

第一章 函数

1.3 函数的简单特性, 抽象函数

1.3.1 函数的简单特性

定义 1.3.1. 函数的若干简单特性定义如下:

有界性: 若存在两个常数 m, M , 使函数 $f(x), x \in D$ 满足 $m \leq f(x) \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D **有界**, 其中 m 是它的**下界**, M 是它的**上界**.

单调性: 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$), 则称函数 f 在 D **单调递增** (**严格单调递增**), 通常记作 $f \uparrow$ (f 严格 $\uparrow$); 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 f 在 D **单调递减** (**严格单调递减**), 通常记作 $f \downarrow$ (f 严格 $\downarrow$).

奇偶性: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若任意 $x \in D$ 都有 $f(x) = f(-x)$, 则称函数 $f(x)$ 是**偶函数**; 若任意 $x \in D$ 都有 $f(x) + f(-x) = 0$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**.

周期性: 若存在常数 $T > 0$, 使得对一切 $x \in D$ 都有 $f(x) = f(x + T)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**, T 称为它的一个周期. 若存在满足上述条件的最小的 T , 则称它为 $f(x)$ 的**最小正周期**.

1.3.2 函数对称性的若干简单探究

对于定义域为 $\mathbb{R}$ 函数 $y = f(x)$, 将其做平移与翻折等操作后得到新的图象, 其对应的函数 $y = g(x)$ 与原函数 $y = f(x)$ 之间有何联系呢?

将 $y = f(x)$ 的图象向上平移 k 个单位 ($k < 0$ 时相当于向下平移 $|k|$ 个单位), 得到的新图象对应的函数为 $g(x) = f(x) + k$. 这是显然的.

如果将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 k 个单位 ($k < 0$ 时相当于向右平移 $|k|$ 个单位) 呢?

假设点 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 图象上的点, 那么它平移后对应的点为 $(x_0 - k, f(x_0))$, 设 $x_0 - k = t$, 于是该点可写作 $(t, f(t + k))$, 于是新图象对应的函数为 $g(t) = f(t + k)$, 也就是 $g(x) = f(x + k)$.

1. 将 $y = f(x)$ 的图象上所有的点保持纵坐标不变, 横坐标变为原先的 k ($k \neq 0$) 倍, 得到的新图象对应的函数为 $g(x) = f(\frac{x}{k})$;
2. 将 $y = f(x)$ 的图象上纵坐标小于 0 的部分关于 x 轴翻折, 其余部分保持不变, 得到的新图象对应的函数为 $g(x) = |f(x)|$;
3. 将 $y = f(x)$ 的图象上横坐标小于 0 的部分抹去, 并将横坐标大于零的部分沿 y 轴向左翻折, 并保留一份在原地, 得到的新图象对应的函数为 $g(x) = f(|x|)$;
4. 试述一种操作, 将 $y = f(x)$ 的图象由变为 $y = f(ax + b), ab \neq 0$ 的图象.

1.3.3 抽象函数

第一章 函数

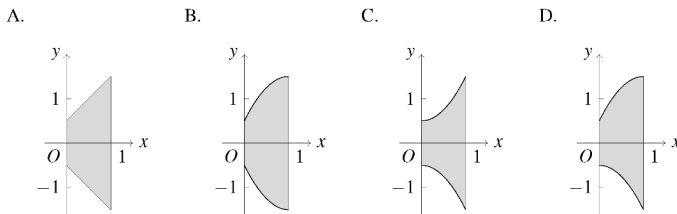
1.3 函数的简单特性

习 题

A 组

- 【2008 辽宁理 8】将函数 $y = 2^x + 1$ 的图象按向量 a 平移得到函数 $y = 2^{x+1}$ 的图象, 则
 (A) $a = (-1, -1)$ (B) $a = (1, -1)$ (C) $a = (1, 1)$ (D) $a = (-1, 1)$
- 【2008 安徽理 11】若函数 $f(x), g(x)$ 分别是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数、偶函数, 且满足 $f(x) - g(x) = e^x$, 则有
 (A) $f(2) < f(3) < g(0)$ (B) $g(0) < f(3) < f(2)$ (C) $f(2) < g(0) < f(3)$ (D) $g(0) < f(2) < f(3)$
- 【2016 浙江理 5】设函数 $f(x) = \sin^2 x + b \sin x + c$, 则 $f(x)$ 的最小正周期
 (A) 与 b 有关, 且与 c 有关 (B) 与 b 有关, 但与 c 无关
 (C) 与 b 无关, 且与 c 无关 (D) 与 b 无关, 但与 c 有关
- 【2011 福建 9】对于函数 $f(x) = a \sin x + bx + c$ (其中 $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{Z}$), 选取 a, b, c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$, 所得出的正确结果一定不可能是
 (A) 4 和 6 (B) 3 和 1 (C) 2 和 4 (D) 1 和 2
- 【2019 上海 15】已知 $\omega \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = (x-6)^2 \cdot \sin(\omega x)$, 存在常数 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 可能的值为
 (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{5}$
- 【2021 浙江 7】已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}, g(x) = \sin x$, 则图象为如图的函数可能是
 (A) $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$ (B) $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4}$ (C) $y = f(x)g(x)$ (D) $y = \frac{g(x)}{f(x)}$
- 【2021 上海春考 15】已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 下列是 $f(x)$ 无最大值的充分条件是
 (A) $f(x)$ 为偶函数且关于点 $(1, 1)$ 对称 (B) $f(x)$ 为偶函数且关于直线 $x = 1$ 对称
 (C) $f(x)$ 为奇函数且关于点 $(1, 1)$ 对称 (D) $f(x)$ 为奇函数且关于直线 $x = 1$ 对称
- 【2007 安徽理 11】定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数又是周期函数, T 是它的一个正周期. 将方程 $f(x) = 0$ 在闭区间 $[-T, T]$ 上的根的个数记为 n , 则 n 可能为
 (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5

9. 【2026 上海春 15】平移对称法在几何学中具有重要的应用. 设平面直角坐标系 xOy 中有一图形 Ω , 过 Ω 内任意一点 P 作垂直于 x 轴的直线 l_P , 满足 $l_P \cap \Omega$ 为一线段, 现沿 l_P 方向平移这些线段, 使得它们的中点均在 x 轴上, 这样叫做平移对称法. 对于 $-x^2 + x + 1, -x^2 - x$, 直线 $x = 0$ 和直线 $x = 1$ 围成的封闭图形 Ω , 对它进行一次平移对称, 得到的图像大致为



10. 【2024 新高考 I 卷 8】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 则下列结论中一定正确的是
- (A) $f(10) > 100$ (B) $f(20) > 1000$ (C) $f(10) < 1000$ (D) $f(20) < 10000$
11. 【2025 “fiddie” 模拟考 9】(多选) 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x} + bx^2 + (a-b)x$, 则
- (A) $\exists a, b \in \mathbb{R}, f(x)$ 是偶函数 (B) $\exists a, b \in \mathbb{R}, f(x)$ 是奇函数
(C) $\exists a, b \in \mathbb{R}, f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数 (D) $\exists a, b \in \mathbb{R}, f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的减函数
12. 【2023 四省联考 9】(多选) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 单调递减, 则
- (A) $f(f(1)) < f(f(2))$ (B) $f(g(1)) < f(g(2))$ (C) $g(f(1)) < g(f(2))$ (D) $g(g(1)) < g(g(2))$
13. 【2024 九省联考 11】(多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(\frac{1}{2}) \neq 0$, 若 $f(x+y) + f(x)f(y) = 4xy$, 则
- (A) $f(-\frac{1}{2}) = 0$ (B) $f(\frac{1}{2}) = 2$
(C) 函数 $f(x - \frac{1}{2})$ 是减函数 (D) 函数 $f(x + \frac{1}{2})$ 是减函数
14. 【2025 北京 15 改编】(多选) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 则
- (A) 存在 $\mathbb{R}$ 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x) + f(2x) = -x$ 恒成立
(B) 存在 $\mathbb{R}$ 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x) + f(2x) = -x$ 恒成立
(C) 使得 $f(x) + f(-x) = \cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个
(D) 使得 $f(x) - f(-x) = \cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个
15. 【2023 新高考 I 卷 11】(多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则
- (A) $f(0) = 0$ (B) $f(1) = 0$
(C) $f(x)$ 是偶函数 (D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
16. 【2014 全国 I 卷文 5 理 3】设 $f(x), g(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 分别判断 $f(x)g(x), |f(x)|g(x), f(x)|g(x)|, |f(x)g(x)|$ 的奇偶性.

17. 【2021 新高考 II 卷 14】写出一个同时具有下列性质的函数 $f(x)$.,(1). $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$;(2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$;(3) $f'(x)$ 是奇函数.
18. 【2017 全国 III 卷理 11】已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点, 求 a 的值.
19. 【2011 上海理 13】设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上, 以 1 为周期的函数, 若函数 $f(x) = x + g(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的值域为 $[-2, 5]$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-10, 10]$ 上的值域.
20. 【2022 新高考 II 卷 8】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$, 求 $\sum_{k=1}^{22} f(k)$.
21. 【2021 全国甲卷理 12】【同 2026 新高考 II 卷 8】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$, 若 $f(0) + f(3) = 6$, 求 $f(\frac{9}{2})$
22. 【2010 湖南 8】若函数 $f(x) = \min\{|x|, |x+t|\}$ 的图象关于直线 $x = -\frac{1}{2}$ 对称, 求 t .
23. 【2015 全国 II 卷文 12】已知函数 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$, 解不等式 $f(x) > f(2x-1)$.
24. 【2012 新课标 I 卷文 16】设函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + \sin x}{x^2 + 1}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 求 $M+m$.
25. 【2022 全国乙卷文 16】若 $f(x) = \ln\left|a + \frac{1}{1-x}\right| + b$ 是奇函数, 求 a, b .
26. 【2005 江西文 13】若函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 2a^2})$ 是奇函数, 求 a .
27. 【2013 新课标 I 卷理 16】若函数 $f(x) = (1-x^2)(x^2 + ax + b)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称, 求 $f(x)$ 的最大值.
28. 已知函数 $y = f(x)$, 解释:
29. 判断正误:
- (1) (A) 函数 $f(x)$ 在 D 上存在最大值、最小值当且仅当函数 $f(x)$ 在 D 上有界;
 - (2) (B) 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定存在最大值 M 与最小值 m , 记 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的极值点为 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, 则一定有

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots\}, \quad m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots\}$$
 - (3) (A) 若函数 $f(x)$ 在定义域 D 内无界, 则对任意给定的正数 M , 在 D 内总存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) > M$;
 - (4) (A) 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界当且仅当 $|f(x)|$ 在 I 上有界.
30. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$, 则下列命题中可以作为“ $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增”的充分条件的是
- (1) 对任意两个不相等实数 x_1, x_2 , 有 $(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) > 0$;
 - (2) 对任意实数 x_0 , 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时有 $f(x) > f(x_0)$;
 - (3) 存在 $\delta > 0$, 使得对任意两个实数 x_1, x_2 , 当 $0 < x_2 - x_1 < \delta$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$;
 - (4) 函数 $f(x)$ 连续, 且存在正实数 p , 使得对任意实数 x , 有 $f(x) < f(x+p)$;

- (5) 对任意实数 x , 存在正实数 p , 使得 $f(x) < f(x+p)$;
- (6) 对任意两个有理数 r_1, r_2 , 当 $r_1 < r_2$ 时有 $f(r_1) < f(r_2)$;
- (7) 对任意实数 x 和正整数 n , 有 $f(x) < f(x + \frac{1}{n})$;
- (8) 对任意两个实数 a, b , 当 $a < b$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上都不单调递减;
- (9) 函数 $f(x)$ 连续, 对任意两个实数 a, b , 当 $a < b$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上都不单调递减.

31. 以下是关于函数图象的对称性与周期性关系的探究. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 证明或证伪:

- (1) 若 $y = f(x)$ 的图象既关于 $x = b$ 对称, 又关于 $x = a$ 对称 ($a \neq b$), 则 $f(x)$ 是周期函数, 它的一个周期是 $T = 2|b - a|$, 且 $y = f(x)$ 的图象也关于 $x = b + \frac{1}{2}kT (k \in \mathbb{Z})$ 对称;
- (2) 若 $y = f(x)$ 的图象既关于 (a, y_a) 对称, 又关于 (b, y_b) 对称 ($a \neq b$), 则 $f(x)$ 是周期函数, 它的一个周期是 $T = 2|b - a|$, 且 $y = f(x)$ 的图象也关于 $(b + \frac{1}{2}kT, 0) (k \in \mathbb{Z})$ 对称;
- (3) 若 $y = f(x)$ 的图象既关于 $x = b$ 对称, 又关于 (a, y_a) 对称 ($a \neq b$), 则 $y = f(x)$ 是周期函数, 它的一个周期是 $T = 4|b - a|$, 且 $y = f(x)$ 的图象也关于 $x = b + \frac{1}{2}kT (k \in \mathbb{Z}), (a + \frac{1}{2}kT, 0)$ 对称;

32. 证明或反驳:

- (1) Dirichlet 函数 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 是周期函数, 且存在最小正周期;
- (2) (B) 若 $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 则 $f(x) + g(x)$ 一定是周期函数;
- (3) (B) 若 $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 则 $f(x)g(x)$ 一定是周期函数;
- (4) (A) 若 $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 则 $f(g(x))$ 一定是周期函数;
- (5) (C) 若 $y = f(x)$ 的图象有一个对称中心和一条对称轴, 那么 $f(x)$ 是周期函数.

33. 对于下列函数, 若其图象为中心对称图形, 则求出其对称中心; 若为轴对称图形 (此处仅考虑垂直于 x 轴的对称轴), 则求出其对称轴.

- (1) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ (2) $f(x) = \ln \frac{3x+5}{3x-5}$
- (3) $f(x) = \ln \frac{x-2}{x-4}$ (4) $f(x) = \frac{2^x+1}{2^x-1}$
- (5) $f(x) = \frac{2^x+5}{2^x-5}$ (6) $f(x) = \frac{5}{3^x+8}$
- (7) $f(x) = 4^x + 5 \times 4^{-x}$

34. 【2023 全国乙卷 21 (2)】已知函数 $f(x) = (\frac{1}{x} + a) \ln(1+x)$. 是否存在 a, b , 使得曲线 $y = f(\frac{1}{x})$ 关于直线 $x = b$ 对称? 若存在, 求 a, b , 否则说明理由.

1. A.
2. D.
3. B.
4. D. $g(x) = f(x) - c$ 是奇函数, 所以 $g(-1) = -g(1)$, 即 $f(-1) - c = -f(1) + c$, 所以 $f(1) + f(-1) = 2c$. 由于 c 是整数, 则 $f(1) + f(-1)$ 是偶数. 而 D 的选项中两数之和是奇数, 不可能取到奇数.
5. C. 根据 $f(x)$ 的表达式, 只能有 $a = 6$, 所以 $f(x+6) = \sin(\omega(x+6))$ 是偶函数. 由三角函数的奇偶性质, 只能有 $\sin(\omega(x+6)) = \pm \cos(\omega x)$, 因此取 $x = 0$ 可得 $\sin(6\omega) = \pm 1$. 检查四个答案, 只能选 C.
6. D.
7. C.
8. D.
9. A.
10. B.

11. ABC. 对于 A 选项, 当 $a = 1, b = 1$ 时, $f(x) = e^x + e^{-x} + x^2$ 是偶函数, 故 A 选项正确.

对于 B 选项, 当 $a = -1, b = 0$ 时, $f(x) = e^x - e^{-x} - x = 0$, 故 B 选项正确.

对于 C 选项, 当 $a = b = 0$ 时, $f(x) = e^x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 故 C 选项正确.

对于 D 选项, 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, e^x 的增长速度比 e^{-x}, x^2, x 都快, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 故 $f(x)$ 不可能是减函数.

(另解) 证明存在 x_0 使得当 $x > x_0$ 时 $f'(x) > 0$.

Fiddie 评: 本题改编自【2009 浙江文 8】.

12. BD.
13. ABD.
14. BC.
15. ABC.
- 16.
- 17.
18. $\frac{1}{2}$.
19. $[-15, 11]$.
20. -3 .

21. $\frac{5}{2}$.

相似题:【2021 新高考 II 卷 8】设函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 且 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 则

(A) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ (B) $f(-1)=0$ (C) $f(2)=0$ (D) $f(4)=0$

22. $\frac{1}{3}$.

23. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

24. $\frac{2}{3}$.

25. $a = -\frac{1}{2}, b = \ln 2$.

26. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

27. $\frac{16}{25}$.

28. $\frac{1}{2}$.

29. $\frac{1}{2}$.

30. $\frac{1}{2}$.

31. $\frac{1}{2}$.

32. $\frac{1}{2}$.

33. $\frac{1}{2}$.

34. 思路 1: 设 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $g(x) = (x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

若存在 a, b , 使得曲线 $y = g(x)$ 关于直线 $x = b$ 对称, 则 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ 关于 $x = b$ 对称, 所以 $b = -\frac{1}{2}$.

由 $g(x) = g(-1-x)$ 得 $(x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (-1-x+a)\ln\frac{x}{1+x}$, 整理得

$$(x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (x+1-a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

所以 $a = \frac{1}{2}$, 故存在 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, 使得曲线 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x = b$ 对称.

思路 2: 设函数 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $g(x) = (x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. 若曲线 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x = b$ 对称, 则 $g(x) = g(2b-x)$, 即

$$(x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (x-2b-a)\ln\frac{x-2b}{x-2b-1}$$

由此可以得到, 当

$$\begin{cases} -2b = 1, \\ -2b - 1 = 0, \\ -2b - a = a, \end{cases}$$

即 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ 时, 曲线 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x = b$ 对称.

第一章 函数

1.3 函数的简单特性

B 组

- 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x)$ 的图像关于点 $(2, 0)$ 对称. 设集合 $A = \{a \mid \text{对任意 } x, f(x) + g(a) > 0\}, B = \{a \mid \text{存在 } x, f(x) + g(a) > 0\}, C = \{a \mid g(a) \geq f(1)\}$, 则
 (A) $A \cap C = A$ (B) $A \cap C = C$ (C) $B \cap C = B$ (D) $B \cap C = C$
- 【2009 浙江 10】对于正实数 α , 记 M_α 为满足下述条件的函数 $f(x)$ 构成的集合: 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_2 > x_1$, 有 $-\alpha(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < \alpha(x_2 - x_1)$, 下列结论中正确的是
 (A) 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 则 $f(x)g(x) \in M_{\alpha_1\alpha_2}$
 (B) 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 且 $g(x) \neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)} \in M_{\alpha_1/\alpha_2}$
 (C) 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 则 $f(x) + g(x) \in M_{\alpha_1+\alpha_2}$
 (D) 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 且 $\alpha_1 > \alpha_2$, 则 $f(x) - g(x) \in M_{\alpha_1-\alpha_2}$
- 【2026 成都二诊 11】(多选) 函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, 则
 (A) 当函数 $f(x), g(x)$ 均为奇函数时, $h(x)$ 为奇函数
 (B) 当函数 $f(x), g(x)$ 均为增函数时, $h(x)$ 为增函数
 (C) 当函数 $f(x), g(x)$ 均有最小值时, $h(x)$ 有最小值
 (D) 当函数 $f(x), g(x)$ 均有最大值时, $h(x)$ 有最大值
- 【2022 新高考 I 卷 12】(多选) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f(\frac{3}{2} - 2x), g(2+x)$ 均为偶函数, 则
 (A) $f(0) = 0$ (B) $g(-\frac{1}{2}) = 0$ (C) $f(-1) = f(4)$ (D) $g(-1) = g(2)$
- 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$, 若函数 $g(x) = |f(x-m) + n|$ 为偶函数, 求 m, n 的值.
- 【2005 辽宁 10】已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 实数 $x_1 \neq x_2, \lambda \neq -1, \alpha = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \beta = \frac{x_2 + \lambda x_1}{1 + \lambda}$, 若 $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(\alpha) - f(\beta)|$, 求 λ 的取值范围.
- 【2022 全国乙卷 12】已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x) + g(2-x) = 5, g(x) - f(x-4) = 22$. 若 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, $g(2) = 4$, 求 $\sum_{k=1}^{22} f(k)$.
- 若存在函数 $f(x)$ 满足: 对任意实数 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x^2 + ax) = |x+1| + |x+2|$, 求 a .
- 【2025 高联一试 B9】设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数, $g(x) = (x-1)f(x), h(x) = f(x) + x$. 若 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数, 求 $\frac{f(1)f(3)\cdots f(99)}{f(2)f(4)\cdots f(100)}$ 的值.

10. 设非空集合 S, T 满足 $S \cap T = \emptyset, S \cup T = \mathbb{R}$, 当 $x \in S$ 时, $f(x) = x + 3$, 当 $x \in T$ 时, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, 若函数 $y = f(x)$ 为偶函数, 求 $|S|$ 的最大值.

11. 【2016 上海理 18】设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的三个函数, 证明或证伪:

- (1) 若 $f(x) + g(x), f(x) + h(x), g(x) + h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x), g(x), h(x)$ 中至少有一个为增函数;
- (2) 若 $f(x) + g(x), f(x) + h(x), g(x) + h(x)$ 均为以 T 为周期的函数, 则 $f(x), g(x), h(x)$ 中至少有一个为以 T 为周期的函数.

12. 【2020 上海 16】若存在 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$, 对于任意的 x , 均有 $f(x+a) < f(x) + f(a)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 P , 已知

$$q_1: f(x) \text{ 单调递减且 } f(x) > 0 \text{ 恒成立}$$

$$q_2: f(x) \text{ 单调递增, 存在 } x_0 < 0 \text{ 使得 } f(x_0) = 0$$

- (1) 证明或证伪: q_1 是 “ $f(x)$ 具有性质 P ” 的充分条件;
- (2) 证明或证伪: q_2 是 “ $f(x)$ 具有性质 P ” 的充分条件.

13. 【2010 江苏 20】设 $f(x)$ 是定义在区间 $(1, +\infty)$ 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$. 如果存在实数 a 和函数 $h(x)$, 其中 $h(x)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $h(x) > 0$, 使得 $f'(x) = h(x)(x^2 - ax + 1)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(a)$. 已知函数 $g(x)$ 具有性质 $P(2)$, 给定 $x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 < x_2$, 设 m 为实数. $\alpha = mx_1 + (1-m)x_2, \beta = (1-m)x_1 + mx_2$, 且 $\alpha > 1, \beta > 1$, 若 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$, 求 m 的取值范围.

14. 【2026 “漫游数海” (网络联考) 预测卷 17】设函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}, f(0) \neq 0$, 且对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 都有 $f(2x_1) + f(2x_2) = f(x_1 + x_2)f(x_1 - x_2)$.

- (1) 证明: $f(x)$ 是偶函数;
- (2) 若存在 $a \in \mathbb{R}$, 使 $f(a) = 0$. 证明 $f'(x)$ 是周期函数, 并写出 $y = f'(x)$ 图象的 2 条对称轴.

15. 【2003 上海理 22】已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+T) = Tf(x)$ 成立.

- (1) 设函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象与 $y = x$ 的图象有公共点, 证明: $f(x) = a^x \in M$;
- (2) 若函数 $f(x) = \sin kx \in M$, 求实数 k 的取值范围.

16. 【2005 上海 21】对定义域分别是 D_f, D_g 的函数 $y = f(x), y = g(x)$, 规定: 函数

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x) & \text{当 } x \in D_f \text{ 且 } x \in D_g \\ f(x) & \text{当 } x \in D_f \text{ 且 } x \notin D_g \\ g(x) & \text{当 } x \notin D_f \text{ 且 } x \in D_g \end{cases}$$

- (1) 若函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = x^2$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;
- (2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的值域;
- (3) 若 $g(x) = f(x+\alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha \in [0, \pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $y = f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x) = \cos 4x$, 并予以证明.

17. 【2025 上海春 21】已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D , 对于 $t \in D$, 定义集合 $S_{f(t)} = \{x \mid f(x) \geq f(t)\}$.

(1) 已知 $f(x) = \log_2 x$, 求 $S_{f(16)}$;

(2) 对于集合 A , 若对任意 $x \in A$ 都有 $-x \in A$, 则称 A 是对称集. 若 D 是对称集, 证明: “函数 $y = f(x)$ 是偶函数”的充要条件是“对任意 $t \in D$, 是 $S_{f(t)}$ 对称集”;

(3) 若 $x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - \frac{1}{2}mx^2$, 求 m 的取值范围, 使得对于任意 $t_1 < t_2 \in D$, 都有 $S_{f(t_2)} \subseteq S_{f(t_1)}$.

18. 【2021 上海 21】已知 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 若对任意 $x_2 - x_1 \in S, f(x_2) - f(x_1) \in S$, 则称 $f(x)$ 在 S 上关联.

(1) 判断 $f(x) = 2x - 1$ 是否在 $[0, +\infty)$ 上关联? 是否在 $[0, 1]$ 上关联?

(2) 若 $f(x)$ 在 $\{3\}$ 上关联, 且当 $x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 求解不等式: $2 \leq f(x) \leq 3$.

(3) 证明: “ $f(x)$ 在 $\{1\}$ 上关联且在 $[0, +\infty)$ 上关联”当且仅当 “ $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上关联”.

19. 【2004 江苏 22】已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 满足下列条件: 对任意的实数 x_1, x_2 都有 $\lambda(x_1 - x_2)^2 \leq (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]$ 和 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$, 其中 λ 是大于 0 的常数. 设实数 a_0, a, b 满足 $f(a_0) = 0$ 和 $b = a - \lambda f(a)$.

(1) 证明: $\lambda \leq 1$, 并且不存在 $b_0 \neq a_0$, 使得 $f(b_0) = 0$;

(2) 证明: $(b - a_0)^2 \leq (1 - \lambda^2)(a - a_0)^2$;

(3) 证明: $[f(b)]^2 \leq (1 - \lambda^2)[f(a)]^2$.

20. 【2015 上海理 23】对于定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $g(x)$, 若存在正常数 T , 使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则称 $g(x)$ 为余弦周期函数, 且称 T 为其余弦周期. 已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为 $\mathbb{R}$. 设 $f(x)$ 单调递增, $f(0) = 0, f(T) = 4\pi$.

(1) 验证 $g(x) = x + \sin \frac{x}{3}$ 是以 6π 为周期的余弦周期函数;

(2) 设 $a < b$, 证明对任意 $c \in [f(a), f(b)]$, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = c$;

(3) 证明: “ u_0 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[0, T]$ 上得解,” 的充要条件是 “ $u_0 + T$ 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在区间 $[T, 2T]$ 上的解”, 并证明对于任意 $x \in [0, T]$, 都有 $f(x + T) = f(x) + f(T)$.

21. 【2025 上海 21】已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 对于正实数 a , 定义集合 $M_a = \{x \mid f(x + a) = f(x)\}$.

(1) 若 $f(x) = \sin x$, 判断 $\frac{\pi}{3}$ 是否是 M_π 中的元素, 请说明理由;

(2) 若 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}, M_a \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $y = f(x)$ 是偶函数, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = 1 - x$, 且对任意 $a \in (0, 2)$, 均有 $M_a \subseteq M_2$. 写出 $y = f(x), x \in (1, 2)$ 解析式, 并证明: 对任意实数 c , 函数 $y = f(x) - c$ 在 $[-3, 3]$ 上至多有 9 个零点.

22. 【2025 “Fiddie” 模拟考 19】 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{Z}$. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义 $f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. 记集合 $S_f = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = x\}$, 函数 $g(x) = f(x) - x$.

- (1) 若 $a = -2, b = 4, c = 0$, 求 $g(x)$ 的单调区间与 S_f 的元素个数;
- (2) 记 $x_0 = 1 + |a| + |b| + |c|$. 证明: 当 $x > x_0$ 时, $g(x) > 0$; 当 $x < -x_0$ 时, $g(x) < 0$;
- (3) 证明: $S_f \subseteq \mathbb{Z}$, 且 S_f 只有有限个元素.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.

11. 新答案（来源：1.9 函数的周期性.md）：D

【解题思路】 本题需根据单个函数的和函数的性质，探讨单个函数的性质，不妨将单个函数用和函数来表示，例如

$$f(x) = \frac{[f(x) + g(x)] + [f(x) + h(x)] - [g(x) + h(x)]}{2}$$

若 $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，根据 $f(x)$ 的上述表达式，易推得 $f(x)$ 也是以 T 为周期的函数， $g(x)$ 与 $h(x)$ 的情况同理，从而 为真命题。

然而，若 $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$ 均是增函数，根据 $f(x)$ 的上述表达式，却不能推得 $f(x)$ 是增函数，也就是说 $f(x)$ 可能不是增函数，例如 $f(x) = -x$ ， $g(x) = 2x$ ， $h(x) = 3x$ 。同理， $g(x)$ 与 $h(x)$ 也可能不是增函数。

接下来要判断 的真假，还要考虑 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 是否可能都不是增函数。在之前举例的基础上，可以找到 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 都不是增函数的例子。

例如，

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

所以 为假命题.

【实测数据】本题理科难度为 0.215, 区分度为 0.03, 选 A、B、C、D 占比分别为 14.58%、15.15%、48.58%、21.49%.

【易错警示】三个错误选项中, 选择率最高的是 C. 选择 C 的原因更多是猜测而不是推理: 凭感觉认为命题 为真命题, 且认为所给的两个命题一真一假, 此外, 还有选择题猜答案为 C 的必然性. 选项 A 和选项 B 也较有迷惑性, 前两个层次的考生选 A 多于选 B, 而后两个层次的考生选 B 多于选 A. 排除猜测的成分, 命题 易于推理判断为真, 而命题 则需举出反例说明为假, 考生的选择从某种程度上也是他们对推理形式的掌握情况的反映.

新答案 (来源: 4.2 多个量词的问题 (1) 函数.md): (1) 由已知, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$g(x) = f'(x) = 2(x-a) - 2\ln x - 2\left(1 + \frac{a}{x}\right),$$

$$\text{所以, } g'(x) = 2 - \frac{2}{x} + \frac{2a}{x^2} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(a - \frac{1}{4}\right)}{x^2}.$$

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

在区间 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}\right)$ 上单调递减;

当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 $f'(x) = 2(x-a) - 2\ln x - 2\left(1 + \frac{a}{x}\right) = 0$, 解得 $a = \frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}$.

$$\text{令 } \varphi(x) = -2\left(x + \frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)\ln x + x^2 - 2\left(\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)x - 2\left(\frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}}\right)^2 + \frac{x-1-\ln x}{1+x^{-1}},$$

$$\text{则 } \varphi(1) = 1 > 0, \quad \varphi(e) = \frac{-e(e-2)}{1+e^{-1}} - 2\left(\frac{e-2}{1+e^{-1}}\right)^2 < 0.$$

故存在 $x_0 \in (1, e)$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$.

$$\text{令 } a_0 = \frac{x_0-1-\ln x_0}{1+x_0^{-1}}, \quad u(x) = x-1-\ln x (x \geq 1).$$

由 $u'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ 知, 函数 $u(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } 0 = \frac{u(1)}{1+1} < \frac{u(x_0)}{1+x_0^{-1}} = a_0 < \frac{u(e)}{1+e^{-1}} = \frac{e-2}{1+e^{-1}} < 1.$$

即 $a_0 \in (0, 1)$.

当 $a = a_0$ 时, 有 $f'(x_0) = 0$, $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$.

由 (1) 知, $f'(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故当 $x \in (1, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 从而 $f(x) > f(x_0) = 0$;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 从而 $f(x) > f(x_0) = 0$.

所以, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$.

综上所述, 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.

【解题思路】当 $x \in (1, +\infty)$ 且 $a \in (0, 1)$ 时, 可以证明存在 x_0 , 使得 $f'(x_0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 递增. 所以只需要保证 $f(x_0) = 0$ 即可得欲证结论. 首先根据 $f'(x_0) = 0$ 得到关系式 $a = \frac{x_0 - 1 - \ln x_0}{1 + x_0^{-1}}$ (), 把此关系式代入到 $f(x_0) = 0$ 消去 a , 得到一个关于 x_0 的方程. 我们需要证明方程有解, 并把这个解代入到 (), 证明由 () 定义出来的 $a \in (0, 1)$.

新答案 (来源: 081-100 放缩方法与不等式证明.md):

(1) i. $f'(x) = \frac{x^2 - bx + 1}{x(x+1)^2}$ ($x > 1$), $x > 1$ 时 $h(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$, 因此函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$.

ii. $b \leq 2$ 时, $x > 1 \Rightarrow x^2 - bx + 1 \geq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$, 即 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

$b > 2$ 时, 对 $f(x)$, $f'(x)$ 列表如下:

$|x| \left(1, \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2} \right) | \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2} | \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}, +\infty \right) |$
 $|f'(x)| - |0| + |f(x)| \searrow | \text{极小值} | \nearrow |$

由表可知 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2} \right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}, +\infty \right)$ 上单调递增.

(2) 问其考察的重点实际上是头脑是否清醒, 对 m 进行分类之后放缩一下即可讨论出结果, 至于依据什么来分类, 题干本身已经提示得非常明显了: $m \leq 0$, $0 < m < 1$, $m > 1$.

依题意, $g'(x) = h(x)(x^2 - 2x + 1) = h(x)(x-1)^2 > 0$ ($x > 1$),

因此 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$m \leq 0$ 时,

$$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 \geq mx_2 + (1-m)x_2 = x_2$$

$$\beta = (1-m)x_1 + mx_2 \leq (1-m)x_1 + mx_1 = x_1$$

于是

$$|g(\alpha) - g(\beta)| = g(\alpha) - g(\beta) \geq g(x_2) - g(x_1) = |g(x_1) - g(x_2)|,$$

不满足题意;

$0 < m < 1$ 时,

$$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 < mx_2 + (1-m)x_2 = x_2$$

$$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 > mx_1 + (1-m)x_1 = x_1$$

即 $\alpha \in (x_1, x_2)$, 同理 $\beta \in (x_1, x_2)$.

由 $g(x)$ 单调性可知 $g(\alpha) \in (g(x_1), g(x_2))$, $g(\beta) \in (g(x_1), g(x_2))$, 因此

$$|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|,$$

满足题意;

$m \geq 1$ 时,

$$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2 \leq mx_1 + (1-m)x_1 = x_1$$

$$\beta = (1-m)x_1 + mx_2 \geq (1-m)x_2 + mx_2 = x_2$$

于是

$$|g(\alpha) - g(\beta)| = g(\beta) - g(\alpha) \geq g(x_2) - g(x_1) = |g(x_1) - g(x_2)|,$$

不满足题意;

综上, $m \in (0, 1)$.

12.

13.

14.

15. (1)

(2) 由题意, 若 $f(x) = \sin kx \in M$, 则存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $\sin(kx + kT) = T \sin kx$, 猜测 $T = \pm 1$, 下证明:

若 $|T| < 1$, 可知对任意 T , 存在 x_0 使得 $kx_0 + kT = \pi/2$, 此时 $|T \sin kx_0| \leq |T| < 1 = \sin(kx_0 + kT)$, 不符题意; 若 $|T| > 1$, 可知, 存在 x_0 满足 $kx_0 = \pi/2$, 此时 $x_0 = \pi/(2k)$, 有

$$|\sin(kx_0 + kT)| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + kT\right) \right| \leq 1 < |T \sin kx_0| = |T|$$

不符题意;

当 $T = 1$ 时, 等式化为 $\sin(kx + k) = \sin kx$, 这对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 可得 $k = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$. 同理, 当 $T = -1$ 时, $k = (2p+1)\pi, p \in \mathbb{Z}$

综上 $k = p\pi, p \in \mathbb{Z}$

16. 新答案 (来源: 201-220 零点定理与特殊点.md):

(1) $x = x^2|x-2|$, $x=0$ 显然是该方程的解.

若 $x \geq 2$, $x(x-2) = 1$, 解得 $x = 1 + \sqrt{2}$.

若 $x \neq 0$ 且 $x < 2$, $x(2-x) = 1$, 解得 $x = 1$.

综上, 满足 $x = f(x)$ 的 x 的集合为 $\{0, 1, \sqrt{2}+1\}$.

(2) (2) 问考虑到 $a-2$ 的符号问题, 分成 $a < 1$, $1 \leq a \leq 2$, $a > 2$ 三种情形讨论:

方便起见, 以下只考虑 $[1, 2]$ 区间, 记 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值为 $f(x)_{\min}$.

$$a < 1.$$

$$f(x) = x^2(x-a), \quad f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x-2a) > 0, \quad f(x) \text{ 单调递增},$$

$$f(x)_{\min} = f(1) = 1-a.$$

$$1 \leq a \leq 2.$$

$$f(x) \geq 0 \text{ 且 } f(a) = 0, \quad f(x)_{\min} = 0.$$

$$a > 2.$$

$$f(x) = x^2(a-x), \quad f'(x) = x(2a-3x).$$

若 $2 < a < 3$:

$$1 < x < \frac{2}{3}a \text{ 时 } f'(x) > 0, \quad f(x) \text{ 单调递增}, \quad \frac{2}{3}a < x < 2 \text{ 时 } f'(x) < 0, \quad f(x) \text{ 单调递减},$$

$$f(x)_{\min} = \min\{f(1), f(2)\} = \min\{a-1, 4a-8\}.$$

$$\text{即 } 2 < a \leq \frac{7}{3} \text{ 时, } f(x)_{\min} = 4a-8; \quad \frac{7}{3} < a < 3 \text{ 时, } f(x)_{\min} = a-1.$$

若 $a \geq 3$:

$$f'(x) \geq 0, \quad f(x) \text{ 单调递增}, \quad f(x)_{\min} = f(1) = a-1.$$

综上,

$$f(x)_{\min} = \begin{cases} 1-a, & a < 1, \\ 0, & 1 \leq a \leq 2, \\ 4a-8, & 2 < a < \frac{7}{3}, \\ a-1, & a \geq \frac{7}{3}. \end{cases}$$

新答案 (来源: 3.1 性质的证明 (1) 函数.md): (1) 易见 $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

$$\text{对任意 } x \in \mathbb{R}, \quad h(x+6\pi) = x+6\pi + \sin \frac{x+6\pi}{3} = h(x) + 6\pi,$$

$$\text{所以 } \cos h(x+6\pi) = \cos(h(x) + 6\pi) = \cos h(x),$$

即 $h(x)$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数.

(2) 由于 $f(x)$ 值域是 $\mathbb{R}$, 所以对任意 $c \in [f(a), f(b)]$, c 都是一个函数值, 即有 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0) = c$.

若 $x_0 < a$, 则由 $f(x)$ 单调递增得到 $c = f(x_0) < f(a)$, 与 $c \in [f(a), f(b)]$ 矛盾, 因此 $x_0 \geq a$. 同理可证 $x_0 \leq b$. 故存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = c$.

(3) 若 u_0 是 $\cos f(x) = 1$ 在 $[0, T]$ 的解, 则 $\cos f(u_0) = 1$, 且 $u_0 + T \in [T, 2T]$, $\cos f(u_0 + T) = \cos f(u_0) = 1$, 即 $u_0 + T$ 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上的解.

同理, 若 $u_0 + T$ 是方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上的解, 则 u_0 是方程在 $[0, T]$ 上的解.

以下证明最后一部分结论.

由 (2) 所证可知存在 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = T$, 使得 $f(x_i) = i\pi$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. 而 $[x_i, x_{i+1}]$ 是函数 $\cos f(x)$ 的单调区间, $i = 0, 1, 2, 3$.

与之前类似地可以证明: u_0 是 $\cos f(x) = -1$ 在 $[0, T]$ 上的解当且仅当 $u_0 + T$ 是 $\cos f(x) = -1$ 在 $[T, 2T]$ 上的解. 从而 $\cos f(x) = \pm 1$ 在 $[0, T]$ 与 $[T, 2T]$ 上的解个数相同.

故 $f(x_i + T) = f(x_i) + 4\pi$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

对于 $x \in [0, x_1]$, $f(x) \in [0, \pi]$, $f(x + T) \in [4\pi, 5\pi]$,

而 $\cos f(x + T) = \cos f(x)$, 故 $f(x + T) = f(x) + 4\pi = f(x) + f(T)$.

类似地, 当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$ 时, 有 $f(x + T) = f(x) + f(T)$.

结论成立.

【实测数据】 本题第 (1) 问难度为 0.571, 区分度为 0.61; 第 (2) 问难度为 0.182, 区分度为 0.55; 第 (3) 问难度为 0.076, 区分度为 0.55.

【易错警示】 (1) 不理解新定义;

(2) 本题的证明分两个环节: x_0 的存在性以及其所属的区间. 在作答的考生中, 失分的主要原因是忽略了存在性, 直接证明 $x_0 \in [a, b]$, 也有一些考生说理不够清楚.

(3) 全体得分率很低, 第一层次考生明显好于后面层次考生. 本题需证明两个结论, 虽然前一个结论的证明并不难, 但不少考生整个小题都没有作答. 后一个结论的证明有难度, 在作答的考生中, 没能突破难点的原因在于没有充分利用前面的结论、从中找到解题策略和思路, 有不少考生想到从 $\cos f(x + T) = \cos f(x)$ 着手得到 $f(x + T) = 2k\pi \pm f(x)$ 但可惜的是想当然地把其中的 k 认为是常数, 反映出对函数概念的理解不够深刻.

17. (1) $\{x | x \geq 16\}$

(2) 充分性: 任取 $x \in S_{f(t)}$, 因为 $f(-x) = f(x) \geq f(t)$, 所以 $-x \in S_{f(t)}$, 从而 $S_{f(t)}$ 是对称集.

必要性: 充分性: 设对任意 $t \in D, S_{f(t)}$ 是对称集. 下证 $f(x)$ 是偶函数.

对任意 $x \in D$, 因为 $f(x) \geq f(x)$, 所以 $x \in S_{f(x)}$. (*)

而 $S_{f(x)}$ 是对称集, 所以 $-x \in S_{f(x)}$, 从而 $f(-x) \geq f(x)$.

因为 $f(-x) \geq f(-x)$, 所以 $-x \in S_{f(-x)}$. 而 $S_{f(-x)}$ 是对称集, 所以 $x \in S_{f(-x)}$, 从而 $f(x) \geq f(-x)$.

由 可得 $f(-x) = f(x)$. 所以 $f(x)$ 是偶函数.

或使用反证法: 假设 $f(x)$ 不是偶函数, 即存在 x_0 使得 $f(x_0) \neq f(-x_0)$.

若 $f(x_0) > f(-x_0)$, 取 $t = x_0$, 有 $x_0 \in S_{f(t)}$. 但 $f(-x_0) < f(x_0) = f(t)$, 可得 $-x_0 \notin S_{f(t)}$, 这与 $S_{f(t)}$ 是对称集矛盾.

若 $f(x_0) < f(-x_0)$, 取 $t = -x_0$, 有 $-x_0 \in S_{f(t)}$, 但 $f(x_0) < f(-x_0) = f(t)$, 可得 $x_0 = -(-x_0) \notin S_{f(t)}$, 这与 $S_{f(t)}$ 是对称集矛盾.

故 $f(x)$ 必为偶函数.

(3) $S_{f(t_2)} \subseteq S_{f(t_1)}$ 等价于 $\{x | f(x) \geq f(t_2)\} \subseteq \{x | f(x) \geq f(t_1)\}$, 即对任意 x , 若 $f(x) \geq f(t_2)$, 则 $f(x) \geq f(t_1)$, 当 $f(t_2) \geq f(t_1)$ 时显然满足上述条件. 当 $f(t_2) < f(t_1)$ 时, 由于 $f(x)$ 是连续函数, 故存在 x_0 使得 $f(x) = (f(t_1) + f(t_2))/2$, 此时 $f(x) > f(t_2)$, $f(x) < f(t_1)$, 与上述条件矛盾,

于是 $S_{f(t_2)} \subseteq S_{f(t_1)}$ 当且仅当 $f(t_2) \geq f(t_1)$, 这对任意的 $t_1 < t_2 \in D$ 成立, 于是 $f(x)$ 在定义域上单调递增, 据此可以求出 $m \in [0, e]$.

18. (1) 是. 当 $x_1 - x_2 \geq 0$ 时,

$$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 1) - (2x_2 - 1) = 2(x_1 - x_2) \geq 0.$$

所以 $f(x) = 2x - 1$ 是 $[0, +\infty)$ 关联的.

不是. 当 $x_1 = 1, x_2 = 0$ 时, $x_1 - x_2 = 1 \in [0, 1]$, 但是 $f(x_1) - f(x_2) = 2 \notin [0, 1]$, 所以 $f(x) = 2x - 1$ 不是 $[0, 1]$ 关联的.

(2) 当 $x \in [0, 3)$ 时, 由二次函数性质可知 $f(x) \in [-1, 3)$. 由条件, 当 $x_1 - x_2 = 3$ 时, $f(x_1) - f(x_2) = 3$.

所以当 $x \in [3k, 3k+3)$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, $f(x) \in [-1+3k, 3+3k)$.

因此当 $x \geq 6$ 时, $f(x) \geq 5 > 3$, 不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$ 无解;

当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0 < 2$, 不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$ 无解.

当 $x \in [0, 3)$ 时, 不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$ 的解集为 $[1+\sqrt{3}, 3)$;

当 $x \in [3, 6)$ 时, $f(x) = f(x-3) + 3 = (x-3)^2 - 2(x-3) + 3 = x^2 - 8x + 18$,

所以不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$ 的解集为 $[3, 5]$.

综上, 不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$ 的解集为 $[1+\sqrt{3}, 5]$.

(3) 充分性: 假设 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联且是 $[0, +\infty)$ 关联的.

当 $x_1 - x_2 \in [0, +\infty)$ 时, $f(x_1) - f(x_2) \in [0, +\infty)$,

所以 $f(x)$ 关于 x 单调递增.

当 $y - x = 1$ 时, $f(y) - f(x) = 1$, 所以 $f(x)$ 满足等式 $f(x+1) - f(x) = 1$.

注意到命题 “ $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联的” 等价于 “当 $y - x \in [1, 2]$ 时, $f(y) - f(x) \in [1, 2]$ ”.

当 $x_1 - x_2 \in [1, 2]$ 即 $1 \leq x_1 - x_2 \leq 2$ 时, 由 $f(x)$ 的单调性,

$$f(x_1) - f(x_2) \leq f(x_2 + 2) - f(x_2) \leq [f(x_2 + 2) - f(x_2 + 1)] + [f(x_2 + 1) - f(x_2)] = 2,$$

$$f(x_1) - f(x_2) \geq f(x_2 + 1) - f(x_2) = 1.$$

所以 $f(x_1) - f(x_2) \in [1, 2]$, 即 $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联的, 因此充分性成立.

必要性: 假设 $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联的. 则当 $x_1 - x_2 \in [1, 2]$ 时, $f(x_1) - f(x_2) \in [1, 2]$, 取 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ 满足 $x_1 = x_2 + 1, x_3 = x_2 - 1$, 则 $x_1 - x_2 = 1 \in [1, 2], x_1 - x_3 = 2 \in [1, 2]$. 因此 $1 \leq f(x_1) - f(x_3) \leq 2, 1 \leq f(x_2) - f(x_3) \leq 2$, 故

$$f(x_1) - f(x_2) = [f(x_1) - f(x_3)] - [f(x_2) - f(x_3)] \leq 1.$$

另一方面, 由于 $x_1 - x_2 = 1 \in [1, 2]$, 所以 $1 \leq f(x_1) - f(x_2) \leq 2$, 因此必有 $f(x_1) - f(x_2) = 1$, 所以 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联的.

下面证明 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 关联的. 取 x_1, x_2 使得 $x_1 - x_2 \geq 0$. 则 $x_1 + 1 - x_2 \geq 1$, 构造一系列 $\{y_n\}$ ($n \geq 2$) 使得

$$x_2 = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = x_1 + 1,$$

其中 $y_i - y_{i-1} \in [1, 2]$ ($i = 1, 2, \cdots, n$). 则由 $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联可知

$$f(x_1 + 1) - f(x_2) = \sum_{k=1}^{n-1} [f(y_{k+1}) - f(y_k)] \geq n - 1 \geq 1.$$

由 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联的, 则 $f(x_1 + 1) = f(x_1) + 1$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 关联的.

根据上述证明过程, 不难得到如下结论: 如果 $f(x)$ 是 $\{k\}$ 关联的, 则对于任意正整数 n , $f(x)$ 也是 $\{nk\}$ 关联的.

19.

20.

21.

22. (1) 当 $a = -2, b = 4, c = 0$ 时

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x, g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x, g'(x) = 3x^2 - 4x + 3 = 3(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{5}{3} > 0$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增.

因为 $g(0) = 0$, 即 $f_1(0) = f(0) = 0$, 所以 $0 \in S_f$.

当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 即 $f(x) > x > 0$ (*)

将 (*) 式的 x 替换为 $f(x)$, 得 $f(f(x)) > f(x) > 0$, 即 $f_2(x) > f_1(x) > x > 0$, 一直下去有

$$f_n(x) > f_{n-1}(x) > \cdots > f(x) > x > 0$$

故 $x \notin S_f$.

当 $x < 0$ 时, 同理可证 $x \notin S_f$

综上, $S_f = \{0\}$, S_f 的元素个数是 1.

(2) 证明. 当 $x > x_0 = 1 + |a| + |b| + |c|$ 时, 由 $x_0 \geq 1$ 得 $x > 1$, 所以

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c - x > (1 + |a| + |b| + |c|)x^2 - |a|x^2 - |b|x - |c| - x \\ &= (|b| + 1)(x^2 - x) + |c|(x^2 - 1) > 0 \end{aligned}$$

所以 $g(x) > 0$

当 $x < -x_0 = -(1 + |a| + |b| + |c|) \leq -1$ 时,

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c - x < -(1 + |a| + |b| + |c|)x^2 + |a|x^2 - |b|x + |c| - x \\ &= -(|b| + 1)(x^2 + x) + |c|(1 - x^2) < 0 \end{aligned}$$

所以 $g(x) < 0$

□

(3) 证明. 使用反证法, 若 S_f 不包含于 $\mathbb{Z}$, 则有一个有理数 $r = \frac{p}{q} \in S_f$, 其中 $p \neq 0, q \geq 2, \frac{p}{q}$ 是既约分数.

因为 $f(\frac{p}{q}) = \frac{p^3 + aqp^2 + bq^2p + cq^3}{q^3}$, 而 $q \nmid aqp^2 + bq^2p + cq^3, q \nmid p$

故 $\frac{p^3 + aqp^2 + bq^2p + cq^3}{q^3}$ 是既约分数.

对于既约分数 $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, p \neq 0, q \in \mathbb{N}^*, q \geq 2$), 记 $R(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$. 所以 $R(f(\frac{p}{q})) = \frac{1}{q^3} = [R(\frac{p}{q})]^3$.

即对任意 $r \in \mathbb{Q}$, 当 r 不是整数时, 都有 $R(f(r)) = [R(r)]^3$.

将 r 替换为 $f_n(\frac{p}{q})$ 可得 $R(f_{n+1}(\frac{p}{q})) = [R(f_n(\frac{p}{q}))]^3$. 从而 $R(f_n(\frac{p}{q})) = \frac{1}{q^{3^n}}$.

则对任意 $n \in \mathbb{N}^*, R(f_n(r)) < R(r)$, 不可能有 $f_n(r) = r$, 矛盾.

因此, $S_f \subseteq \mathbb{Z}$.

由第 (2) 问结论, 当 $|x| > x_0$ 时, $|f(x)| > |x| > x_0$, 所以

$$|f_n(x)| > |f_{n-1}(x)| > \cdots > |f_2(x)| > |f_1(x)| > |x| > x_0$$

所以当 $|x| > x_0$ 时, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $|f_n(x)| > |x|$, 不可能有 $f_n(x) = x$, 即 $x \notin S_f$.

因此, $S_f \subseteq (-x_0, x_0)$.

而 $[-x_0, x_0] \cap \mathbb{Z}$ 只有有限个元素, 故 S_f 也只有有限个元素.

□

Fiddie 评: 第 (3) 问解答中引入 $R(x)$ 是为了获取一个有理数的“分母部分”

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 互质}, q \neq 1 \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \text{ 或 } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

叫做 Riemann 函数. 证明 $S_f \subseteq \mathbb{Z}$ 时, 用到的思想与“有理根定理”比较类似.

本题改编自 GTM241, Exercise 0.6, 原题引入了诸多记号, 比较复杂. 本题设计时为照顾考生, 第 (1) 问尽可能的亲民, 同时整题以初等的形式呈现. 通过几个小问的铺垫引导考生解决最终的命题: 三次函数 $f(x)$ 的各阶有理不动点必为整数, 并且个数有限. 通过提升最后一题的分值 (原卷为 19 分, 本题仍遵照高考要求定为 17 分), 希望能够鼓励学生勇于尝试压轴题. 在设计过程中, 通过解答第 (1) 问的第二步, 可以初步了解通过对数列 $\{f_n(x)\}$ 进行不等式迭代的解决方法, 为第 (3) 问的解决打下基础.

第(2)问是一个比较经典的问题,对于多项式函数 $p(x)$, 一定有 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |p(x)| = +\infty$, 即对任意 $M > 0$, 存在 x_0 使得当 $|x| > x_0$, 有 $|f(x)| > M$. 本题给出了这里的 x_0 的显式表达式, 所以解决第(2)问只需用不等式作差和绝对值不等式的知识来证明, 不要求求导.

第(3)问需要观察从有理数出发的迭代数列 $\{f_n(\frac{p}{q})\}$ 的特征.

第一章 函数

1.3 函数的简单特性

C 组

1. 分别写出函数 $y = \cos x + \cos(x + \alpha)$, $y = \cos x \cos(x + \alpha)$, $y = \frac{\cos x}{\cos(x + \alpha)}$ ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) 的图象的一个对称中心.
2. 函数 $y = (x + a)(\cos 2x - \sin x)$ 的图象是否可能存在对称中心? 是否可能存在垂直于 x 轴的对称轴?
3. 【2025 集英苑 5 月(网络联考) 14】已知 $a > 0$, 若函数 $f(x) = \frac{b}{e^x + a}$ 与 $g(x) = \ln(\frac{b}{x} - a)$ 图像的对称中心重合, 则 b 的最小值是 (Δ).
4. 若函数 $f(x) = x^4 + 4x^3 + ax (a \in \mathbb{R})$ 的图象存在与 x 轴垂直的对称轴, 求 $f(x)$ 的最小值.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

杂 题

- 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的最小正周期分别是 T_1 和 T_2 , 已知 $y = f(x) + g(x)$ 的最小正周期为 1, 则下列选项中可能成立的是
 (A) $T_1 = 1, T_2 = 2$ (B) $T_1 = \frac{1}{2}, T_2 = \frac{3}{4}$ (C) $T_1 = \frac{3}{4}, T_2 = \frac{5}{4}$ (D) $T_1 = \frac{3}{2}, T_2 = 3$
- 【2025 新高考 I 卷 4 改编】若点 $(a, 0)$ 是函数 $y = 2 \tan(x - \frac{2\pi}{3})$ 的图象的一个对称中心, 求正数 a 的最小值.
- 【2024 新高考 II 卷 6】设函数 $f(x) = a(x-1)^2 - 1, g(x) = \cos x + 2ax$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 求 a 的值.
- 【2026 “集英苑” 5 月模拟考 8】若 $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{a}{x^2 + bx + c}$ 是奇函数, 求 a .
- 【2026 长沙适应性考试 10】(多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $f(xy) = \frac{f(x)}{y} + \frac{f(y)}{x}$. 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 则
 (A) $f(1) = 0$ (B) $f(x)$ 是偶函数
 (C) 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) > 0$ (D) $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极值点
- 【2025 浙江 Z20 联考 11】(多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且满足 $f(\cos x) = 1 - \cos nx$, 则下列说法正确的是
 (A) 若 $n = 2$, 则函数 $f(x)$ 的最大值为 2 (B) 若 $n = 3$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数
 (C) 存在 $n \in \mathbb{Z}$, 使得 $f(\sin x) = 1 - \sin nx$ (D) 若 $f(\sin x) + f(\cos x) = 2$, 则 $n = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}$
- 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 若存在常数 $T > 0$ 与 H , 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+T) = f(x) + H$, 则称函数 $f(x)$ 是广义周期函数, 证明或反驳:
 (1) 若 $f(x)$ 是广义周期函数, 则存在实数 k , 使得 $f(x) - kx$ 是周期函数
 (2) 若 $f(x)$ 有两个不同的对称中心, 则 $f(x)$ 是广义周期函数
 (3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是广义周期函数, 则 $f(x) + g(x)$ 也是广义周期函数
- (多选) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 设函数 $g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (a \in \mathbb{R})$, 则下列说法正确的是
 (A) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 则存在实数 a , 使得 $g_a(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增
 (B) 对任意实数 a , 存在 $\mathbb{R}$ 上的单调递减函数 $f(x)$, 使得 $g_a(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增
 (C) 对于任意实数 a , 若存在实数 $M_1 > 0$, 使得 $|f(x)| < M_1$, 则存在实数 $M_2 > 0$, 使得 $|g_a(x)| < M_2$
 (D) 若函数 $g_a(x)$ 满足: 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $g_a(x) \geq 0$, 当 $x \in (-\infty, a)$ 时, $g_a(x) \leq 0$, 则 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的最小值.

9. 已知函数 $f(x), g(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 若 $f(x+2) - g(1-x) = 2, f'(x) = g'(x+1)$, 且 $g(x+1)$ 为奇函数, 求 $\sum_{k=1}^{2021} f(k)g(k)$.
10. 【2023 青岛一模 16】设函数 $f(x)$ 是定义在整数集 $\mathbb{Z}$ 上的函数, 且满足 $f(0) = 1, f(1) = 0$, 对任意的 $x, y \in \mathbb{Z}$ 都有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 求 $\frac{f(1^2 + 2^2 + \cdots + 2023^2)}{f(1^2) + f(2^2) + \cdots + f(2023^2)}$.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.

第一章 函数

1.3 函数的简单特性