 - 4 = 4k(k+2)$.

若 $k < -2$, 则 $\Delta > 0$, $u(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$

且满足 $x_1 x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = -2(k+1) > 0$,

所以 $x_2 > 1$, 当 $x \in (1, x_2)$ 时, $u(x) < 0$, 即 $h'(x) < 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(1, x_2)$ 单调递减, 从而 $h(x_2) < h(1) = 0$, 不合题意.

若 $k = -2$, 则当 $x > 1$ 时 $h'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 从而当 $t > 1$ 时 $h(t) > h(1) = 0$, 符合题意.

综上, k 的最小值是 -2 .

注: 没有讨论 $k > -2$ 的情形, 是因为本题只是让我们求 k 的最小值. 在上面的步骤中, 我们给出了 $k = -2$ 满足题意, 但 $k < -2$ 不满足题意, 意味着找不到比 -2 更小的 k 值满足题意, 这就完成了 k 的最小值是 -2 的论证.

例 1.6.6. 已知 $f(0) = 0$. 若 $a \in [0, +\infty)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点, 不符题意.

若 $a \in (-\infty, 0)$, 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = \frac{e^x + a(1-x^2)}{(x+1)e^x}$.

设 $g(x) = e^x + a(1-x^2)$, 对 $g(x)$ 求导得 $g'(x) = e^x - 2ax$, 可知 $g'(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 的函数值

大于 0, 于是 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。

(i) 若 $a \in [-1, 0)$, 此时 $g(0) = 1 + a \geq 0$, 由于 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 那么当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \geq g(0) \geq 0$, 于是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 那么当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点, 不符题意。

(ii) 若 $a \in (-\infty, -1)$, 可知 $g'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 而 $g'(-1) = 2a + 1/e < 0, g'(0) = 1 > 0$, 由零点存在性定理, $g'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上存在唯一的零点 x_0 且 $g'(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增。

又由于 $g(-1) = e > 0, g(x_0) < g(0) < 0, g(1) > 0$, 于是 $g'(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 上存在唯一的零点 x_1 , 在 $(x_0, +\infty)$ 上存在唯一的零点 x_2 . 于是 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增。 $f(x_1) > f(0) = 0, f(x_2) < f(0) = 0$ 。

下取点 $x_3 \in (-1, x_1)$ 使得 $f(x_3) < 0$ 。由 $\ln(1+x) + \frac{ax}{e^x} < \ln(1+x) - ae < 0$. 取 $x_3 = e^{ae} - 1$

取点 $x_4 \in (x_2, +\infty)$ 使得 $f(x_4) > 0$ 。由 $\ln(1+x) + \frac{ax}{e^x} > \ln(1+x) + \frac{a}{e} > 0$. 取 $x_4 = e^{-\frac{a}{e}} - 1$
故在 $(-1, 0)$ 上存在唯一的 $x_5 \in (x_3, x_1)$ 使得 $f(x_5) = 0$, 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的 $x_6 \in (x_2, x_4)$ 使得 $f(x_6) = 0$ 由此证明了 $a \in (-\infty, -1)$ 满足题意。

综上, $a \in (-\infty, -1)$ 。

第一章 函数

1.6 分析函数的基础方法

习 题

A 组

1. 【2011 陕西理 6 改编】函数 $f(x) = \sqrt{x} - 4\sin x$ 在 $[0, +\infty)$ 内有几个零点? (直接写出结果)
2. 若函数 $f(x) = \frac{|1 + \sqrt{x+1} - ae^x|}{e^x}$ 存在最大值和最小值, 求实数 a 的取值范围.
3. 【2023 天域联考 8】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 求函数 $F(x) = f[f(x)] - \frac{1}{e^3}f(x) - 1$ 的零点个数.
4. 画出下述函数的图象:
(1) $x \ln x, \frac{\ln x}{x}, \frac{x}{\ln x}, xe^x, \frac{e^x}{x}, \frac{x}{e^x}, \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$
5. 【2012 天津 20】已知函数 $f(x) = x - \ln(x+1)$. 若对任意的 $x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 求实数 k 的最小值.
6. 【2017 全国 I 卷文 21】已知函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x$. 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.
7. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = a + x^2 + \ln(a - x^2)$, 讨论 $f(x)$ 的最大值.
8. 【2019 全国 I 卷文 20】已知函数 $f(x) = 2\sin x - x \cos x - x$.
(1) 证明 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点;
(2) 若 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.
9. 已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + x$, 若 $f(x)$ 有正零点, 证明: $f(x)$ 有极小值点, 其位于区间 $[1, +\infty)$.
10. 【2023 新高考 I 卷 19】已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$, 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.
11. 【2017 浙江 20】求函数 $f(x) = (x - \sqrt{2x-1})e^{-x}$ 的值域.
12. 【2019 全国 II 卷文 21】已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$, 证明 $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.
13. 【2017 北京文 20 理 19】求函数 $f(x) = e^x \cos x - x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.
14. 【2020 全国 III 卷理 21】设函数 $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + c$, 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明: $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.
15. 【2021 全国甲卷理 21】已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} - 1 (x > 0)$ 有且仅有两个零点, 求 a 的取值范围.

16. 【2023 北京 20】已知函数 $f(x) = x - x^3 e^{1-x}$, 求 $f'(x)$ 的单调区间与 $f(x)$ 的极值点个数.
17. 【2019 全国 I 卷理 20】已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(x+1)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, 证明:
- (1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;
- (2) $f(x)$ 有且仅有两个零点.
18. 【2017 全国 II 卷文 21】设函数 $f(x) = (1-x^2)e^x$. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq ax+1$, 求 a 的取值范围.
19. 【2006 全国 I 卷 21】已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x} e^{-ax}$.
- (1) 设 $a > 0$, 讨论 $y = f(x)$ 的单调性;
- (2) 若对任意 $x \in (0, 1)$ 恒有 $f(x) > 1$, 求 a 的取值范围.
20. 【2021 新高考 II 卷 22】已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 从 (a), (b) 两组条件中选取一组作为已知条件, 证明: $f(x)$ 恰有一个零点.
- (a). $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b > 2a$ (b). $0 < a < \frac{1}{2}, b \leq 2a$
21. 【2021 天津 20】已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax - xe^x$.
- (1) 证明 $f(x)$ 存在唯一的极值点;
- (2) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a+b$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

1.

2.

3. 7.

4.

5. 当 $k \leq 0$ 时, 取 $x = 1$, 有 $f(1) = 1 - \ln 2 > 0$, 故 $k \leq 0$ 不合题意;当 $k > 0$ 时, 令 $g(x) = f(x) - kx^2$, 即 $g(x) = x - \ln(x+1) - kx^2$, 求导得到

$$g'(x) = \frac{x}{x+1} - 2kx = \frac{-x[2kx - (1-2k)]}{x+1}$$

令 $g'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1-2k}{2k} > -1$.

$k \geq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-2k}{2k} \leq 0$, $g'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 因此 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减. 从而对于任意的 $x \in [0, +\infty)$, 总有 $g(x) \leq g(0) = 0$, 即 $f(x) \leq kx^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立. 故 $k \geq \frac{1}{2}$ 符合题意.

当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-2k}{2k} > 0$, 对于 $x \in \left(0, \frac{1-2k}{2k}\right)$, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1-2k}{2k}\right)$ 内单调递增. 因此取 $x_0 \in \left(0, \frac{1-2k}{2k}\right)$ 时, $g(x_0) > g(0) = 0$, 即 $f(x_0) \leq kx_0^2$ 不成立. 故 $0 < k < \frac{1}{2}$ 不合题意.

综上, k 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

新答案 (来源: 301-320 主元法与已有结论.md):

(1) 问要将命题向 $f(x)$ 的形式靠拢, 因此令 $x = \frac{2}{2i-1}$:

新答案 (来源: 181-200 隐零点与构造函数.md):

(1) $f'(x) = (2e^x + 1)(ae^x - 1)$.

若 $a \leq 0$, $ae^x - 1 < 0$, $f'(x) < 0$;

若 $a > 0$, $x < -\ln a$ 时, $f'(x) < 0$; $x > -\ln a$ 时, $f'(x) > 0$;

综上, $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减; $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 问知, 若 $a \leq 0$, $f(x)$ 至多有一个零点, 不满足题意;

若 $f(-\ln a) \geq 0$, 则 $f(x)$ 至多有 $x = -\ln a$ 一个零点, 不满足题意;

因此 $f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$.

令 $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$, 显然 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(1) = 0$ 因此 $0 < a < 1$.
 $0 < a < 1$:

$x < 0$ 时, $f(x) > (a-2)e^x - x > a-2-x$, 因此 $f(a-2) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(a-2, -\ln a)$ 上存在一个零点;

在找另一个特殊点的时候, 注意观察 $f(x)$ 的形式, 有 e^{2x} , e^x 和 x , 那么相比于将 e^{2x} , e^x 都放缩成 x 多项式的形式, 将 x 放缩成 e^x 的形式更节约计算量:

令 $h(x) = e^x - x$, $h'(x) = e^x - 1$, $x > 0$ 时 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 因此 $x > 0$ 时 $h(x) > h(0) = 1$, 即 $e^x > x + 1 > x$.

因此 $x > 0$ 时,

$$f(x) > ae^{2x} + (a-3)e^x = ae^x \left(e^x + 1 - \frac{3}{a} \right),$$

则 $f\left(\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)\right) > 0$.

又 $\ln\left(\frac{3}{a}-1\right) > \ln\frac{1}{a} = -\ln a$, 因此 $f(x)$ 在 $\left(-\ln a, \ln\left(\frac{3}{a}-1\right)\right)$ 上存在一个零点;

综上, $a \in (0, 1)$.

找特殊点的核心思想如下:

如果我们需要找特殊点 t 使得 $f(t) < 0$, 那么就把 $f(x)$ 放大成 $g(x)$, 只要我们得到 $g(t) = 0$ 或 $g(t) < 0$, 那么就有 $f(t) < 0$;

如果我们需要找特殊点 t 使得 $f(t) > 0$, 那么就把 $f(x)$ 缩小成 $g(x)$, 只要

新答案 (来源: 301-320 主元法与已有结论.md):

(1) $f(1) \leq k$, 因此 $k \geq 1 - \ln 2 > 0$.

2. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2e^{2x} - ae^x - a^2 = (2e^x + a)(e^x - a)$.

(i) 若 $a = 0$, 则 $f(x) = e^{2x}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增. $a = 0$ 满足题意.

(ii) 若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \ln a$. 当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增. 于是当 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(\ln a) = -a^2 \ln a$. 从而当且仅当 $-a^2 \ln a \geq 0$, 即 $a \leq 1$ 时, $f(x) \geq 0$.

(iii) 若 $a < 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \ln\left(-\frac{a}{2}\right)$. 当 $x \in \left(-\infty, \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in \left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right), +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$ 单调递减, 在 $\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right), +\infty\right)$ 单调递增. 于是当 $x = \ln\left(-\frac{a}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right) = a^2 \left[\frac{3}{4} - \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right]$. 从而当且仅当 $a^2 \left[\frac{3}{4} - \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right] \geq 0$, 即 $a \geq -2e^{\frac{3}{4}}$ 时 $f(x) \geq 0$.

综上, a 的取值范围是 $\left[-2e^{\frac{3}{4}}, 1\right]$.

评: 实测数据 (广西) 本题文科平均分 1.1363, 难度 0.0947, 标准差 1.6235, 区分度 0.2351, 满分人数 174, 零分率 50.55%, 阅卷详细数据如下:

地区	平均分	标准差	难度	区分度
河南文	0.71	1.52	0.059	0.57
福建文	1.08	—	0.090	0.18
安徽文	0.8	—	0.067	—
广东文	0.4	—	0.033	—

得分	0	1	2	3	4	5	6
百分比	64.3%	3.19%	25.09%	4.59%	0.8%	0.6%	0.70%
得分	7	8	9	10	11	12	-
百分比	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%	0.2%	-

3. $f(x)$ 的定义域为 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$, 求导得到 $f'(x) = 2x - \frac{2x}{a-x^2} = -\frac{2x(x^2-a+1)}{a-x^2}$.

若 $0 < a \leq 1$, 则 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{a}, 0)$ 内单调递增, 在 $(0, \sqrt{a})$ 内单调递减, 所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = a + \ln a$.

若 $a > 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $-\sqrt{a} < x < -\sqrt{a-1}$ 或 $0 < x < \sqrt{a-1}$;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $-\sqrt{a-1} < x < 0$ 或 $\sqrt{a-1} < x < \sqrt{a}$;

于是 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{a}, -\sqrt{a-1})$ 、 $(0, \sqrt{a-1})$ 内单调递增, 在 $(-\sqrt{a-1}, 0)$ 、 $(\sqrt{a-1}, \sqrt{a})$ 内单调递减, 而 $f(-\sqrt{a-1}) = f(\sqrt{a-1}) = 2a-1$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 $2a-1$;

综上所述: 若 $0 < a \leq 1$, $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = a + \ln a$; 若 $a > 1$, $f(x)$ 的最大值为 $2a-1$.

4. (1) 略。

(2) 方法一: 设 $g(x) = f(x) - ax$, 于是 $g'(x) = \cos x + x \sin x - 1 - a$, 设 $g'(x) = \varphi(x)$, 则 $\varphi'(x) = x \cos x$, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上取正值, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上取负值, 故 $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减。

而 $\varphi(0) = -a, \varphi(\pi) = -2-a$, 下对 a 进行分类讨论。

若 $a > 0$, 则 $\varphi(0) < 0$, 当 $\varphi(\frac{\pi}{2}) > 0$ 时, $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在唯一的零点 x_0 , 于是 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, $g(x_0) < g(0) = 0$, 不符题意; 当 $\varphi(\frac{\pi}{2}) \leq 0$ 时, $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒小于零, 故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, $g(\frac{\pi}{2}) < g(0) = 0$, 不符题意。

若 $-2 < a \leq 0$, 由于 $\varphi(0) > 0, \varphi(2) < 0$, 于是 $\varphi(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一的零点 x_0 , 且 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 (x_0, π) 上单调递减, 故 $g(x_0) > g(0) = 0$, 符合题意。

若 $a \leq -2$, 由于 $\varphi(0), \varphi(\pi) > 0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上恒大于零, 故 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增, $g(\pi) > g(0) = 0$, 符合题意。

综上, $a \in (-\infty, 0]$ 。

方法二: 要使得题设成立, 一定要有 $f(\pi) \geq a\pi$, 解得 $a \leq 0$ 。

当 $a \leq 0$ 时, 由第(1)问, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 在 (x_0, π) 单调递减, 于是 $f(x) \geq \min\{f(0), f(\pi)\} = 0 \geq ax$ 。

评: 方法二先确定了 $a \leq 0$ 这一必要条件, 然后再利用第(1)问的结论证明了该条件也为充分条件, 简化了证明过程。实际上这一必要性非常好确定, 从第(1)问已经得知: 函数 $f(x)$ 先增后减且恒 ≥ 0 , 而 $y = ax$ 是过原点的直线, 当 $a \leq 0$ 时, 直线 $y = ax$ 位于 x 轴下方, 显然满足题意, 而当 $a > 0$ 时, 显然在 $x = \pi$ 处会导出矛盾。方法一则较为繁杂。

5. 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 1$ 。

由 $\Delta = (-2a)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4(a^2 - 3) > 0$, 当 $a^2 > 3$ 时, 方程 $f'(x) = 0$ 有两个根 x_0, x_1 , 且

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}, \quad x_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}.$$

$f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_1)$ 、 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 (x_1, x_0) 上单调递减。

方法一: 由题意, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有零点, 等价于方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 有解, 等价于 $a = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 有解。由基本不等式, $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 等号成立条件是 $x = 1$,

所以 $x + \frac{1}{x}$ 的取值范围为 $[2, +\infty)$, 所以 $a \geq 2$, 于是 $f(x)$ 存在极小值点 $x_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ 。而 $a \geq 2$, 所以 $x_0 \geq \frac{2 + \sqrt{2^2 - 3}}{3} = 1$ 。于是完成了证明。

方法二: $f(x) = 0$ 有根等价于方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 有解。当这个方程有根时, 设两根为 x_1, x_2 (可能相等)。

由韦达定理, $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = 1 > 0$, 所以 x_1, x_2 同号; 又因为 $f(x)$ 有正零点, 所以 x_1, x_2 同为正数, 故 $a = x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} = 2$ 。于是 $f(x)$ 有极小值点 $x_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ 。后同方法一。

方法三: 可知 $f(0) = 0$ 。

若 $a \leq 0$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^3 - ax^2 + x > 0$, 故 $f(x)$ 没有正零点。

若 $0 < a \leq \sqrt{3}$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 1$ 的判别式 $\Delta \leq 0$, 故 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 且由于 $f(x) > f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 没有正的零点。

因此, $a > \sqrt{3}$ 。于是极小值点是 $x_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 3}}{3} \geq 1$ 。

Fiddie 评: 研究一个较为复杂函数的零点, “正常的步骤”是思考能否先简化函数 (方法一、方法二), 本题的函数可转化为求二次函数零点, 接下来就能马上得到 a 的取值范围; 问题迎刃而解。如果能注意到这一点, 证明过程会得到极大的简化。类似的题目有:

【2010 全国 I 卷 20】 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - x + 1$ 。

(1) 若 $xf'(x) \leq x^2 + ax + 1$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $(x-1)f(x) \leq 0$ 。

【2010 课标全国卷 21】 设函数 $f(x) = x(e^{x-1}) - ax^2$ 。

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的取值范围;

(2) 若 $a \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围。

6. $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = ae^x - 1$ 。由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$ 。于是当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$ 。故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增。

当 $a > 0$ 时, 可知当 $x = -\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 于是 $f(x) \geq f(-\ln a) = a^2 + \ln a + 1$ 。从而 $f(x) - \left(2\ln a + \frac{3}{2}\right) \geq a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$ 。

方法一：设 $g(x) = x^2 - \ln x - \frac{1}{2} (x > 0)$ ，则 $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$ 。当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时， $g'(x) < 0$ ；当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时， $g'(x) > 0$ 。所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 单调递增。故当 $x > 0$ 时， $g(x) \geq g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ 。

从而当 $a > 0$ 时， $a^2 - \ln a - \frac{1}{2} > 0$ ，即 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ 。

方法二：当 $a > 0$ 时，

$$a^2 - \ln a - \frac{1}{2} \geq a^2 - (a-1) - \frac{1}{2} = a^2 - a + \frac{1}{2} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0.$$

从而 $f(x) - \left(2\ln a + \frac{3}{2}\right) > 0$ ，即 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ 。

注：要事先证明放缩式 $\ln x \leq x - 1$ 。

评：实测数据：（福建）本题阅卷数据如下：

分组	满分	平均分	难度	区分度
物理组总体	12	4.39	0.37	0.69
历史组总体	12	2.16	0.18	0.43
总体	12	3.91	0.33	0.67

小问得分	0	1	2	3	4	5	6	7
(1)	22%	17%	12%	9%	8%	32%		
(2)	65%	7%	7%	4%	2%	0%	2%	13%

7. 对函数求导得到 $f'(x) = \frac{(1-x)(\sqrt{2x-1}-2)e^{-x}}{\sqrt{2x-1}} \left(x > \frac{1}{2}\right)$ ，由 $f'(x) = 0$ 解得 $x = 1$ 或 $x = \frac{5}{2}$ 。随 x 变化， $f'(x)$ 与 $f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(1/2, 1)$	1	$(1, 5/2)$	$5/2$	$(5/2, +\infty)$
$f'(x)$	小于 0	0	大于 0	0	小于 0
$f(x)$	$1/2e^{-\frac{1}{2}} \searrow$	极小值 0	$\nearrow$	极大值 $\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}}$	$\searrow$

又 $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}-1)^2 e^{-x} \geq 0$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right]$ 。

评：该问题看似非常清楚简单，实际考试出来的情况却千疮百孔。一些学生对复合函数的求导不熟练，不能正确求出导数；一些学生对导函数的整理变形目标不清楚，不会合理地提取公因式为求极值点铺路，得不到 $f'(x) = \frac{(1-x)(\sqrt{2x-1}-2)e^{-x}}{\sqrt{2x-1}} \left(x > \frac{1}{2}\right)$ 的形式，因此无法求出极值点 $x = 1$ 或 $x = \frac{5}{2}$ 。

一些学生没有理解求函数在闭区间和非闭区间上的最大（小）值的差异，误认为一定是 $f_{\max}(x) = \max\left\{f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f\left(\frac{5}{2}\right)\right\} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ ， $f_{\min}(x) = \min\left\{f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f\left(\frac{5}{2}\right)\right\} = f(1)$ ，没有对函数在区间 $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 上的变化进行分析（即没考虑趋于无穷的极限）。

在函数的复习中,要重视利用导数研究函数的性质。首先要理解导函数的意义,要能正确求出一些基本复合函数的导函数,然后掌握利用导函数研究函数性质的基本方法。

8. $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x - \frac{1}{x}$. 因为 $y = \ln x$ 单调递增, $y = \frac{1}{x}$ 单调递减, 所以 $f'(x)$ 单调递增。又 $f'(1) = -1 < 0$, $f'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$, 故存在唯一 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $f'(x_0) = 0$ 。于是当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 因此 $f(x)$ 存在唯一的极值点 x_0 。

由于 $f(x_0) < f(1) = -2$, $f(e^2) = e^2 - 3 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内存在唯一根 $x = \alpha$ 。由 $\alpha > x_0 > 1$ 得 $\frac{1}{\alpha} < 1 < x_0$ 。又 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0$, 故 $\frac{1}{\alpha}$ 是 $f(x) = 0$ 在 $(0, x_0)$ 的唯一根。

综上, $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数。

9. 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$ 。

设 $h(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1$, 则 $h'(x) = -2e^x \sin x$ 。当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 所以对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 有 $h(x) < h(0) = 0$, 即 $f'(x) < 0$ 。于是函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减。因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $f(0) = 1$, 最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ 。

评: 实测数据: 得分情况如下:

题号	满分值	平均值	标准差	得分率	鉴别指数	相关系数
理 19(1)	5	4.57	1.13	0.91	0.25	
文 20(1)	5	3.44	1.92	0.69	0.66	0.71
理 19(2)	8	3.35	3.32	0.42	0.81	
文 20(2)	8	0.97	1.92	0.12	0.32	0.48
理 19	13	7.92	3.83	0.61	0.59	0.75
文 20	13	4.41	3.14	0.34	0.45	0.73

10. 可知 $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}$ 。令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{1}{2}$ 。

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下表:

x	$(-\infty, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$c + 1/4$	$\searrow$	$c - 1/4$	$\nearrow$

因为 $f(1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = c + \frac{1}{4}$, 所以当 $c < -\frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 只有大于 1 的零点。

因为 $f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = c - \frac{1}{4}$, 所以当 $c > \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 只有小于 -1 的零点。

由题设可知 $-\frac{1}{4} \leq c \leq \frac{1}{4}$ 。当 $c = -\frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 只有两个零点 $-\frac{1}{2}$ 和 1。当 $c = \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 只有两个零点 -1 和 $\frac{1}{2}$ 。当 $-\frac{1}{4} < c < \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $x_3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 。

综上, 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 则 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1。

评: 实测数据: (贵州) 本题第 (2) 小问满分 8 分, 平均分 0.418, 难度 0.052。

11. $\frac{x^a}{a^x} = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰好有两个解, 两边同时取对数, 即 $a \ln x - x \ln a = 0$ 恰好有两个解, 也即 $g(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln a}{a}$ 恰好有两个零点。而 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 于是 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $g(x)$ 至多有两个零点。

(i) 若 $\frac{\ln a}{a} < 0$, 即 $0 < a < 1$ 。当 $x \geq 1$ 时, $g(x) \geq -\frac{\ln a}{a} > 0$, 因此 $g(x)$ 只可能在 $(0, 1)$ 上存在零点, 又 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 因此 $g(x)$ 至多有一个零点, 不满足题意;

(ii) 若 $0 < \frac{\ln a}{a} < e$, 即 $a \in (1, e) \cup (e, +\infty)$ 。由于 $g(1) < 0, g(e) = \frac{1}{e} - \frac{\ln a}{a} > 0$, 于是 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上存在唯一一个零点, 也即 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上存在唯一一个零点。

而 $\frac{\ln x}{x} = \frac{2 \ln \sqrt{x}}{x} \leq \frac{2}{e\sqrt{x}}$, 于是取 $\frac{2}{e\sqrt{x_0}} = \frac{\ln a}{a}$, 即 $x_0 = \frac{4a^2}{e^2(\ln a)^2}$, 此时 $f(x_0) \leq 0$, 于是 $g(x)$ 在 $(e, x_0]$ 上存在唯一一个零点, 也即 $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上存在唯一一个零点, 故 $g(x)$ 有两个零点, 满足题意。

(iii) 若 $\frac{\ln a}{a} = e$, 即 $a = e$ 。 $g(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e}$, 由 $g(x)$ 单调性可知 $g(x)$ 仅有一个零点 $x = e$, 不满足题意;

综上, $a \in (1, e) \cup (e, +\infty)$ 。

评: 本题取点时使用了放缩式 $\ln x \leq \frac{x}{e}$, 需预先证明。此外, 画出函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 草图有助于解答此题。

12. (1) 设 $g(x) = f'(x)$, 于是 $g(x) = f'(x) = (x^3 - 3x^2)e^{1-x} + 1$ 。所以 $g'(x) = -x(x^2 - 6x + 6)e^{1-x}$ 。

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 0, x = 3 - \sqrt{3}$ 或 $x = 3 + \sqrt{3}$ 。

$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表:

t	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3 - \sqrt{3})$	$3 - \sqrt{3}$	$(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$	$3 + \sqrt{3}$	$(3 + \sqrt{3}, +\infty)$
$g'(t)$	+	0	-	0	+	-	0
$g(t)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

所以, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间是在 $(-\infty, 0), (3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$; 单调递减区间是 $(0, 3 - \sqrt{3}), (3 + \sqrt{3}, +\infty)$ 。

(2) $f'(x) = x^2(x - 3)e^{1-x} + 1$ 。因为 $f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $f'(-1) = 1 - 4e^2 < 0$, $f'(0) = 1 > 0$, 所以根据函数零点存在定理与 $f'(x)$ 的单调性可知, $f'(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内存在唯一零点 x_1 , 且 x_1 是 $f(x)$ 的极小值点。

因为 $f'(x)$ 在区间 $(0, 3 - \sqrt{3})$ 上单调递减, 且 $f'(0) > 0, f'(3 - \sqrt{3}) < f'(1) = -1 < 0$,

所以 $f'(x)$ 在区间 $(0, 3 - \sqrt{3})$ 内存在唯一零点 x_2 , 且 x_2 是 $f(x)$ 的极大值点。

因为 $f'(x)$ 在 $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ 上单调递增, $f'(3 - \sqrt{3}) < 0, f'(3 + \sqrt{3}) > f'(3) = 1 > 0$, 所以 $f'(x)$ 在区间 $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ 内存在唯一零点 x_3 , 且 x_3 是 $f(x)$ 的极小值点。

当 $x \in (3 + \sqrt{3}, +\infty)$ 时, 因为 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(3 + \sqrt{3}, +\infty)$ 内没有极值点。

综上所述, $f(x)$ 共有 3 个极值点.

评: 相当多的考生在完成第 (2) 问时尝试准确求出极值, 这是不好处理的, 事实上转化为分析极值附近的整点函数值会容易很多.

实测数据: 阅卷数据如下.

题号	满分	平均分	标准差	难度	相关系数	鉴别指数
20(1)	5	3.63	1.61	0.73	0.77	0.60
20(2)	5	1.35	1.72	0.27	0.66	0.62
20(3)	5	0.39	1.02	0.08	0.43	0.22
20	15	5.37	3.56	0.36	0.79	0.48

13. (1) 设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}$, $g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}$. $-\sin x, \frac{1}{(1+x)^2}$ 均在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 于是当 $x \in (-1, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x)$ 单调递减, 而 $g'(0) > 0$, $g'(\frac{\pi}{2}) < 0$, 可得 $g'(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 有唯一零点, 记为 $\alpha (\alpha > 0)$.

则当 $x \in (-1, \alpha)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) < 0$. 所以 $g(x)$ 在 $(-1, \alpha)$ 单调递增, 在 $(\alpha, \frac{\pi}{2})$ 单调递减, 故 $g(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点, 即 $f'(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(i) 当 $x \in (-1, 0]$ 时, 由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递增, 又 $f'(0) = 0$, 所以当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减. 又 $f(0) = 0$, 从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 的唯一零点.

(ii) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 单调递增, 在 $(\alpha, \frac{\pi}{2})$ 单调递减, 而 $f'(\alpha) > f'(0) = 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) < 0$, 所以存在 $\beta \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\beta) = 0$, 且当 $x \in (0, \beta)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\beta, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $(0, \beta)$ 单调递增, 在 $(\beta, \frac{\pi}{2})$ 单调递减.

又 $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \ln(1 + \frac{\pi}{2}) > 0$, 所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 没有零点.

(iii) 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递减. 而 $f(\frac{\pi}{2}) > 0$, $f(\pi) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 有唯一零点.

(iv) 当 $x \in (\pi, +\infty)$ 时, $\ln(x+1) > 1$, 所以 $f(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(\pi, +\infty)$ 没有零点.

综上, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

评: 本题函数由对数与三角函数组成. 当 x 增大到一个临界值后, 由于三角函数部分是有界的, 其函数值必然为负. 第 (1) 问的分析提供了 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 上的信息, 实际上 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上也是单调递减的, 这一部分可以轻松分析. 当 $x > \frac{3\pi}{2}$ 时, 就按前面说的直接判断即可.

此题是非常基础的, 只需对一个确定的函数刻画其走势, 在解答时建议做出原函数与各阶导数的图象以方便分析.

新答案 (来源: 161-180 端点效应与隐零点.md):

(1) $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^x$, 对 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 列表如下:

$|x| \quad (-\infty, -1-\sqrt{2}) \quad -1-\sqrt{2} \quad (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}) \quad -1+\sqrt{2} \quad (-1+\sqrt{2}, +\infty)$
 $|f'(x)| \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad |f(x)| \quad \searrow \quad \text{极小值} \quad \nearrow \quad \text{极大值} \quad \searrow$

由上表可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1-\sqrt{2})$, $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ 上单调递增.

(2) 令 $g(x) = f(x) - ax - 1$, $g'(x) = f'(x) - a = (-x^2 - 2x + 1)e^x - a$.

令 $h(x) = g'(x)$, $h'(x) = (-x^2 - 4x - 1)e^x$.

$x \geq 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $h(0) = 1 - a$.

若 $a \geq 1$, $h(0) \leq 0$, $x > 0$ 时 $h(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $g(x) < g(0) = 0$, 满足题意;

若 $a < 1$, $h(0) > 0$,

$$h(x) = (1 - x^2)e^x - 2xe^x - a,$$

令 $x_0 = \max\{1, |a|\}$,

$$h(x_0) \leq -2x_0e^{x_0} - a < -2|a| - a \leq -|a| \leq 0,$$

$h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上存在唯一零点 $x = t$, 则 $x \in (0, t)$ 时, $h(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, t)$ 上单调递增, $g(t) > g(0) = 0$, 不满足题意.

综上, $a \in [1, +\infty)$.

14. 令 $g(x) = f(x) - ax - 1 = (1 - x^2)e^x - ax - 1$. 则 $g'(x) = (1 - 2x - x^2)e^x - a$.

令 $h(x) = g'(x)$, 于是 $h'(x) = -(1 + 4x + x^2)e^x$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

若 $a \geq 1$, 则当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $h(x) \leq h(0) = 1 - a \leq 0$, 即 $g'(x) \leq 0$, 于是 $g(x) \leq g(0) = 0$, 从而 $f(x) \leq ax + 1$. 满足题意.

若 $a < 1$, 则 $h(0) = 1 - a > 0$. 而当 $x \geq 1$ 时

$$h(x) = (1 - 2x - x^2)e^x - a < -x^2e^x + |a| < -e^x + |a| = \varphi(x)$$

记 $p = \max\{1, \ln |a|\}$, 于是 $f(p) < \varphi(p) = 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, p)$ 上存在唯一零点 x_0 , 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$, 从而 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 所以 $g(x_0) > g(0) = 0$, 即 $f(x_0) > ax_0 + 1$, 不符题意.

综上, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

15. (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 对 $f(x)$ 求导数得 $f'(x) = \frac{ax^2 + 2 - a}{(1 - x)^2} e^{-ax}$.

(i) 当 $a=2$ 时, $f'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^2}e^{-2x}$, $f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 均大于 0, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ 为增函数.

(ii) 当 $0 < a < 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ 为增函数.

(iii) 当 $a > 2$ 时, $0 < \frac{a-2}{a} < 1$. 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = -\sqrt{\frac{a-2}{a}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{a-2}{a}}$. 当 x 变化时, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{a-2}{a}}, \sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{a-2}{a}}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	单调递增	单调递减	单调递增	单调递增

于是 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{a-2}{a}}, 1\right)$, $(1, +\infty)$ 为增函数, $f(x)$ 在 $\left(-\sqrt{\frac{a-2}{a}}, \sqrt{\frac{a-2}{a}}\right)$ 为减函数.

(2) (i) 当 $0 < a \leq 2$ 时, 由 (1) 知: 对任意 $x \in (0, 1)$ 恒有 $f(x) > f(0) = 1$.

(ii) 当 $a > 2$ 时, 取 $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-2}{a}} \in (0, 1)$, 则由 (1) 知 $f(x_0) < f(0) = 1$.

(iii) 当 $a \leq 0$ 时, 对任意 $x \in (0, 1)$, 恒有 $\frac{1+x}{1-x} > 1$ 且 $e^{-ax} \geq 1$, 得 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}e^{-ax} \geq \frac{1+x}{1-x} > 1$.

综上, 当且仅当 $a \in (-\infty, 2]$ 时, 对任意 $x \in (0, 1)$ 恒有 $f(x) > 1$.

16.

17. (1) 证明: 令 $g(x) = f'(x)$, 即 $g(x) = a - (x+1)e^x$.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g(x) > a > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 内没有零点;

当 $x \in [-1, +\infty)$ 时, $g'(x) = -(x+2)e^x < 0$, 从而 $g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 单调递减, 又因为 $g(-1) = a > 0$, $g(a) = a - (a+1)e^a < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-1, a)$ 内有零点 x_0 .

综上, $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一零点. 当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

所以, $f(x)$ 存在唯一的极值点 x_0 .

(2) 设 $h(x) = f(x) - a = ax - xe^x - a$. 由 (1) 可得 $h(x)$ 的最大值为 $h(x_0)$, 其中 x_0 满足 $a = (x_0+1)e^{x_0}$, 且 $x_0 > -1$. 从而

$$h(x_0) = (x_0^2 + x_0)e^{x_0} - x_0e^{x_0} - (x_0+1)e^{x_0} = (x_0^2 - x_0 - 1)e^{x_0}$$

设 $u(x) = (x^2 - x - 1)e^x$, $x \in (-1, +\infty)$, 可得 $u'(x) = (x^2 + x - 2)e^x$, 令 $u'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 或 $x = -2$ (舍去).

当 x 变化时, $u'(x)$, $u(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

故 $u(x)$ 的最小值为 $u(1) = -e$ 。

如果存在 a 使得 $f(x) \leq a + b$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 则 $b \geq h(x_0)$ 。又因为 $h(x_0) = u(x_0) \geq -e$, 所以 $b \geq -e$ 。反之, 当 $b \geq -e$ 时, 存在 $a = 2e$, 使得 $h(x)$ 在 $x_0 = 1$ 处取得最大值 $-e$, 从而 $b \geq h(x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立。所以 b 的取值范围是 $[-e, +\infty)$ 。

评: 实测数据: 本题难度为 0.24.

第一章 函数

1.6 分析函数的基础方法

B 组

1. 【2021 浙江 22 节选】

设 a, b 为实数, 且 $a > 1$, 函数 $f(x) = a^x - bx + e^2 (x \in \mathbb{R})$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若对任意 $b > 2e^2$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围;
- (3) 当 $a = e$ 时, 证明: 对任意 $b > e^4$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 满足

$$x_2 > \frac{b \ln b}{2e^2} x_1 + \frac{e^2}{b}.$$

2. 【2022 武汉九调 22】已知函数 $f(x) = \frac{1}{k}(x - k - 3)e^x - x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的极值点个数;
- (2) 当 $f(x)$ 恰有一个极值点 x_0 时, 求实数 k 的值, 使得 $f(x_0)$ 取到最大值.

3. 【2023 全国乙卷理 21】函数 $f(x) = (\frac{1}{x} + a)\ln(1+x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在极值点, 求 a 的取值范围.

4. 已知函数 $f(x) = \sin x - x \cos x - x$, 判断其在 $(-2\pi, 2\pi)$ 上的零点个数.

5. 【2014 四川理 21】已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值;
- (2) 若 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有零点, 求 a 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x) = ae^{-x} + \sin x - x$.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 单调递减, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 证明: 对任意整数 $a, f(x)$ 至多存在一个零点.

7. 【2016 全国 II 卷理 21】

- (1) 讨论函数 $f(x) = \frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性, 并证明当 $x > 0$ 时 $(x-2)e^x + x + 2 > 0$;
- (2) 证明: 当 $a \in [0, 1)$ 时, 函数 $g(x) = \frac{e^x - ax - a}{x^2}$ 有最小值, 设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求函数 $h(a)$ 的值域.

8. 【2017 全国 II 卷理 21】已知函数 $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$, 且 $f(x) \geq 0$. 求 a , 并证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 x_0 满足 $\frac{1}{e^2} < f(x_0) < \frac{1}{4}$.

9. 【2016 江苏 19】已知函数 $f(x) = a^x + b^x (0 < a < 1, b > 1)$, 函数 $g(x) = f(x) - 2$ 有且只有 1 个零点, 求 ab 的值.

10. 【2023 新高考 II 卷 22】

(1) 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$;

(2) 已知函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$, 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

11. 【2018 浙江 22】已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$, 若 $a \leq 3 - 4\ln 2$, 证明: 对于任意 $k > 0$, 直线 $y = kx + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点.

12. 【2015 全国 I 卷 21】已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($x > 0$), 讨论 $h(x)$ 的零点个数.

13. 【2021 武汉五调 22】已知函数 $f(x) = (x - a)^2 + 2\sin x - \frac{7}{4}$, 讨论 $f(x)$ 的零点个数.

14. 已知函数 $f(x) = ae^{-x} + \ln x - 1$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 讨论 $g(x)$ 零点的个数;

(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 的零点, 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < g(x_0)$.

15. 【2015 四川理 21】已知函数 $f(x) = -2(x + a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.

1. (1) 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = a^x \ln a - b$, 当 $x < \log_a \frac{b}{\ln a}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \log_a \frac{b}{\ln a}$ 时, $f'(x) > 0$; 因此 $f(x)$ 单调递减区间为 $(-\infty, \log_a \frac{b}{\ln a})$, 单调递增区间为 $(\log_a \frac{b}{\ln a}, +\infty)$.

$$f(x) = e^{x \ln a} - \frac{b}{\ln a} (x \ln a) + e^2,$$

令 $t = x \ln a$, $k = \frac{b}{\ln a} > 0$, 问题等价于 $g(t) = e^t - kt + e^2$ 有两个零点.

$g'(t) = e^t - k$, $g(t)$ 在 $(-\infty, \ln k)$ 上单调递减, 在 $(\ln k, +\infty)$ 上单调递增.

$t \leq 0$ 时, $g(t) > e^2 > 0$, 因此 $g(t)$ 只可能在 $(0, +\infty)$ 上存在零点.

若 $\ln k \leq 0$ 也即 $k \leq 1$, $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不满足题意;

若 $\ln k > 0$ 也即 $k > 1$, 由于

$$g(0) = 1 + e^2 > 0, \quad g(k) > e^k - k^2 = \left(e^{\frac{k}{2}}\right)^2 - k^2 \geq \left(\frac{e}{2}k\right)^2 - k^2 > 0, \quad 0 < \ln k < k,$$

因此问题等价于 $g(\ln k) < 0$, 即

$$k - k \ln k + e^2 < 0.$$

令 $h(x) = x - x \ln x + e^2$, $h'(x) = -\ln x$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 又 $h(e^2) = 0$,

因此 $k > e^2$, 即 $\ln a < \frac{b}{e^2}$, 而 $\frac{b}{e^2} > 2$, 因此 $a \leq e^2$, 即 $a \in (1, e^2]$.

2.

3. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有极值点等价于 $h(x) = \frac{ax^2 + x}{1+x} - \ln(1+x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有变号零点. 已知 $h(0) = 0$, 对 $h(x)$ 求导得到 $h'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} [ax + (2a-1)]$,

(i) 若 $a \leq 0$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $ax + 2a - 1 < 0$, 即 $h'(x) < 0$, 于是 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, $h(x) < h(0) = 0$, 不符题意;

(ii) $a \geq \frac{1}{2}$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $ax + 2a - 1 > 0$, 即 $h'(x) > 0$, 于是 $h(x)$ 单调递增, $h(x) > h(0) = 0$, 不符题意;

(iii) 若 $0 < a < \frac{1}{2}$, 则 $0 < x < \frac{1}{a} - 2$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减; $x > \frac{1}{a} - 2$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

可知 $h\left(\frac{1}{a} - 2\right) < h(0) = 0$. 又当 $x > 1$ 时, 有

$$h'(x) > \frac{ax^2 + ax}{1+x} - \ln(1+x) = ax - \ln(1+x) > ax - \ln 2x > ax - \frac{2\sqrt{2x}}{e}$$

设 $x_0 = \max\{1, \frac{8}{a^2 e^2}\}$, 于是有 $f(x_0) > 0$, 于是存在 $x_1 \in (\frac{1}{a} - 2, x_0)$ 使得 $h(x_1) = 0$, x_1 是 $h(x)$ 的一个变号零点, 符合题意.

综上, $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

注: 另一种取点方法, 先证明 $\ln(x+1) < \sqrt{x}$, 于是 $h(x) > \frac{ax^2+ax}{1+x} - \sqrt{x} = ax - \sqrt{x}$, 此时 $h\left(\frac{1}{a^2}\right) > 0$. 这是因为对于 $\ln(ax^n+b)$, 一定可以找到正常数 C , 使得 $\ln(ax^n+b) < C\sqrt{x}$ 恒成立.

4.

5. $g(x) = e^x - 2ax - b, g'(x) = e^x - 2a$, 记 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 N , 方便起见以下只考虑区间 $[0, 1]$:

若 $a \leq 0, g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, $N = g(0) = 1 - b$;

若 $0 < a < \frac{e}{2}, 0 < x < \ln 2a$ 时 $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减; $\ln 2a < x < 1$ 时 $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, $N = g(\ln 2a) = 2a - 2a \ln 2a - b$;

若 $a \geq \frac{e}{2}, 0 < x < 1$ 时 $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, $N = g(1) = e - 2a - b$;

综上, $a \leq 0$ 时, $N = 1 - b$; $0 < a < \frac{e}{2}$ 时, $N = 2a - 2a \ln 2a - b$; $a \geq \frac{e}{2}$ 时, $N = e - 2a - b$.

$f(0) = 0, f(1) = 0, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有零点, 因此 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上至少存在 3 个单调区间, 进而 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上至少有 2 个零点.

由 (1) 问可知 $a \leq 0$ 或 $a \geq \frac{e}{2}$ 时 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调, 不满足题意, 因此 $0 < a < \frac{e}{2}$.

$$f(1) = 0 \Rightarrow b = e - 1 - a, g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - a - b = \sqrt{e} - e + 1 < 0.$$

若要 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上存在两个零点, 只需

$$\begin{cases} g(0) = 1 - b = 2 + a - e > 0, \\ g(1) = e - 2a - b = 1 - a > 0, \end{cases}$$

解得 $e - 2 < a < 1$.

当 $e - 2 < a < 1$ 时, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有两个零点 x_1, x_2 , 不妨令 $x_1 < x_2$, 对 $f(x), g(x)$ 列表如下:

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, 1)$
$g(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

由 $f(x_1) > f(0) = 0, f(x_2) < f(1) = 0$ 可知 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 存在零点, 满足题意.

综上, $a \in (e - 2, 1)$.

新答案 (来源: 021-040 简单单调性与简单极值最值.md):

(1)

6.

7. (1) 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = e^x \left[\frac{x-2}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^2} \right] = \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}$. 当 $x \neq -2$ 且 $x \neq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2), (-2, +\infty)$ 上单调递增.

于是当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = -1$, 即 $(x-2)e^x + x + 2 > 0$, 问题得证.

(2) 可知

$$g'(x) = \frac{(e^x - a)x^2 - 2x(e^x - ax - a)}{x^4} = \frac{(x-2)e^x + a(x+2)}{x^3} = \frac{x+2}{x^3} [f(x) + a].$$

令 $\varphi(x) = f(x) + a$, 根据 (1) 结论, $\varphi(x)$ 单调递增, 又 $\varphi(0) = a - 1 < 0, \varphi(2) = a \geq 0$,

因此 $\varphi(x)$ 在 $(0, 2]$ 上存在唯一零点 x_0 , 且在 $(0, x_0)$ 上 $\varphi(x) < 0$, 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $\varphi(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 因此

$$h(a) = g(x_0) = \frac{e^{x_0} - a(x_0 + 1)}{x_0^2} = \frac{e^{x_0} + (x_0 + 1) \frac{x_0 - 2}{x_0 + 2} \cdot e^{x_0}}{x_0^2} = \frac{e^{x_0}}{x_0 + 2}.$$

令 $\phi(x) = \frac{e^x}{x+2}$, 则 $\phi'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$, 于是 $x > 0$ 时 $\phi'(x) > 0$, $\phi(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增, 又 $\phi(0) = \frac{1}{2}, \phi(2) = \frac{e^2}{4}$, 因此 $h(a) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right]$.

新答案 (来源: 161-180 端点效应与隐零点.md):

(1) $f'(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^x$, 对 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 列表如下:

$$\begin{array}{c} |x| \quad (-\infty, -1-\sqrt{2}) \quad -1-\sqrt{2} \quad (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}) \quad -1+\sqrt{2} \quad (-1+\sqrt{2}, +\infty) \\ |f'(x)| \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad |f(x)| \quad \searrow \quad \text{极大值} \quad \nearrow \quad \text{极小值} \quad \searrow \end{array}$$

由上表可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1-\sqrt{2})$, $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ 上单调递增.

(2) 令 $g(x) = f(x) - ax - 1$, $g'(x) = f'(x) - a = (-x^2 - 2x + 1)e^x - a$.

$$\text{令 } h(x) = g'(x), \quad h'(x) = (-x^2 - 4x - 1)e^x.$$

$x \geq 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $h(0) = 1 - a$.

若 $a \geq 1$, $h(0) \leq 0$, $x > 0$ 时 $h(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $g(x) < g(0) = 0$, 满足题意;

若 $a < 1$, $h(0) > 0$,

$$h(x) = (1 - x^2)e^x - 2xe^x - a,$$

$$\text{令 } x_0 = \max\{1, |a|\},$$

$$h(x_0) \leq -2x_0e^{x_0} - a < -2|a| - a \leq -|a| \leq 0,$$

$h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上存在唯一零点 $x = t$, 则 $x \in (0, t)$ 时, $h(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, t)$ 上单调递增, $g(t) > g(0) = 0$, 不满足题意.

综上, $a \in [1, +\infty)$.

8. (1) $f(x) \geq 0$ 等价于 $ax - a - \ln x \geq 0$. 令 $g(x) = ax - a - \ln x$, 则 $g'(x) = a - \frac{1}{x}$ 且 $g(1) = 0$.

若 $a \leq 0$, 则 $g'(x)$ 取负值, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $g(2) < g(1) = 0$, 不满足题意;

若 $a > 0$, 则当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增. 当 $a = 1$ 时, $g(x)$ 最小值为 $g(1) = 0$, 于是 $g(x) \geq 0$, 满足题意; 当 $a > 1$ 时, $g\left(\frac{1}{a}\right) < g(1)$, 不符题意; 当 $0 < a < 1$ 时, $g\left(\frac{1}{a}\right) < g(1)$, 不符题意;

综上, $a = 1$.

(2) 可知 $f(x) = x^2 - x - x \ln x$, $f'(x) = 2x - 2 - \ln x$. 令 $h(x) = f'(x)$, $h'(x) = 2 - \frac{1}{x}$. 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增. 而 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 - 1 < 0$, 又 $h\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{2}{e^2} > 0$, $h(1) = 0$, 因此 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{2}\right)$ 上存在唯一零点 t , 对 $f(x)$, $f'(x)$ 列表如下:

x	$(0, t)$	t	$(t, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由上表可知 $f(x)$ 有唯一极大值点 $x = t$. 问题即证 $\frac{1}{e^2} < f(t) < \frac{1}{4}$, $t \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{2}\right)$. 可知 $f(t) > f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^2} > \frac{1}{e^2}$. 而由于 t 满足 $f'(t) = 0$ 即 $\ln t = 2t - 2$, 于是

$$f(t) = t^2 - t - t \ln t = t^2 - t - t(2t - 2) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{4}$$

问题得证.

9. 对 $g(x)$ 求导得 $g'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b = a^x \left[\left(\frac{b}{a}\right)^x \ln b + \ln a\right]$. 令 $h(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^x \ln b + \ln a$, 则 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 并有唯一零点 $x_0 = \frac{\ln(-\ln a) - \ln \ln b}{\ln b - \ln a}$. 当 $x < x_0$ 时 g 单调递减, 当 $x > x_0$ 时 g 单调递增.

若 $ab = 1$, 则 $x_0 = 0$, 且 $g(0) = 0$, 所以 $g(x)$ 仅有零点 $x = 0$, 满足题意. 若 $ab \neq 1$, 则 $x_0 \neq 0$ 且 $g(x_0) < g(0) = 0$; 取 $x_1 = \max\{x_0 + 1, \log_b 2\}$, $x_2 = \min\{x_0 - 1, \log_a 2\}$, 有 $g(x_1) > 0$, $g(x_2) > 0$, 从而 g 在 (x_2, x_0) 和 (x_0, x_1) 上各有一个零点, 不满足题意.

综上, $ab = 1$.

10. 令 $g(x) = x - \sin x$, $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 故 $g(x)$ 单调递增. 当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 即 $\sin x < x$.

令 $F(x) = x - x^2 - \sin x$. 当 $0 < x < 1$ 时,

$$F'(x) = 1 - \cos x - 2x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2x < 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2x < 0,$$

故 $F(x)$ 单调递减, $F(x) < F(0) = 0$, 即 $x - x^2 < \sin x$.

综上, 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$.

思路 1: (官方答案) 因为 $f(x)$ 是偶函数, 不妨设 $0 < x < 1$, 又因为 $\cos ax = \cos(-ax)$, 不妨设 $a \geq 0$.

$$f'(x) = \frac{2x - a(1 - x^2) \sin ax}{1 - x^2},$$

$x \in (-1, 1)$,

分母 $1-x^2 > 0$, 只需讨论分子 $2x-a(1-x^2)\sin ax$ 的符号. 令 $h(x) = 2x-a(1-x^2)\sin ax$.

【第 (1) 问中的不等式为第 (2) 问做好了准备工作.】

当 $x > 0$ 时, $\sin x < x$, 于是 $h(x) \geq 2x-a^2x(1-x^2) = x(2-a^2+a^2x)$,

当 $0 < x < 1$ 时, $x-x^2 < \sin x$, 于是 $h(x) < 2x-a^2x(1-x^2)(1-ax)$.

【如果找到 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (0, \delta)$ 时, $h(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 单调递增, 从而 $f(x) > f(0)$, 那么 $x=0$ 就不是 $f(x)$ 的极大值点. 要使 $h(x) > 0$, 只需 $x(2-a^2+a^2x^2) > 0$, 又 $a^2x^2 > 0$, 所以只需考虑 $2-a^2$ 的符号, 于是找到了分类讨论的标准 $\sqrt{2}$.】

当 $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ 时, $h(x) \geq x(2-a^2+a^2x^2) > 0$. 当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) > 0$, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 单调递增, 从而 $f(x) > f(0)$, 因此 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点.

当 $a > \sqrt{2}$ 时, $h(x) < 2x-a^2x(1-x^2)(1-ax)$.

【为了找到 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (0, \delta)$ 时, $h(x) < 0$, 只需 $2x-a^2x(1-x^2)(1-ax) < 0$, 即 $(1-x^2)(1-ax) > \frac{2}{a^2}$. 此不等式不容易解, 继续进行不等式放缩: $(1-x^2)(1-ax) > (1-x)(1-ax) > (1-ax)^2$, 只需 $(1-ax)^2 > \frac{2}{a^2}$, 解得 $1-ax > \frac{\sqrt{2}}{a}$, 即 $0 < x < \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}$.】

于是当 $0 < x < \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}$ 时,

$$h(x) < 2x-a^2x(1-x^2)(1-ax) < x[2-a^2(1-ax)^2] < 0,$$

从而 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}\right)$ 单调递减.

又因为 $f(x)$ 是偶函数, 故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

思路 2: (Fiddie 答案) $f(x)$ 定义域为 $(-1, 1)$ 的偶函数, 求导数可得

$$f'(x) = -a \sin(ax) + \frac{2x}{1-x^2} = -a \sin(ax) + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}.$$

并且 $f'(0) = 0$.

若 $0 \leq a \leq \sqrt{2}$, 取 $b = \min\left\{1, \frac{1}{a}\right\}$, 则当 $x \in (0, b)$ 时,

$$f'(x) \geq -a \cdot ax + \frac{2x}{1-x^2} = x\left(-a^2 + \frac{2}{1-x^2}\right) > x(-a^2 + 2) \geq 0.$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, b)$ 上单调递增. 因此 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点.

若 $a > \sqrt{2}$, 则当 $x \in \left(0, \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}\right)$ 时,

$$f'(x) < -a(ax - a^2x^2) + \frac{2x}{1-x^2} = x\left(-a^2(1-ax) + \frac{2}{1-x^2}\right).$$

令 $u(x) = -a^2(1-ax) + \frac{2}{1-x^2}$, $x \in \left(0, \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}\right)$. 则 $u'(x) = a^3 + \frac{4x}{(1-x^2)^2} > 0$.

所以 $u(x)$ 在 $\left(0, \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}\right)$ 上单调递增, 从而

$$\begin{aligned} u(x) &< u\left(\frac{a-\sqrt{2}}{a^2}\right) = -a^2 + a^3 \cdot \frac{a-\sqrt{2}}{a^2} + \frac{2}{1-\frac{(a-\sqrt{2})^2}{a^4}} \\ &= \sqrt{2}a \left(-1 + \frac{\sqrt{2}a^3}{a^4 - (a-\sqrt{2})^2}\right) \\ &= \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}a^3 - a^4 + (a-\sqrt{2})^2}{a^4 - (a-\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{2}a \cdot \frac{(-a^3 + a - \sqrt{2})(a-\sqrt{2})}{a^4 - (a-\sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

令 $v(a) = -a^3 + a - \sqrt{2}$, $a > \sqrt{2}$, 则 $v'(a) = -3a^2 + 1 < -3 \cdot (\sqrt{2})^2 + 1 < 0$, 所以 $v(a)$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递减, 则 $v(a) < v(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} < 0$.

因此, 当 $a > \sqrt{2}$ 时, $u(x) < 0$ 恒成立, 从而 $f'(x) < xu(x) < 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}\right)$ 上单调递减. 由 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{-a-\sqrt{2}}{a^2}\right)$ 上单调递增, 因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

若 $a < 0$, 注意到 $f(x) = \cos(-ax) - \ln(1-x^2)$, 此时可归结为 $a > 0$ 的情形. 由前面的讨论可知 $-a > \sqrt{2}$ 即 $a < -\sqrt{2}$.

综上, a 的取值范围是 $a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

新答案 (来源: 181-200 隐零点与构造函数.md):

(1) $f'(x) = \frac{2xe^{2x} - a}{x}$, 令 $g(x) = 2xe^{2x} - a$, 问题即讨论 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点的个数, 显然 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$a \leq 0$ 时, $x > 0$ 有 $g(x) > g(0) = -a \geq 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点;

$a > 0$ 时, $g(0) - a < 0$, $g\left(\frac{a}{2}\right) = a(e^a - 1) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一个零点.

综上, $a \leq 0$ 时, $f'(x)$ 没有零点; $a > 0$ 时, $f'(x)$ 有一个零点.

(2) 由 (1) 问知 $a > 0$ 时 $f'(x)$ 唯一零点 x_0 , 且 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 因此 $f(x) \geq f(x_0) = e^{2x_0} - a \ln x_0$.

$$2x_0 e^{2x_0} - a = 0 \Rightarrow e^{2x_0} = \frac{a}{2x_0} \Rightarrow 2x_0 = \ln a - \ln 2x_0 \Rightarrow -\ln x_0 = 2x_0 - \ln a + \ln 2 = 2x_0 + \ln \frac{2}{a}.$$

因此 $f(x_0) = \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a \ln \frac{2}{a} \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$, 问题得证.

也可以用类似上题的办法解决掉参数, 要证 $f(x_0) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$, 只需用 x_0 表示 a , 那么不等式左右两边就只含有 x_0 一个未知数了:

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow a = 2x_0 e^{2x_0}.$$

$$f(x_0) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a} \Leftrightarrow e^{2x_0} - 2x_0 e^{2x_0} \ln x_0 \geq 4x_0 e^{2x_0} + 2x_0 e^{2x_0} \ln \frac{1}{x_0 e^{2x_0}} \Leftrightarrow (2x_0 - 1)^2 \geq 0.$$

显然成立.

11. 由 $x > 0$, 即证

$$h(x) = \frac{\sqrt{x} - \ln x - a}{x} - k$$

有唯一零点.

$$h'(x) = \frac{\ln x - \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 + a}{x^2},$$

令

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 + a = -g(x) - 1 + a,$$

由 (1) 问知 $\varphi(x)$ 在 $(0, 16)$ 上单调递增, 在 $(16, +\infty)$ 上单调递减, $x \neq 16$ 时

$$\varphi(x) < \varphi(16) = -3 + 4 \ln 2 + a \leq 0,$$

$h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $h(x)$ 至多有一个零点, 下证 $h(x)$ 存在零点:

$$a \leq 3 - 4 \ln 2 < 1 \Rightarrow h(x) > \frac{-\ln x - a}{x} - k > \frac{-\ln x - 1}{x} - k.$$

因此

$$h(e^{-k-1}) > \frac{k}{e^{-k-1}} - k = k(e^{k+1} - 1) > 0;$$

令 $x_3 = \max \left\{ \frac{1}{k^2}, e^{|a|} \right\}$, 则

$$h(x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_3}} - k - \frac{\ln x_3 + a}{x_3} \leq 0 - \frac{|a| + a}{x_3} \leq 0.$$

因此 $h(x)$ 在 $(e^{-k-1}, x_3]$ 上存在零点, 问题得证.

12.

13. $f'(x) = 3x^2 + a$, 设 $y = f(x)$ 与 x 轴相切于 $(x_0, 0)$.

依题意

$$\begin{cases} f'(x_0) = 3x_0^2 + a = 0, \\ f(x_0) = x_0^3 + ax_0 + \frac{1}{4} = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{4}, \\ x_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

即当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线.

14. $x > 1$ 时, $h(x) \leq g(x) < 0$, 因此只需考虑 $(0, 1]$ 区间.

$f(1) \geq 0$ 也即 $a \geq -\frac{5}{4}$ 时, $h(1) = g(1) = 0, x = 1$ 是 $h(x)$ 的零点;

$f(1) < 0$ 也即 $a < -\frac{5}{4}$ 时, $h(1) = f(1) < 0, x = 1$ 不是 $h(x)$ 的零点;

$0 < x < 1$ 时, $g(x) > 0$, 因此 $h(x)$ 与 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有相同零点.

令

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x} = x^2 + \frac{1}{4x} + a,$$

则 $h(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 有相同零点.

$$\varphi'(x) = \frac{8x^3 - 1}{4x^2},$$

$0 < x < \frac{1}{2}$ 时 $\varphi'(x) > 0, \varphi(x)$ 单调递增, $\frac{1}{2} < x < 1$ 时 $\varphi'(x) < 0, \varphi(x)$ 单调递减,

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + a, \quad \varphi(1) = \frac{5}{4} + a.$$

若 $a > -\frac{3}{4}$, $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上无零点;

若 $a = -\frac{3}{4}$, $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有一个零点;

若 $-\frac{5}{4} < a < -\frac{3}{4}$,

$$\varphi\left(\frac{1}{4|a|}\right) = \frac{1}{16a^2} + |a| + a > 0,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \quad \varphi(1) > 0,$$

$\varphi(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上各有一个零点;

若 $a \leq -\frac{5}{4}$,

$$\varphi\left(\frac{1}{4|a|}\right) = \frac{1}{16a^2} + |a| + a > 0,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \quad \varphi(1) \leq 0,$$

$\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上有一个零点.

综上, $a \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 时, $h(x)$ 有 1 个零点;

$a = -\frac{5}{4}$ 或 $a = -\frac{3}{4}$ 时, $h(x)$ 有 2 个零点;

$a \in \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ 时, $h(x)$ 有 3 个零点.

15.

16.

17. (1) 由 $g(x) = -2\ln x - 2 - \frac{2a}{x} + 2x - 2a$, $g'(x) = \frac{2(x^2 - x + a)}{x^2}$ 比较容易得到:

$a \geq \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

$0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}\right)$ 上单调递减. 具体过程略.

(2) 由 (1) 问可知 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. $g(1) = -4a < 0$, 现在我们还要找一个特殊点 α 使得 $g(\alpha) > 0$, 那么这显然就要对 $\ln x$ 放缩一下才容易找到这个特殊点, 观察式子形式可知证一下 $2\ln x < x$ 即可:

$x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

令 $h(x) = x - 2\ln x$, $h'(x) = 1 - \frac{2}{x}$, $0 < x < 2$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减; $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 因此 $h(x) \geq h(2) = 2 - \ln 2 > 0$, 即 $-2\ln x > -x$.

因此 $g(x) > x - \frac{2a}{x} - 2a - 2$.

$$g(1) = -4a < 0, \quad g(2a+3) > 2a+3 - \frac{2a}{2a+3} - 2a - 2 = \frac{3}{2a+3} > 0.$$

因此 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有唯一零点 x_0 , 且 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, $(x_0, +\infty)$ 上单调递增. 问题即证存在 $a \in (0, 1)$, 存在 x_0 使得 $g(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$.

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow \ln x_0 = x_0 - \frac{a}{x_0} - a - 1,$$

$$f(x_0) = -2(x_0 + a) \left(x_0 - \frac{a}{x_0} - a - 1\right) + x_0^2 - 2ax_0 - 2a^2 + a = 0.$$

整理得 $x_0^3 + 2ax_0^2 - 2x_0^2 - 5ax_0 - 2a^2 = 0$, 即 $(x_0 + 2a)(x_0^2 - 2x_0 - a) = 0$.

$x_0 + 2a > 0$ 可知 $a = x_0^2 - 2x_0$, $\ln x_0 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2x_0}{x_0} - x_0^2 + 2x_0 - 1 = -x_0^2 + 2x_0 + 1$.

令 $\varphi(x) = \ln x + x^2 - 2x - 1$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 2 \geq 2\sqrt{2} - 2 > 0$, 因此 $\varphi(x)$ 单调递增, 又 $\varphi(2) = \ln 2 - 1 < 0$, $\varphi(e) = e^2 - 2e > 0$, 因此 $x_0 \in (2, e)$.

$$\ln x_0 + x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \Rightarrow \ln x_0 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 - \ln x_0,$$

即 $0 < a < 1 - \ln 2$, 因此存在 $0 < a < 1$, $x_0 > 1$ 使得 $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, 问题得证.

应该说, 本题是隐零点问题的集大成者, 中间用了多次代换, 有些是部分代换, 有些是整体代换, 这样有同学就要问了, 那么我怎么知道什么时候部分代换什么时候整体代换呢? 这就要考虑代换的目的, 就是我们总是奔着让式子更简明的方向去代换, 比如第一步, 我们只是将 $\ln x_0$ 部分进行了代换, 原因是我们如果仍将 a 表示为 x_0 的表达式去代入 $f(x_0)$, 那这个计算量就太大了, 观察一下可以发现, $f(x_0)$ 唯一比较难以处理的就是 $\ln x_0$, 如果将 $\ln x_0$ 变成代数式的表达形式, 我们就可能利用因式分解对 $f(x_0)$ 进行进一步化简整理, 后面还有先证明 $\ln x_0 + x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有解, 简单的应用零点定理, 我们只能得到 $2 < x_0 < e$ 这个范围, 如果直接代入 $a = x_0^2 - 2x_0$ 中, 得到 $0 < a < e^2 - 2e$, 不能确定 a 与 1 的大小关系, 于是我们进一步观察 $\ln x_0 + x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$, 发现如果将 $x_0^2 - 2x_0$ 替换成 a , 立刻就得到 $a = 1 - \ln x_0 < 1 - \ln 2 < 1$ 了, 这样就完成了证明.

本题中比较难的一步是 $x_0^3 + 2ax_0^2 - 2x_0^2 - 5ax_0 - 2a^2 = 0$ 的因式分解, 如果对代数式有一定敏感性, 可以注意到如下关系:

$$\begin{aligned} g(x_0) = 0 &\Rightarrow x_0 \ln x_0 - x_0^2 + ax_0 + x_0 + a = 0, \\ f(x_0) = 0 &\Rightarrow -2(x_0 + a) \ln x_0 + x_0^2 - 2ax_0 - 2a^2 + a = 0. \end{aligned}$$

两式相加得 $(-x_0 - 2a) \ln x_0 - (a - 1)x_0 - 2a(a - 1) = 0$, 即

$$(x_0 + 2a)(\ln x_0 + a - 1) = 0,$$

$a = 1 - \ln x_0$, 代入 $x_0 \ln x_0 - x_0^2 + ax_0 + x_0 + a = 0$ 即得

$$-x_0^2 + 2x_0 - \ln x_0 + 1 = 0,$$

进而得到 $x_0 \in (2, e)$, $a \in (0, 1 - \ln 2)$.

B 组

1. 已知函数 $f(x) = e^{x-a}(x^2 - ax + b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

(1) 若 $a = 2$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 b 的取值范围;

(2) 若 $\{x \mid f(x) = a\} = \{x \mid f(f(x)) = a\} \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

2. 【2018 全国 III 卷理 21】已知函数 $f(x) = (2 + x + ax^2) \ln(1 + x) - 2x$.

(1) 若 $a = 0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a .

(Q1) 在使用一般方法完成后, 请看下面的命题及其证明, 利用这一信息尝试再给出一种解法.

命题 设 $f(x) = g(x)h(x)$ 且 $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. 若 $g(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取极值的类型 (极大/极小) 与 $\varphi(x)$ 完全一致.

证明. 先证明 $f(x)$ 在 x_0 取极大值 $\implies \varphi(x)$ 在 x_0 取极大值:

考虑 $x = 0$ 的一个邻域 $U(0, \delta)$, 在这个邻域中, 有 $g(x) > 0$, 故:

$$f(x) \leq f(0) \iff g(x) \cdot \varphi(x) \leq 0$$

因为 $g(x) > 0$, 不等式两边同除以 $g(x)$, 得 $\varphi(x) \leq 0$, 又 $\varphi(0) = 0$, 有

$$\varphi(x) \leq \varphi(0)$$

由此可说明 x_0 是 $\varphi(x)$ 的极大值.

同理可证明: $f(x)$ 在 x_0 取极小值 $\implies \varphi(x)$ 在 x_0 取极小值: □

3. 【2023 “fiddie” 模拟测试 22】设函数 $f(x) = e^{-x} \sin x + ax$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

(1) 求 $g(x)$ 的所有极值点;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 中有且只有 $2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 个极值点, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 中有且只有 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 个极值点, 求 a 的取值范围.

4. 【2025 深圳高三模拟 18】已知函数 $f(x) = \ln(x + a) + e^{-bx} - a$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

(1) 是否存在 a, b , 使得 $x = 0$ 为 $f(x)$ 极值点?

(2) 若 $1 < a < 2$, x_0 为 $f(x)$ 的最小零点, 证明: 当 $x \in (-a, 0)$ 时, $f(x) < f'(x_0)$.

5. 已知函数 $f(x) = e^x |x^2 - a|$ ($a \geq 0$).

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 若方程 $f(x) = m$ 恰有一个正数解与一个负数解, 当 a 变化时, 求实数 m 的最大值.

1.

2.

3.

4.

5.

第一章 函数

1.6 分析函数的基础方法

杂 题

- 【2013 湖南理 16 改编】(多选) 设函数 $f(x) = a^x + b^x - c^x$, 其中 $c > a > 0, c > b > 0$, 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 则下列叙述中正确的是
 (A) $\exists x \in (-\infty, 1) : f(x) < 0$
 (B) $f(x)$ 只有一个零点
 (C) $\exists x \in \mathbb{R}$, 使 a^x, b^x, c^x 不能构成一个三角形的三条边长
 (D) 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则 $\exists x \in (1, 2)$, 使 $f(x) = 0$
- 【2025 温州二模 17】已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{ax}{x+1} (a \in \mathbb{R})$.
 (1) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上恰有一个零点, 求 a 的取值范围;
 (2) 当 $a > 0$ 时, 解方程 $f'(x) - f(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
- 【2026 海淀二模 20】已知函数 $f(x) = \frac{x+a}{\sin x + 2}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.
 (1) 当 $\frac{\pi}{2} < a \leq 2$ 时, 求证: 对任意 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) < \frac{2a}{3}$;
 (2) 若关于 x 的方程 $f'(x) = 1$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上有且仅有 1 个解, 求 a 的最小值.
- 已知函数 $f(x) = e^x - ax, g(x) = \ln x - ax, a \in \mathbb{R}$, 记函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的最小值为 m , 求 $G(x) = e^x - e^m \ln x$ 的最小值.
- 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{1 + \log_a x}{\log_a(x+1)}$ 存在极值点 x_0 .
 (1) 求 a 的取值范围;
 (2) 求 $x_0 + f(x_0)$ 的最小值.
- 【2013 天津理 20】已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$.
 (1) 证明: 对任意的 $t > 0$, 存在唯一的 s , 使 $t = f(s)$;
 (2) 设 (2) 中所确定的 s 关于 t 的函数为 $s = g(t)$, 证明: 当 $t > e^2$ 时, 有 $\frac{2}{5} < \frac{\ln g(t)}{\ln t} < \frac{1}{2}$.
- 【2022 北京 20】已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$.
 (1) 设 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;
 (2) 证明: 对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.
- 【2021 全国乙卷理 20】证明: $g(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)} < 1$
- 设 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \sin ax - a \sin x$.
 (1) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上有唯一的极值点 x_0 , 证明: $f(x_0) < \min\{2a\pi, (1-a)\pi\}$.
 (2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上没有零点, 求 a 的取值范围.
- 【2025 台州二模 19】函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 记 $f(x)$ 的图象在点 $(a, f(a))$ 处的切线方程为 $y = g_a(x)$, 定义集合 $P_f = \left\{ a \in D \mid \forall x \neq a, \frac{f(x) - g_a(x)}{x - a} > 0 \right\}, Q_f = \left\{ a \in D \mid \forall x \neq a, \frac{f(x) - g_a(x)}{x - a} < 0 \right\}$.

(1) 若 $f(x) = e^x$, 求证: $P_f = \emptyset$;

(2) 若 $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$, 求 $P_f \cup Q_f$, 并说明理由.

11. 【2022T8 联考 22】已知函数 $f(x) = a \ln x - \sin x + x, a \neq 0$, 设 $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 且 $\cos \theta = 1 + \theta \sin \theta$, 证明: 当 $\theta^2 \sin \theta < a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 恒有两个极值点.

12.

1.

2.

3.

4.

5.

6. 新答案 (来源: 021-040 简单单调性与简单极值最值.md):

(1) $f'(x) = x(2\ln x + 1)$. $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时, $f'(x) < 0$; $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时, $f'(x) > 0$. $f(x)$ 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, 单调递增区间为 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$.(2) 由 $0 < x \leq 1$ 时 $f(x) \leq 0$, $f(s) = t > 0$ 可知 $s > 1$, 又 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 因此至多有一个 s 满足 $f(s) = t$, 下证存在 s 满足 $f(s) = t$: $f(1) = 0 < t$, $f\left(\sqrt{e^2 + t}\right) = (e^2 + t) \ln \sqrt{e^2 + t} > e^2 + t > t$, 因此存在 $s \in \left(1, \sqrt{e^2 + t}\right)$ 满足 $f(s) = t$.

(3) 问是一道看起来很绕的题目, 但只要保持沉着冷静, 简单分析一下就发现没有难度:

 $t = f(s) \Rightarrow \frac{\ln g(t)}{\ln t} = \frac{\ln s}{\ln f(s)} = \frac{\ln s}{2\ln s + \ln \ln s} = \frac{1}{2 + \frac{\ln \ln s}{\ln s}}$, 只需证 $0 < \frac{\ln \ln s}{\ln s} < \frac{1}{2}$:由 (2) 问知 $s > 1$, 若 $1 < s \leq e$, 则 $f(s) \leq f(e) = e^2 < t$, 不满足题意, 因此 $s > e$ 即 $\ln s > 1$, $\frac{\ln \ln s}{\ln s} > 0$;令 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $0 < x < e$ 时 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; $x > e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, $h(\ln s) \leq h(e) = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, 问题得证.

新答案 (来源: 061-080 极值零点数列与切割函数图像.md):

(1)

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - a - 5, & x \leq 0 \\ (3x - a)(x - 1), & x > 0 \end{cases}$$

 $-1 < x \leq 0$ 时, $f'(x) < 3 - a - 5 \leq 0$, $f(x)$ 单调递减; $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;易见 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不间断, 因此 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增.(2) 不妨令 $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = m$, 且 $x_1 < x_2 < x_3$ 即 $y = f'(x)$ 的图像与直线 $y = m$ 有三个交点, 且从左至右三个交点的横坐标为 x_1, x_2, x_3 .令 $g_1(x) = 3x^2 - a - 5 (x \leq 0)$, $g_2(x) = (3x - a)(x - 1) = 3x^2 - (a + 3)x + a (x > 0)$

$g_1(x)$ 单调递减, $g_2(x)$ 在 $\left(0, \frac{a+3}{6}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a+3}{6}, +\infty\right)$ 上单调递增, 因此 $y=m$ 与 $y=g_1(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个交点, 横坐标为 x_1 ; $y=m$ 与 $y=g_2(x)$ 在 $\left(0, \frac{a+3}{6}\right), \left(\frac{a+3}{6}, +\infty\right)$ 上各有一个交点, 横坐标分别为 x_2, x_3 .

x_2, x_3 是关于 x 的一元二次方程 $g_2(x) = m$ 的两根因此 $x_2 + x_3 = \frac{a+3}{3}$;

$$g_1(x_1) = m < g_2(0) \Rightarrow 3x_1^2 - a - 5 < a \Rightarrow x_1 > -\sqrt{\frac{5+2a}{3}}$$

只需证 $-\sqrt{\frac{5+2a}{3}} + \frac{a+3}{3} \geq -\frac{1}{3}$, 当 $a \in [-2, 0]$ 时,

$$-\sqrt{\frac{5+2a}{3}} + \frac{a+3}{3} \geq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{5+2a}{3}} \leq \frac{a+4}{3} \Leftrightarrow 3(5+2a) \leq (a+4)^2 \Leftrightarrow (a+1)^2 \geq 0$$

显然成立, 问题得证.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

第一章 函数

1.6 分析函数的基础方法