
第一章 函数

1.5 拓展阅读：无穷小量的幽灵与分析学的严谨化

微积分的诞生无疑是数学史上划时代的一次革命，这个伟大的发明把数学从对常量的研究推向对变量的研究，后者蕴含了动态、变化与神秘的无限。通过微积分，我们可以精确描述物体的运动轨迹，计算流体的流量，甚至预测市场的趋势。它的威力和实用性无可置疑，其相关的数学结论也是久经考验的——没有谁觉得函数 $y = x^3$ 的导数是 $3x^2$ 这句话有问题。

然而在这辉煌背后，微积分的基石——无穷小量的概念——却暗藏着巨大的逻辑漏洞，面对这一困境，数学家们往往采取默认为回避的态度。在这个背景下，第一个砸场子的人出现了，他不是数学家，而是一位圣公会的大主教——乔治·贝克莱（George Berkeley）。

贝克莱生活在一个即将往世俗时代转向的时间点，此时如果单凭神学与人辩论，往往会被视为迂腐可笑。贝克莱实际上也博览群书，对物理学、数学、经济学、医学等诸多学科均有涉猎。他认为，推动世俗时代到来的“罪魁祸首”正是以牛顿为首的科学家们，这些人居然能用绝对空间、运动定律和微积分来解释世界的各种现象了，那上帝岂不是没面子？于此同时，新一代的年轻人被现代科学“洗脑”后，开始坚信数学才是解析世界最可靠的工具，神学早该卷铺盖走人了。贝克莱对此痛心疾首，他决心找到牛顿那帮人在数学上的漏洞，向世人证明：“别老是攻击神学了，数学也没你们想的那么可靠。”他也确实做到了。

我们来翻翻旧账：在微积分萌芽阶段，人们是如何推导 $y = x^2$ 的导数的呢？

$$y' = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x = 2x$$

这里 Δx 是一个无穷小量。

贝克莱指出：为求解 x^2 的导数，必须有 $\Delta x \neq 0$ 才能做除法，但在最后一步又把 Δx 当成 0 舍去，怎么 Δx 一会儿说是 0，一会儿又说不是 0？贝克莱对微积分理论的攻击虽说出自维护神学的目的，但也真正抓住了牛顿理论中的缺陷，是切中要害的。

贝克莱借他发现的漏洞指出，人们批评神学中讲上帝存在只是信仰之称的，你们这里对微积分中无穷小量的存在，看来也只是信仰之称的。无穷小作为一个量，既不是 0，又不是非 0，那它一定是“量的鬼魂”了。

如果你认为这根本不成问题，我们不妨把这个逻辑矛盾推向连小学生都能看懂的程度：

问题 判断 $0.\dot{9}$ 与 1 是否相等。

即使在现在抛出这个问题，人们依然会吵得不可开交，我们大可以想象：在那个既缺乏严谨数学定义，又没有现代极限逻辑支撑的微积分早期，人们在面对这种挑战直觉的怪胎时，那种认知的矛盾与观点的分歧只会比今天更甚。

我们把历史上因无穷小概念在逻辑基础上的矛盾所引发的长期论争，称为第二次数学危机。

至少对那些从未接触过这种“套路”的小学生来说，这两个数就是不相等的，就像承认了无穷小量不等于零一样，因为左边和右边相比，感觉就是差了一点点。这时就有人站出来说：“数学是不能感情用事的，我们要严谨地证明它们就是相等的”

证明. 设 $x = 0.\dot{9}(1)$, 则 $10x = 9.\dot{9}(2), (2) - (1)$ 可得 $9x = 9$, 解得 $x = 1$. $\square$

这个证明方法在过去的几百年间频繁地抛头露面, 其结论——从后来的历史上看——确实是对的, 但这个证明方法本身有瑕疵, 在当时甚至缺少一个对应的概念来指出它, 以下面这个问题为例:

补充概念 (级数) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列, 定义部分和序列为

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为该数列 $\{a_n\}$ 构成的级数.

问题 求级数 $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ 的值.

利用上述方法, 有:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \implies S = \frac{1}{2}$$

但通过其他的括号组合方式, 我们还可以得到不同的答案:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots = 1$$

在有限数学的经验中, 相加总有确定的结果, 但在无穷的疆域里, 规则开始失效了. 级数似乎必须具备某种特殊的性质才能做上述运算, 我们称这一性质为收敛.

概念 (收敛, 发散) 如果一个级数的部分和序列 $\{S_n\}$ 存在极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R} \quad (\text{或 } \mathbb{C}),$$

则称该级数收敛, S 称为级数的和, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. 反之, 若极限不存在, 则称该级数发散.

请注意: 这是现在对级数收敛与发散的较为正规的定义, 在当时, 人们甚至不能对无穷小量作出解释, 因此也就无法描述极限, 以那个时代的语言就是, 这些数列的每一项加起来到最后会越来越靠近一个确切的数, 而发散则不然.

我们自然要问: 如何判断一个级数是否收敛呢?

数学家达朗贝尔于正式提出了第一个形式化的敛散性判定方法:

（比值审敛法/达朗贝尔判别法） 设有正项级数： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ ，且假设极限 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在或者为无穷大。

当 $L < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $L > 1$ 或 $L = +\infty$ 时：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；当 $L = 1$ 时：该判别法不能确定收敛性。

对于部分简单的级数，例如 $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n, \sum_{n=1}^{\infty} n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ，可以利用此方法轻松判定。但对于下述级数，比值审敛法就没办法判定其敛散性了：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$$

这一级数被称为调和级数，是发散的。

欧拉毫不在意如何去解释无穷小量的本质，

无穷级数（Infinite Series）是早期微积分计算的核心工具，在 18 世纪，数学家计算对数、三角函数或解微分方程，几乎全部依赖于泰勒级数（Taylor Series）展开。在微积分初期，数学家（如欧拉）将无穷级数视为“项数无限多的多项式”。既然多项式可以套用代数运算法则（如加法、乘法、逐项微分、逐项积分），他们便直接将这些性质推广到了无穷级数上。

拉格朗日想通过无穷级数的严谨定义，绕开无穷小量以重建分析学的基础，在寻找这个方法的过程中，他在历史的废纸堆里，发现了一个当时罕为人知的东西，他觉得这个东西，能够成为整个分析学最坚实的基础。

泰勒是英国数学家，其生前知名度仅限于英国高级学术圈子里，外面知道他的人很少。牛顿年轻时提出了二项式展开，这是人类第一次用无穷级数来表达一个函数，单就这一项工作，已经够牛顿这个名字载入史册，但牛顿还有更进一步的想法：数学里所有的函数是否都能展开成幂级数呢？他提出了这个猜想，但并没有给出幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 每一项对应的系数 a_n 。泰勒承袭了牛顿的思想，给出了泰勒公式。后来牛顿的嫡系学生麦克劳林看到这玩意儿如获至宝，在自己的著作里反复使用，他发现很多函数在 $x = 0$ 展开后，形式非常优美且计算渐变，他把泰勒展开化为了一个特例。

后人发现，麦克劳林的特例很多时候比泰勒公式好用多了，因此直接把后来这个简单的式子叫做麦克劳林公式。

年轻的拉格朗日以为自己终于发现了一个能够包罗万象的基础理论，所有的函数都能写成无穷级数，而且我们可以用等号连接左右两式，完美地避开了噩梦般的 dx ，拉格朗日的这种快感持续了多少年，我们不得而知，但是这条路其实从一开始就是个死胡同，一个隐患导致了泰勒纲领根本不可能推行。

其实这个宏伟工程崩盘的隐患，早在牛顿生前就已经出现了，你们看这个函数的展开，一旦想要往里带 x 等于 2 或者 3，口算试试它灵不灵时，就会发现，明显后果越灾难吧，拉格朗日发现，这些看起来简单光滑的连续函数，就像被诅咒了一样，负一到一以外的部分，就是莫名其妙的贴不上。知道柯西、高斯那个时代学到复分析，就会知道什么叫收敛结构，什么叫收敛

半径了,但这时候的他,只能感觉到泰勒展开的神性,有点褪色了,好像不是所有函数都能用泰勒展开描述,很多时候还得在后面加一团非常破坏美感的東西,才能让两边真正相等,这个能够视为泰勒刚领失败的标志,以及拉格朗日最终投降书的东西,叫做拉格朗日行鱼像,他强行出现在一个原本无穷个多项式相加的末尾,等于承认了需要人为介入来考虑,泰勒展开存在的误差,虽然是一种失败的象征,但同时也是他为下一个世纪,这个问题能够最终解决而留下的宝贵遗产,19 世纪初,拉格朗日在自己 70 多年,他在 20 多岁的时候,注意到了一位 20 来岁的小伙子,他展现出了极强的纯粹数学天赋,但是却在干工程方面的事,拉格朗日不想埋没人才,所以极力建议他去研究前沿数学,这小子就是科西。

柯西可以称得上是 19 世纪法国数学界真正的核心人物,他年轻时太过高产,巴黎科学院曾经因为他写的太多,强行限制了个人发表文章的数量上限,柯西为了摆脱限制,自己办了个期刊发文章.当时法国上到科学院院士,下到中小学老师,都把科西当领头羊,几乎是架着他,让他写一本严谨的分析学教材,以便让法国数学稳居世界前列,在这群同事的催促下,他开始动笔。

在人类已经连续失败了两个世纪之后的 1821 年,柯西再一次试图建立分析学的基础,他出版了《皇家综合工科学校分析教程》,这本书的出版,如今被视为微积分严格化的开端,柯西在书里使用了一个符号 ε 来表示一个任意小的值,这个 ε 既有无穷小量的即视感,也有拉格朗日余项的影子,但和它们都不一样.他开始把这个概念用在符号化的不等式规定当中.比如说, $f(x)$ 收敛于某个极限 k ,用严谨的数学语言就是:给定一个任意小的 ε ,可以找到一个数 h ,使得当 $x \geq h$ 时,有 $k - \varepsilon < f(x) < k + \varepsilon$,这种说法已经非常接近现代数学教科书的语言了.科西基于极限的定义,把连续性、收敛性、导数、积分全部用算术语言重新规定了一遍,可以说柯西是一个语言画风的风水岭。

以连续性为例,莱布尼茨的定义是:画函数图像时,笔不离开纸,这函数就是连续的.而柯西给出的连续性定义是:

称函数 $f(x)$ 是在变量 x 的两个给定值之间的这个变量的连续函数,是指对 x 在这些界限之间的每个值, $|f(x+a) - f(x)|$ 随 a 而无限地变小。

虽然概念很长,但为了整个体系的严谨性,我们不得不这样做.然而,即便柯西努力到这种程度,依然存在纰漏,他在严谨之余,依然还有一些想当然的行为,比如他想当然的觉得逐点收敛就等于一致收敛,所以他在自认为已经完全建立了牢固的分析学地基之后,放过一句狠话:

“如果一个级数每一项都是同一个变量 x 的函数并对此变量在一个使级数收敛的特定值的邻域内这些函数是连续的,那么它的和 S 在此特定值的邻域中也是 x 的连续函数。”

这句话通俗的意思是:如果每条曲线都没有断点,那么把它们无限相加,最终得到的总曲线也不会有断点。

就这个反例而言,大家确实意识到,函数里还有很多我们没注意到的特殊存在,柯西的理论还需要最后推一把,才能真正成为分析学的基础,这就要轮到威尔斯特拉斯出马,那个为第二次数学危机彻底画上句号的人.这个名字经常一个函数绑定在一起,它叫做威尔斯特拉斯病态函数。

之前人们觉得,只要函数是连续的,把它放大到极限状态时,就能看到光滑的线条,然后求导.然而,威尔斯特拉斯构造的这个病态函数处处连续,但处处不可导,无论将其放大多少倍都

是锯齿状的。

病态函数的出现彻底摧毁了数学家们的侥幸心理，同时也等于宣布了：在这个时代放弃对无穷小量的定义，其实是一种观念的转向，从哲学上的形而上对象撤退到数学里的可操作逻辑结构上。

在这种思想下，魏尔斯特拉斯以柯西的工作为基础，提出了第二次数学危机最后的解决方案—— $\varepsilon - \delta$ 语言，既然我们承认了不追问无穷小到底有多小，那我们就直视它和 0 之间存在的差距。

当我们说一个函数在趋于 A 时的极限是 L ，那么对于任意一个提出的误差 $\varepsilon > 0$ ，都能找到一个对应的 $\delta > 0$ ，只要 x 与 A 的距离比 δ 更小，那么 $f(x)$ 与 L 的距离就一定比 ε 更小， $\varepsilon - \delta$ 语言比柯西提出的 ε 语言更有效的原因是：它同时控制了输入和输出，我们知道自己有限的心灵无法感受无限小的变化，但是只要你把输入靠近 A 到 δ 的程度，那我们就能保证输出的 L 和函数值 $f(x)$ 之间的差值缩小到 ε 的程度，我的精度完全取决于你的需求，并且保证永远能满足。

现在我们也终于可以毫无顾虑地写出 $0.\dot{9} = 1$ 这个式子了，这里的等于号表示一种任意进度下的控制关系，我们可以让 ε 取到任意小，直到和 1 之间已经没有实数存在，在实分析的领域中，它就是相等。当几十年后，实数的完备性被明确阐述时，这个结论更是显而易见，毫无争议。

如果说此前两百年间，所有数学家们对无穷小量的探索，都是在试图为从未有人真正见过的上帝描绘肖像，执意要勾勒神的面容、身姿，试图让不可见者变得可见，那么 $\varepsilon - \delta$ 语言的出现，其实意味着一种更深的顿悟，神本无相，数学家们不再执拗于给那位不可见的存在赋予形体，我们只看这个存在能够对我们的真实世界产生什么样可见的影响，这就是第二次数学危机的最终结论。无穷小量就像数学史上的一阵微风，人们从直接描述它变成了间接把握它，正如这首诗所言：

*Who has seen the wind?
Neither I nor you.
But when the leaves hang trembling,
The wind is passing through.*

*Who has seen the wind?
Neither you nor I.
But when the trees bow down their heads,
The wind is passing by.*

谁曾看见过风？
不是你，也不是我。
但当高悬的青叶轻颤。
那风儿就在穿行而去。

谁曾看见过风？

不是我,也不是你.
 但当成群的树木颌首.
 那风儿就在身侧路过.

但就在这场持续了两个多世纪的危机被彻底解决的同时,一个隐秘的新问题却以完全出乎意料的方式在 19 世纪末骤然降临,在这个问题的解决过程中,将会出现整个数学史上最为反常的一个现象,所有涉及无限的观念都要因此重构,所有数学实体的定义都要因此改写.

进入 19 世纪,物理学的研究对象从牛顿时代的“质点动力学”扩展到了“连续介质力学”与“热力学”.在法国物理学家傅里叶(Fourier)发表的《热的解析理论》中,提出了一个革命性的物理与数学论断:任何在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的任意函数(即使它包含间断点),都可以表示为三角函数的无穷级数之和.

例如,方波函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 可被展开为无穷三角级数:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

这一结论彻底动摇了人们先前所建立的对“函数”和“非连续性”的几何直观认知,无穷三角级数中的每一项 $\frac{4}{\pi} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 上都是处处可导的,然而这些光滑连续函数的无穷叠加却在 $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi$ 等点处产生了陡峭的跃度间断点.

在此前,数学界普遍认为“连续函数的无穷和必定是连续函数”.傅里叶级数的出现打破了这一直觉,这使得数学家意识到,必须重新定义什么是“函数”、什么是“连续性”,以及在什么条件下,无穷个连续函数的和才能保持连续.

科学研究的这种深入,彻底剥离了早期微积分依赖眼见为实的几何图景,数学体系被迫向纯粹的、无图形依赖的逻辑化和抽象化过渡.

1821 年,柯西(Cauchy)出版了《分析教程》,提供了理解“无穷小量”的另一个视角,在这本书中,“无穷小量”不被认为是某种具体的数值,而被定义为一种动态趋近于零的变量,同样的,无穷小不被认为是一个数,而是一个以零为极限的变量过程,这初步消除了无穷小在求导中“既是零又不是零”的逻辑冲突,为其赋予了“趋势”的内涵.与此同时,级数的敛散性在这本书中也被定义,级数 $\sum u_n$ 有意义当且仅当其部分和序列 $\{S_n\}$ 有极限,此时称级数 $\sum u_n$ 收敛,否则称其发散.他与同时期的数学家也一同给出了诸多判定级数敛散性的方式.

然而,柯西的理论仍然保留了“无限趋近”、“随意地小”等带有运动学色彩的直观词汇.

而傅里叶级数在包含跃度间断点附近的收敛是非一致收敛的(会产生吉布斯现象),因此它的和函数不再保持连续.至此,19 世纪初的物理学家危机得到了完美的数学解释.

极限理论虽然完美,但它隐含了一个基础前提:数轴是连续无缝的,极限值 L 必须真实存在于数轴上.19 世纪 70 年代,戴德金(Dedekind)和康托尔(Cantor)分别提出了“戴德金分割”与“康托基本序列”,从不同角度完成了这一工作.

至此，微积分的严密化彻底完成. 它以集合论与实数完备性为基础，以 $\varepsilon - \delta$ 语言和一致收敛性为框架，将直觉性的微积分升华为严格的、现代的数学分析.

如果想要严格化导数的定义，我们一般按如下路径学习：

数列极限 $\rightarrow$ 函数极限 $\rightarrow$ 导数

1.5.1 数列的极限

先从离散的数列极限讲起.

对于数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$$

记第 n 项的值为 a_n ，我们感性地为，当 n 趋向无穷大时， a_n 无限趋近于 0，0 就是数列 $\{a_n\}$ 的极限，对于具体的，直观的例子我们可以如此理解，但为研究一般的问题与理论，我们必须严谨地对极限作出定义，我们也不允许对数学概念的刻画中出现“无限趋近”这种意义不明的词语，因此我们要更进一步，尝试对数列的极限给出严格的定义.

数学家经过漫长的探索后，想到了通过控制距离来描述数列的极限.

我们说：“数列 $\{a_n\}$ 无限趋近于常数 A .”，相当于说：“数列 $\{|a_n - A|\}$ 无限趋近于 0”，即 a_n 与 A 的距离无限趋近于 0.

给定一个距离 $\varepsilon > 0$ ，如果数列 $\{a_n\}$ 的极限是常数 A ，那么它一定在某项之后——即存在 N ，当 $n > N$ 时， $|a_n - A|$ 应当都会小于 ε . 从图形上直观的感受看， $\{a_n\}$ 最终应当无限靠近常数 A ，因此任意给定一个范围 $[A - \varepsilon, A + \varepsilon]$ ， $\{a_n\}$ 在经过若干项后都应该落在其中.

定义（数列的极限） 对于数列 $\{a_n\}$ ， A 是一个实常数，如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，都可以找到正整数 N ，使得当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 此时也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A ，如果不存在实数 A ，使得 $\{a_n\}$ 收敛于 A ，那么称数列 $\{a_n\}$ 发散.

或表述为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

1.5.2 函数的极限

对于定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数 f ，类比分列极限的定义，我们可以给出当 x 趋于 ∞ 时函数极限的定义.

定义 1.5.1 (x 趋于 $+\infty$ 时函数的极限). 设 f 为定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数， A 是一个实常数，若对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，都可以找到正数 M ，使得当 $x > M$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 A 是 x 趋于 $+\infty$ 时, 函数 f 的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

同理, 可以给出 x 趋于 $-\infty$ 时函数极限的定义, 此处不做赘述.

如何定义当 x 趋于 x_0 时的函数极限呢? 我们需要先引入邻域, 去心邻域的概念.

定义 1.5.2 (邻域, 去心邻域). 设 $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$. 集合

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域. 如果在这个集合中去掉点 x_0 本身, 这成为点 x_0 的 δ 去心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$.

除此以外, 还有

右邻域 $U_+(x_0, \delta) = [x_0, x_0 + \delta)$, 右去心邻域 $\dot{U}_+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$;

左邻域 $U_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0]$, 左去心邻域 $\dot{U}_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$;

定义 1.5.3 (函数的极限). 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta')$ 内有定义, A 是一个实常数. 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正数 $\delta < \delta'$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 A 是 x 趋于 x_0 时, 函数 f 的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

定义 1.5.4 (单侧极限). 设函数 f 在 $\dot{U}_+(x_0, \delta')$ (或 $\dot{U}_-(x_0, \delta')$) 上有定义, A 是一个实常数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正数 $\delta < \delta'$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ (或 $x_0 - \delta < x < x_0$) 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 A 是 x 趋于 x_0^+ /从右侧趋于 x_0 (或 x_0^- /从左侧趋于 x_0) 时, 函数 f 的右 (左) 极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A)$

例如, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

下面着重讨论连续函数, 这也是高中阶段主要研究的部分.

我们直观地认为, 笔不离纸画出一条曲线, 如果这条曲线可被视为某个函数, 那么它也是连续的, 或者说, 连续函数在坐标平面上的图象是一条连绵不断的曲线. 但正如前文所说, 我们不能满足于这种感性的认识, 而应给出函数连续性的精确定义.

定义 1.5.5 (函数在一点的连续性). 设函数 f 在某 $U(x_0, \delta)$ 上有定义, 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 f 在点 x_0 连续

定义 1.5.6 (函数在区间的连续). 若函数 f 在区间 I 上的每一点都连续, 则称 f 为 I 上的连续函数.

连续函数具有非常良好的局部性质, 此处列举若干.

连续函数的局部保号性 如果函数 f 在点 x_0 处连续, 且 $f(x_0) > 0$ (或 $f(x_0) < 0$), 那么存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0, \delta)$, 使得对于该邻域内的任何点 x , 都有: $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)

最大, 最小值定理 若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值.

基于上述的铺垫, 我们可以给出导数的严格定义.

定义 (导数) 设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ (或 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{)}$$

存在, 则称函数 f 在点 x_0 可导, 并称该极限为函数 f 在点 x_0 的导数, 记作 $f'(x_0)$.

第一章 函数

1.5 拓展阅读：无穷小量的幽灵与分析学的严谨化

第一章 函数

1.5 拓展阅读：无穷小量的幽灵与分析学的严谨化

第一章 函数

1.5 拓展阅读：无穷小量的幽灵与分析学的严谨化

第一章 函数

1.5 拓展阅读：无穷小量的幽灵与分析学的严谨化