
第一章 函数

1.2 基本初等函数

第一章 函数

1.2 基本初等函数

习 题

A 组

- 【2017 浙江 5】**若函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 M , 最小值是 m , 则 $M - m$ 的值

(A) 与 a 有关, 与 b 有关 (B) 与 a 有关, 与 b 无关
(C) 与 a 无关, 与 b 有关 (D) 与 a 无关, 与 b 无关
- 【2016 浙江文 6】**已知函数 $f(x) = x^2 + bx$, 则 “ $b < 0$ ” 是 “ $f(f(x))$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等” 的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x < 0 \\ bx^2 - ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 “ $ab < 0$ ” 是 “ $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为单调函数” 的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【2009 福建 10】**已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 对任意非零实数 a, b, c, m, n, p , 关于 x 的方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 的解集都不可能是

(A) $\{1, 2\}$ (B) $\{1, 4\}$ (C) $\{1, 2, 3, 4\}$ (D) $\{1, 4, 16, 64\}$
- 【2015 陕西理 12】**对二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a 为非零整数), 四位同学分别给出下列结论, 其中有且只有一个结论是错误的, 则错误的结论是

(A) 3 是 $f(x)$ 的极值 (B) 1 是 $f(x)$ 的极值点
(C) -1 是 $f(x)$ 的零点 (D) 点 $(2, 8)$ 在曲线 $y = f(x)$ 上
- 【2013 重庆理 6】**若 $a < b < c$, 则函数 $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ 的两个零点分别位于区间

(A) (a, b) 和 (b, c) 内 (B) $(-\infty, a)$ 和 (a, b) 内
(C) (b, c) 和 $(c, +\infty)$ 内 (D) $(-\infty, a)$ 和 $(c, +\infty)$ 内

7. 【2022 浙江 9】已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 若对任意 $x \in \mathbb{R}, a|x-b| + |x-4| - |2x-5| \geq 0$, 则
- (A) $a \leq 1, b \geq 3$ (B) $a \leq 1, b \leq 3$ (C) $a \geq 1, b \geq 3$ (D) $a \geq 1, b \leq 3$
8. 【2015 湖北理 6】已知函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, f(x) \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的增函数, 设 } g(x) = f(x) - \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
 $f(ax)$ ($a > 1$), 则
- (A) $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ (B) $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$
 (C) $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$ (D) $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$
9. 【2014 浙江理 6】已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 且 $0 < f(-1) = f(-2) = f(-3) \leq 3$, 则
- (A) $c \leq 3$ (B) $3 < c \leq 6$ (C) $6 < c \leq 9$ (D) $c > 9$
10. 【2019 全国 II 卷理 12】设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$, 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 求 m 的取值范围.
11. 【2007 浙江理 10】已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \geq 1 \\ x, & |x| < 1 \end{cases}$, $g(x)$ 是二次函数, 若 $f(g(x))$ 的值域是 $[0, +\infty)$, 求 $g(x)$ 的值域.
12. 记函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $g(a)$, 讨论 $g(a)$ 的最小值与最小值点.
13. 【2004 江苏 12】已知函数 $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$), 区间 $M = [a, b]$ ($a < b$), 集合 $N = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$, 求使得 $M = N$ 成立的实数对 (a, b) 的个数.
14. 【2014 湖北理 10】已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}(|x-a^2| + |x-2a^2| - 3a^2)$. 若对任意实数 x , 有 $f(x-1) \leq f(x)$, 求实数 a 的取值范围.
15. 【2006 湖北 10】关于 x 的方程 $(x^2-1)^2 - |x^2-1| + k = 0, k$ 为实数, 求方程可能的不同的实根数.
16. 【2018 全国 I 卷 9】已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0. \end{cases} g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 求 a 的取值范围.
17. 【2012 全国 I 卷文 11 加强】若对任意 $x \in (0, \frac{1}{3}]$, $8^x \leq \frac{3}{2} + \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
18. 【2011 山东理 16】已知函数 $f(x) = \log_a x + x - b$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$). 当 $2 < a < 3 < b < 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点 $x_0 \in (n, n+1), n \in \mathbb{N}^*$, 求 n .
19. 【2009 重庆文 10】把函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的图象 C_1 向右平移 u 个单位长度, 再向下平移 v 个单位长度后得到图象 C_2 . 若对任意 $u > 0$, 曲线 C_1 与 C_2 至多只有一个交点, 求 v 的最小值.
20. 【2024 新高考 II 卷 8】设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 求 $a^2 + b^2$ 的最小值.

21. 【2017 浙江 17】已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \left| x + \frac{4}{x} - a \right| + a$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值是 5, 求 a 的取值范围.

22. 【2019 浙江 16】已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = ax^3 - x$. 若存在 $t \in \mathbb{R}$, 使得 $|f(t+2) - f(t)| \leq \frac{2}{3}$, 求实数 a 的最大值.

23. 【2017 江苏 14】设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上且周期为 1 的函数, 在区间 $[0, 1)$ 上, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in D \\ x, & x \notin D \end{cases}$, 其中集合 $D = \left\{ x \mid x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$, 求方程 $f(x) - \lg x = 0$ 的解的个数.

24. 作下述函数的草图.

$$(1) \frac{3x-7}{x-4}$$

$$(2) y = x^2 - 2|x| + 2$$

$$(3) y = |\log_2 |x||$$

$$(4) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$(5) y = \sin |x| + |\sin x|$$

$$(6) y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$$

$$(7) y = x - [x]$$

25. 解答下述问题:

(1) (A) 作 $y = |x-1| + |x-3|$ 的图象, 并求其最小值;

(2) (A) 求 $y = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ 的最小值与最小值点, 其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$;

(3) (A) 分别作函数 $y = |2x-3| + 3|x-4|$ 与 $y = |2x-3| + |x-4|$ 的图象, 并求出这两个函数的最小值与最小值点;

(4) (A) 讨论函数 $y = p|x-a| + q|x-b| (p, q > 0, a \neq b)$ 的最小值与最小值点;

(5) (B) 求 $f(x, k) = 2\sqrt{1+k^2}|k-2x| + 2\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|\frac{1}{k} + 2x|$ 的最小值.

26. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$, 解答下述问题:

(1) (A) 设 $a = 1$, 证明:

i. “ $b^2 - 3c > 0$ ” 是 “ $f(x)$ 有三个不同零点” 的必要不充分条件;

ii. “ $b^2 - 3c > 0$ ” 是 “存在三个不同的实数 x_1, x_2, x_3 , 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ ” 的充要条件;

(2) (B) 已知函数 $f(x) = x^{100} + ax^{99} + bx^{98} + c (a, b, c \in \mathbb{R})$, 求 $f(x)$ 零点个数的可能值构成的集合;

(3) (B) 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + bx (a, b \in \mathbb{R})$. 若存在实数 b , 使 $f(x)$ 有三个不同的零点 $x_1, x_2, x_3, x_1 < x_2 < x_3$, 求 a 的取值范围;

(4) (B) 假设 $f(x)$ 有两个极值点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$. 除 A, B 外, 直线 $y = f(x_1), y = f(x_2)$ 分别与曲线 $y = f(x)$ 交于 $(x_3, f(x_3)), (x_4, f(x_4))$, 设 $y = f(x)$ 图象对称中心的坐标为 $(x_0, f(x_0))$, 将 $x_0, x_1, \dots, x_4$ 按照横坐标从小到大排列得到 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_5}$, 证明该数列是等差数列;

(5) (A) 写出一般三次方程的韦达定理;

27. 【2012 江苏 18】已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$. 设 $h(x) = f(f(x)) - c$, 其中 $c \in [-2, 2]$, 讨论函数 $h(x)$ 的零点个数.

28. 【2013 安徽 19】设函数 $f(x) = ax - (1 + a^2)x^2$, 其中 $a > 0$, 区间 $I = \{x \mid f(x) > 0\}$, 其中区间 (α, β) 的长度定义为 $\beta - \alpha$. 给定常数 $k \in (0, 1)$, 当 $1 - k \leq a \leq 1 + k$ 时, 求 I 长度的最小值.

29. 【2005 全国 III 卷 22】已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$. 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a$, $x \in [0, 1]$. 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

30. 【2007 浙江 22】设 $f(x) = \frac{x^3}{3}$, 对任意实数 t , 记 $g_t(x) = t^{\frac{2}{3}}x - \frac{2}{3}t$, 求证:

(1) 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq g_t(x)$ 对任意正实数 t 成立;

(2) 有且仅有一个正实数 x_0 , 使得 $g_8(x_0) \geq g_t(x_0)$ 对任意正实数 t 成立.

31. 【2009 天津文 21】设函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m^2 - 1)x$ ($x \in \mathbb{R}$), 其中 $m > 0$. 已知函数 $f(x)$ 有三个互不相同的零点 $0, x_1, x_2$, 且 $x_1 < x_2$. 若对任意的 $x \in [x_1, x_2]$, $f(x) > f(1)$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

32. 【2019 江苏 19】设函数 $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) (A) 若 $a \neq b, b = c$, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值;

(2) (B) 若 $a = 0, 0 < b \leq 1, c = 1$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M , 求证: $M \leq \frac{4}{27}$.

1. B.

新答案 (来源: 1.4 二次函数与二次不等式.md): B

【解题思路】思路 1: 函数概念是高中数学的基础, 最大 (小) 值的概念是函数性质中的重点, 此题的核心就是要理解最大 (小) 值的本质, M 究竟是什么? 其实它是一个特殊的函数值 $f(x_1)$, 它满足: 对任意的 $x \in [0, 1]$ 都有 $f(x) \leq f(x_1) = M (x_1 \in [0, 1])$. 同理 $m = f(x_2)$, 那么 $M - m = f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + ax_1 - x_2^2 - ax_2$, 明显能给出正确结论 B.

思路 2: 从函数的图形特征中我们也可以分析思考, 函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 中, b 的变化是函数 $y = x^2$ 图形上下平移, 同时影响函数值的变化, 而 $M - m$ 是两个函数值的差, 所以与 b 无关. a 的变化是函数 $y = x^2$ 图形左右平移, 分别影响了最大值和最小值, 所以与 a 有关. 正确答案是 B.

2. **A.** 充分性满足: 函数 $f(x) = x^2 + bx$ 的顶点横坐标为 $x_0 = -\frac{b}{2}$, 最小值为 $f(x_0) = -\frac{b^2}{4}$, 值域为 $\left[-\frac{b^2}{4}, +\infty\right)$. 当 $b < 0$ 时, $x_0 > 0$, 并且 $x_0 \geq -\frac{b^2}{4}$, 于是存在 x_1 使 $f(x_1) = x_0$, 从而 $f(f(x_1)) = f(x_0) = -\frac{b^2}{4}$, 这就是 $f(f(x))$ 的最小值, 所以 $f(f(x))$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等, 因此 $b < 0$ 是充分条件.

必要性不满足. 取 $b = 0$, 则 $f(x) = x^2$, $f(f(x)) = x^4$, 二者的最小值均为 0, 而 $b < 0$ 不成立. 因此选 A.

3. **A.** 充分性满足, 假设 $ab < 0$, 可知 $g_1(x) = ax^2 + bx$ 的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$, $g_2(x) = bx^2 - ax$ 的对称轴为 $x = \frac{a}{2b}$. 若 $ab < 0$, 则 $\frac{a}{2b} < 0 < -\frac{b}{2a}$, 当 $a > 0$ 时, $g_1(x), g_2(x)$ 分别在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a < 0$ 时, $g_1(x), g_2(x)$ 分别在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $g_1(x) = g_2(x) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调.

必要性不满足, 假设 $a = 0, b = 1$, 于是 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, $f(x)$ 显然在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 而 $ab = 0$, 所以 $ab < 0$ 不成立. 因此选 A.

4. **D.** 令 $u = f(x)$, 则原方程等价于 $mu^2 + nu + p = 0$. 由于 $m \neq 0$, 关于 u 的方程至多有两个实根, 记为 u_1, u_2 . 于是原方程的解由方程 $f(x) = u_1$ 与 $f(x) = u_2$ 得到, 每个方程至多有两个实根, 所以原方程至多有四个不同实根. 通过图象可知, 如果原方程有四个不同实根, 那么这四个解关于 $f(x)$ 的对称轴对称, 故选项 D 是不可能的.

5. **C.** 假设 A 选项结论错误, 其余选项结论正确, 由 BC 结论正确可设 $f(x) = a(x-1)^2 - 4a$, 代入 D 选项结论, 得到 $a = -\frac{8}{3}$, 与题设中 a 是非零整数矛盾, 故 A 选项错误.

假设 B 选项结论错误, 其余选项结论正确, 由 A 结论正确可设 $f(x) = a(x-h)^2 + 3$, 代入 CD 选项结论得到 $\begin{cases} a(h+1)^2 + 3 = 0 & (1) \\ a(h-2)^2 + 3 = 8 & (2) \end{cases}$, $(1) \times \frac{5}{3} + (2)$ 得 $\frac{a}{3}(8h^2 - 2h + 17) = 0$, 由于 a 是非零整数, 因此 $8h^2 - 2h + 17 = 0$, 显然无解, 矛盾. 于是 B 选项错误.

假设 C 选项结论错误, 其余选项结论正确, 由 AB 结论正确可设 $f(x) = a(x-1)^2 + 3$, 代入 D 选项结论解得 $a = 5$. 再验证 C 选项结论是错误的, 于是 C 选项正确.

假设 D 选项结论错误, 其余选项结论正确, 由 AB 结论正确可设 $f(x) = a(x-1)^2 + 3$, 代入 C 选项结论解得 $a = -\frac{3}{4}$, 与题设中 a 是非零整数矛盾, 故 D 选项错误.

新答案 (来源: 1.6 零点与图象.md): A

【解题思路】因为 $f(x)$ 是二次函数, 且 $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$, $f(b) = (b-c)(b-a) < 0$, $f(c) = (c-a)(c-b) > 0$, 所以 $f(x)$ 有两个零点, 且零点分别在区间 (a, b) 和 (b, c) 内.

6. **A.** 可知 $f(x)$ 的对称轴为 $x = x_0 = \frac{a+b+c}{3} \in (a, c)$, 而 $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$, $f(c) = (c-a)(c-b) > 0$, 于是 $f(x)$ 的两个零点位于 $(a, x_0), (x_0, c)$ 之间, 分别记为 x_1, x_2 , 又 $f(b) = (b-a)(b-c) < 0$, 所以 $b \in (x_1, x_2)$, 于是 $x_1 \in (a, b), x_2 \in (b, c)$.

7. **D.** 考虑 $a|x-b| \geq |2x-5| - |x-4| = g(x)$, 画出该函数图象.

8. **B.**

可知 $g(0) = 0$, 当 $x > 0$ 时有 $ax > x$, 而 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 所以 $g(x) = f(x) - f(ax) < 0$; 同理可得当 $x < 0$ 时有 $g(x) > 0$, 因此 $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}x$, 故选 B.

9. **C.** 设 $r = f(-1) = f(-2) = f(-3)$, 则 $f(x) - r$ 的三个零点为 $-1, -2, -3$, 且最高次项系数为 1, 于是可以设 $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) + r$, 可知 $0 < r \leq 3$, 而 $c = r + 6$, 所以 $6 < c \leq 9$, 故选 C.

10. $(-\infty, \frac{7}{3}]$

11. $[0, +\infty)$. 画出 $y = f(x)$ 的图象. 由于 $g(x)$ 是二次函数, 故 $g(x)$ 的值域呈 $[p, +\infty)$ 或 $(-\infty, q]$ 的形式, 通过分析 $y = f(x)$ 的图象可得出 $g(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$.

12. $g(a)_{\min} = 3 - 2\sqrt{2}$, 最小值点为 $a = 2(\sqrt{2} - 1)$. 设 $h(x) = x^2 - ax = x(x-a)$. 若 $a \leq 0$, 则 $h(x) \geq 0$ 且 $h'(x) = 2x - a > 0$, 故 $g(a) = h(1) = 1 - a \geq 1$. 若 $a \geq 2$, 则 $h(x) \leq 0$ 且 $|h(x)| = ax - x^2$ 在 $[0, 1]$ 上递增, 故 $g(a) = a - 1 \geq 1$.

当 $0 \leq a \leq 2$ 时, $h(x)$ 的零点为 $0, a$, 且其绝对值的最大值只需比较端点及顶点, 得到 $g(a) = \max \left\{ \frac{a^2}{4}, |1-a| \right\}$. 在 $0 \leq a \leq 1$ 时, 令两者相等, 得 $\frac{a^2}{4} = 1 - a$, 即 $a = 2(\sqrt{2} - 1)$, 此时 $g(a) = \frac{a^2}{4} = 3 - 2\sqrt{2}$. 在 $1 \leq a \leq 2$ 时, $g(a) \geq \frac{1}{4} > 3 - 2\sqrt{2}$. 结合前两种情形, 故最小值为 $3 - 2\sqrt{2}$, 且仅在 $a = 2(\sqrt{2} - 1)$ 时取得.

13. **0.** 因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递减, 所以 $f(x)$ 在 M 上的值域为 $[f(b), f(a)]$, 而 $M = N$, 则 $\begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases}$, 即 $|a|b = |b|a = -a - b$, 由 $|a|b = |b|a$ 与题设可得 a, b 同为正数或负数, 当 a, b 同为正数时, $|a|b > 0 > -a - b$; 当 a, b 同为负数时, $|a|b < 0 < -a - b$, 均不可能成立. 故不存在满足条件的实数对 (a, b) , 个数为 0.

14. $[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$.

15. **0, 2, 4, 5, 8.** 令 $t = |x^2 - 1| \geq 0$, 则方程化为 $t^2 - t + k = 0(*)$, 画出 $g(x) = |x^2 - 1|$ 的图象备用.

当 $k > \frac{1}{4}$ 时, 方程 (*) 无实数根, 于是原方程的实根数为 0;

当 $k = \frac{1}{4}$ 时, 解方程 (*) 得到 $t = \frac{1}{2}$, 代回原方程可解出 4 个不同的实根;

当 $0 < k < \frac{1}{4}$ 时, 解方程 (*) 得到两个不同的根 $t_1, t_2 \in (0, 1)$, 将 t_1, t_2 代回原方程, 分别得到 4 个实根, 于是原方程不同的实数解共有 8 个;

当 $k = 0$ 时, 解方程 (*) 得到两个不同的根 $t_1 = 0, t_2 = 1$, 将 t_1, t_2 代回原方程, 分别得到 2, 3 个实根, 共 5 个;

当 $k < 0$ 时, 解方程 (*) 得到一个大于 1 的根, 将其代入原方程可解出 2 个实根。

因此可能的不同实根数为 0, 2, 4, 5, 8。

16. 作出 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = -x - a$ 的图象。显然, 当且仅当 $-a \leq 1$, 即 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 的图象与直线 $y = -x - a$ 有两个交点, 故当且仅当 $a \geq -1$ 时, $g(x)$ 存在两个零点。

17. $\left[\frac{1}{9}, 1\right)$ 。若 $a > 1$, 则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\log_a x + \frac{3}{2} \rightarrow -\infty, 8^x \rightarrow 1$, 不符题意。故 $0 < a < 1$ 。

于是 $\log_a x + \frac{3}{2}$ 在 $(0, \frac{1}{3}]$ 上单调递减, 而 8^x 在该区间上单调递增, 故原不等式成立当且仅当 $8^{\frac{1}{3}} \leq \frac{3}{2} + \log_a \frac{1}{3}$, 解得 $a \in [\frac{1}{9}, 1)$ 。

评: 在解最后一步的不等式时, 建议使用换底公式将 a 化到真数位置, 便于处理, 即将不等式等

价变形为 $\frac{1}{2} \leq \frac{\log_3 \frac{1}{3}}{\log_3 a}$ 。

18. 2. 可知函数 $f(x) = \log_a x + x - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $f(2) = \log_a 2 + 2 - b < 3 - b < 0, f(3) = \log_a 3 + 3 - b > 4 - b > 0$, 由零点存在性定理可知 $f(x)$ 在 $(2, 3)$ 上存在唯一零点, 于是 $n = 2$ 。

19. C_2 对应的函数是 $g(x) = f(x-u) - v = (x-u)^3 - 3(x-u) - v$, 由题意, 对任意 $u > 0$, 函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 至多只有一个零点, 化简 $h(x)$ 得到 $h(x) = 3ux^2 - 3u^2x + u^3 - 3u + v$. 这是二次函数, 于是 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上至多只有一个零点等价于

$$\Delta = 9u^4 - 12u(u^3 - 3u + v) = -3u^4 + 36u^2 - 12uv \leq 0$$

即 $-u^3 + 12u - 4v \leq 0$. 于是题目条件等价于: 对任意 $u > 0$, 都有 $-u^3 + 12u - 4v \leq 0$. 即 $4v \geq -u^3 + 12u = g(u)$, 求导可解得 $g(u)$ 的最大值为 $g(2) = 16$, 所以只需要 $4v \geq g_{\max}$, 解得 $v \geq 4$. 故 v 的最小值为 4.

20. $\frac{1}{2}$. 注意到 $h_1(x) = x + a, h_2(x) = \ln(x+b)$ 均为单调递增函数, 且一定在定义域内存在零点, 于是这两个零点必定重合, 即 $-a = 1 - b$, 理由如下:

当 $x \in (-b, 1-b)$ 时, $\ln(x+b) < 0$; 当 $x \in (1-b, +\infty)$ 时, $\ln(x+b) > 0$. 由题意知, 当 $x \in (-b, 1-b)$ 时, $x+a < 0$; 当 $x \in (1-b, +\infty)$ 时, $x+a > 0$, 因此 $1-b+a=0$.

于是 $a^2 + b^2 = a^2 + (a+1)^2 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a = -\frac{1}{2}$ 时等号成立. 所以 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

评: 解答本题的关键是发现参数 a 和 b 之间的关系. 与本题结构上相似的题:

【2012 浙江 17】设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $x > 0$ 时 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的值.

【2021 新高考 II 卷 22 (1)】已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

21. $a \in (-\infty, \frac{9}{2}]$. $|x + \frac{4}{x} - a|$ 可视为 $y = x + \frac{4}{x}$ 图象上的点到 $y = a$ 的竖直距离, 而 $x + \frac{4}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上的值为 $[4, 5]$, 故当 $a \in (-\infty, \frac{9}{2}]$ 时, $|x + \frac{4}{x} - a|$ 的最大值为 $|5 - a|$; 此时 $|5 - a| + a = 5$, 满足题意. 当 $a \in (\frac{9}{2}, +\infty)$ 时, $|x + \frac{4}{x} - a|$ 的最大值为 $|4 - a|$, 此时 $|4 - a| + a = 2a - 4 = 5$, 解得 $a = \frac{9}{2}$, 不符合假设.

综上, $a \in (-\infty, \frac{9}{2}]$.

22. $\frac{8}{3}$ $f(t+2) - f(t) = a(6t^2 + 12t + 8) - 2$. 设 $g(t) = 6t^2 + 12t + 8 = 6(t+1)^2 + 2$, 则 $g(t)$ 的值域是 $[2, +\infty)$. 由条件, 存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $-\frac{2}{3} \leq ag(t) - 2 \leq \frac{2}{3}$, 即 $\frac{4}{3} \leq ag(t) \leq \frac{8}{3}$. 因此 $a > 0$, 从而题目条件等价于: 存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $\frac{4}{3a} \leq g(t) \leq \frac{8}{3a}$.

又因为 $g(t)$ 的值域是 $[2, +\infty)$, 所以只需让 $[\frac{4}{3a}, \frac{8}{3a}] \cap [2, +\infty) \neq \emptyset$, 即 $\frac{8}{3a} \geq 2$, 得 $a \leq \frac{4}{3}$. 故 a 的最大值是 $\frac{4}{3}$.

23. $\frac{8}{3}$

24.

25.

26.

27. 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上递增, 在 $(-1, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 且 $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$. 此外, $f(2) = f(-1) = 2$, $f(-2) = f(1) = -2$ (此处最好画出图象备用)

方程 $h(x) = 0$ 等价于 $f(f(x)) = c$. 令 $y = f(x)$, 先求方程 $f(y) = c$ 的根, 再求每个 y 对应的方程 $f(x) = y$ 的根数.

当 $-2 < c < 2$ 时, 方程 $f(y) = c$ 有三个互不相同的根 y_1, y_2, y_3 , 且这三个根均落在 $(-2, 2)$ 上, 于是 $f(x) = y$ 有 9 个根.

当 $c = 2$ 时, 方程 $f(y) = 2$ 的不同实根为 $y = -2, 1$. 方程 $f(x) = -2$ 有两个不同实根, 方程 $f(x) = 1$ 有三个不同实根, 所以共有 5 个零点. 同理, 当 $c = -2$ 时有 5 个零点.

综上, 当 $-2 < c < 2$ 时 $h(x)$ 有 9 个零点, 当 $c = \pm 2$ 时 $h(x)$ 有 5 个零点.

新答案 (来源: 281-300 多变量问题与主元法.md):

$$(1) f'(x) = \frac{7-2x}{(2-x)^2} (2x-1)$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ 时, } f'(x) < 0; \quad \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 时, } f'(x) > 0$$

$$f(x) \text{ 单调递减区间为 } \left(0, \frac{1}{2}\right), \text{ 单调递增区间为 } \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$f(0) = -\frac{7}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = -4, f(1) = -3, f(x) \text{ 值域为 } [-4, -3].$$

$$(2) g'(x) = 3x^2 - 3a^2 \leq 0 (0 \leq x \leq 1), g(x) \text{ 单调递减}, g(1) \leq g(x) \leq g(0)$$

依题意, $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集.

$$\text{进而有 } g(1) = 1 - 3a^2 - 2a \leq -4, g(0) = -2a \geq -3$$

$$\text{结合 } a \geq 1 \text{ 解得 } a \in \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

$$28. \frac{1-k}{1+(1-k)^2}. \text{ 因为 } a > 0, \text{ 所以 } f(x) = x[a - (1+a^2)x]. \text{ 方程 } f(x) = 0 \text{ 的两个根为 } 0 \text{ 和}$$

$\frac{a}{1+a^2}$, 且二次项系数为负, 因此 $I = \left(0, \frac{a}{1+a^2}\right)$, 其长度为 $L(a) = \frac{a}{1+a^2}$. $L(a)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减, 故 $L(a)$ 在 $[1-k, 1+k]$ 上最小值为 $\min\{L(1-k), L(1+k)\}$.

$$\text{又 } L(1-k) - L(1+k) = \frac{-2k^3}{[1+(1-k)^2][1+(1+k)^2]} < 0, \text{ 所以 } L(1-k) < L(1+k). \text{ 因此所求最小值为 } \frac{1-k}{1+(1-k)^2}.$$

29. (1) 对函数 $f(x)$ 求导, 得

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 16x - 7}{(2-x)^2} = \frac{-(2x-1)(2x-7)}{(2-x)^2}.$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = \frac{7}{2}.$$

当 x 变化时, $f'(x)$ 、 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	0	$(0, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, 1)$	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-7/2$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3

所以当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 是减函数; 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $f(x)$ 是增函数. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-4, -3]$.

(2) 对函数 $g(x)$ 求导, 得 $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$. 因为 $a \geq 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 3(1 - a^2) \leq 0$, 因此当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x)$ 为减函数, 从而当 $x \in [0, 1]$ 时有 $g(x) \in [g(1), g(0)]$.

$$\text{又 } g(1) = 1 - 2a - 3a^2, g(0) = -2a, \text{ 即当 } x \in [0, 1] \text{ 时有 } g(x) \in [1 - 2a - 3a^2, -2a].$$

任给 $x_1 \in [0, 1]$, $f(x_1) \in [-4, -3]$, 存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使得 $g(x_0) = f(x_1)$, 则 $[1 - 2a - 3a^2, -2a] \supset [-4, -3]$, 即

$$\begin{cases} 1 - 2a - 3a^2 \leq -4, & (1) \\ -2a \geq -3. & (2) \end{cases}$$

解 (1) 式, 得 $a \geq 1$ 或 $a \leq -\frac{5}{3}$, 解 (2) 式, 得 $a \leq \frac{3}{2}$. 又 $a \geq 1$, 故 a 的取值范围为 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$.

评: 实测数据: 本题理科难度为 0.182, 区分度为 0.635

$$30. (1) \text{ 即证 } \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}t \geq t^{\frac{2}{3}}x (x > 0, t > 0). \text{ 求导即可, 过程略.}$$

$$(2) \text{ 设 } x_0 > 0, \text{ 由题意可知, } \forall t \in \mathbb{R}, 4x_0 - \frac{16}{3} \geq t^{\frac{2}{3}}x_0 - \frac{2}{3}t, \text{ 以 } t \text{ 为主元, 令 } h(t) = \frac{2}{3}t - x_0t^{\frac{2}{3}} + 4x_0 - \frac{16}{3}, \text{ 则 } h(t) \geq 0 \text{ 恒成立.}$$

对 $h(t)$ 求导得到 $h'(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_0t^{-\frac{1}{3}}$, 当 $t < x_0^3$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 单调递减; $t > x_0^3$ 时, $h'(t) > 0$, $h(t)$ 单调递增. 于是 $h(t)_{\min} = h(x_0^3) = -\frac{1}{3}x_0^3 + 4x_0 - \frac{16}{3} \geq 0$.

令 $\varphi(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - \frac{16}{3}$, 通过求导可知, 当且仅当 $x_0 = 2$ 时, $h(t) \geq 0$, 于是有且仅有一个正实数 $x_0 = 2$, 使得 $g_8(x_0) \geq g_t(x_0)$ 对任意正实数 t 成立.

31. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 由 $f(0) = 0$, 可将函数分解为 $f(x) = x\left(-\frac{1}{3}x^2 + x + m^2 - 1\right)$. 因而 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x + 3(1 - m^2) = 0$ 的两个根. 因为 x_1, x_2 互不相同, 所以 $\Delta = 9 - 12(1 - m^2) = 12m^2 - 3 > 0$, 从而 $m > \frac{1}{2}$.

可知 $x_2 > \frac{3}{2} > 1$, 按照根的分布进行分类讨论. (画出草图以便于理解)

若 $1 < x_1 < x_2$, 则 $f(1) < 0$, 而当 $x \in [x_1, x_2]$ 时, $f(x) \geq 0$, 于是只要 $f(x) < 0$, 解得 $m \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 合并得到 $\frac{1}{2} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

若 $x_1 \leq 1 < x_2$, 此时 $f(1) = -\frac{1}{3}(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 0 = f(x_1)$, 不符题意.

综上, m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

32. (1) 由 $b = c$ 且 $a \neq b$, 可设 $f(x) = (x - a)(x - b)^2$. 求导得 $f'(x) = (x - b)(3x - 2a - b)$, 所以 $f(x)$ 的零点为 a, b , $f'(x)$ 的零点为 $b, \frac{2a+b}{3}$.

若 $a < b$, 则 $a < \frac{2a+b}{3} < b$, 可以验证不符题意; 若 $b < a$, 则 $b < \frac{2a+b}{3} < a$, 所以 $b = -3, a = 3, \frac{2a+b}{3} = 1$, 满足题意, 此时 $f(x) = (x - 3)(x + 3)^2$, 可以求得极小值为 -32 .

(2) 对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x) = 3x^2 - (2b + 2)x + b$, $\Delta = 4b^2 - 4b + 4 = (2b - 1)^2 + 3 > 0$. 因此 $f'(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 而 $f'(0) = b > 0$, $f'(b) = b^2 - b \leq 0$, 不妨设 $0 < x_1 < b \leq x_2$,

当 $x < x_1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x_1 < x < b$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 因此 x_1 是 $f(x)$ 极大值点, M 是 $f(x)$ 在 $(0, b)$ 上的最大值. (画出图是一目了然的)

下证 $f(x)$ 在 $(0, b)$ 上恒小于等于 $\frac{4}{27}$, 当 $0 < x < b$ 时:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (b - x) \cdot (1 - x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + b - x + 1 - x}{3} \right)^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{b + 1}{3} \right)^3 \leq \frac{4}{27}.$$

问题得证.

评:

第一章 函数

1.2 基本初等函数

B 组

- 【2020 浙江 9】已知 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $ab \neq 0$, 对于任意 $x \geq 0$ 均有 $(x-a)(x-b)(x-2a-b) \geq 0$, 则
(A) $a < 0$ (B) $a > 0$ (C) $b < 0$ (D) $b > 0$
- 【2019 浙江 9】函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有 3 个零点, 则
(A) $a < -1, b < 0$ (B) $a < -1, b > 0$ (C) $a > -1, b < 0$ (D) $a > -1, b > 0$
- 【2011 浙江 10】设 a, b, c 为实数, $f(x) = (x+a)(x^2+bx+c)$, $g(x) = (ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S = \{x \mid f(x) = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $T = \{x \mid g(x) = 0, x \in \mathbb{R}\}$. 若 $|S|, |T|$ 分别表示集合 S, T 的元素个数, 则下列结论不可能的是
(A) $|S| = 1$ 且 $|T| = 0$ (B) $|S| = 1$ 且 $|T| = 1$ (C) $|S| = 2$ 且 $|T| = 2$ (D) $|S| = 2$ 且 $|T| = 3$
- 【2004 浙江 12】已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 方程 $x - f[g(x)] = 0$ 有实数解, 则 $g[f(x)]$ 不可能是
(A) $x^2 + x + \frac{1}{5}$ (B) $x^2 + x + \frac{1}{5}$ (C) $x^2 - \frac{1}{5}$ (D) $x^2 + \frac{1}{5}$
- 【2009 江西 12】设函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a < 0$) 的定义域为 D , 且集合 $G = \{(s, f(t)) \mid (s, t \in D)\}$ 中所有元素构成一个正方形区域, 求 a 的值.
- 【2012 江苏 13】已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的值域为 $[0, +\infty)$, 若关于 x 的不等式 $f(x) < c$ 的解集为 $(m, m+6)$, 求实数 c 的值.
- 在平面直角坐标系中, 曲线 $y = x^2 + mx - 3$ ($m \in \mathbb{R}$) 与 x 轴和 y 轴共有三个交点, 求经过这三点的圆在 y 轴上截得的弦长.
- 【2013 天津理 8】已知函数 $f(x) = x(1 + a|x|)$. 设关于 x 的不等式 $f(x+a) < f(x)$ 的解集为 A , 若 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.
- 【2013 安徽 10】若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) = x_1$, 求关于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实数根的个数.
- 已知函数 $f(x) = |2^x + x - m|$, $x \in [a, a+2]$, 设 $f(x)$ 的最大值为 $g(m)$, 若 $\{m \mid g(m) \geq 13\} = \mathbb{R}$, 求实数 a 的取值范围.

11. 【2008 上海理 12】方程 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 的解可视为函数 $y = x + \sqrt{2}$ 的图象与函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象交点的横坐标. 若方程 $x^4 + ax - 4 = 0$ 的各个实根 $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k \leq 4$) 所对应的点 $\left(x_i, \frac{4}{x_i}\right)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 均在直线 $y = x$ 的同侧, 求实数 a 的取值范围.
12. 【2019 上海 12】已知 $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - a \right|$ ($x > 1, a > 0$), $f(x)$ 与 x 轴交点为 A , 若对于 $f(x)$ 图象上任意一点 P , 在其图象上总存在另一点 Q (P, Q 异于 A), 满足 $AP \perp AQ$, 且 $|AP| = |AQ|$, 求 a 的值.
13. 【2014 浙江理 10】设函数 $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2(x - x^2), f_3(x) = \frac{1}{3}|\sin 2\pi x|, a_i = \frac{i}{99}, i = 0, 1, 2, \dots, 99$. 记 $I_k = |f_k(a_1) - f_k(a_0)| + |f_k(a_2) - f_k(a_1)| + \dots + |f_k(a_{99}) - f_k(a_{98})|, k = 1, 2, 3$, 比较 I_1, I_2, I_3 的大小.
14. 【2015 浙江 18】已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 记 $M(a, b)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值.
- (1) 证明: 当 $|a| \geq 2$ 时, $M(a, b) \geq 2$;
- (2) 当 a, b 满足 $M(a, b) \leq 2$ 时, 求 $|a| + |b|$ 的最大值.
15. 【2018 新题型测试卷 20】对于函数 $f(x)$, 若 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点, 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$.
- (1) 当 $a = 0$ 时, 若存在 x_0 既是 $f(x)$ 的极值点, 也是 $f(x)$ 的不动点, 求 b ;
- (2) 判断是否存在 a, b , 使得 $f(x)$ 有两个极值点, 且这两个极值点均为 $f(x)$ 的不动点, 并说明理由.
16. 【2017 江苏 20】已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ($a > 0, b \in \mathbb{R}$) 有极值, 且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点.
- (1) 求 b 关于 a 的函数关系式, 并写出定义域;
- (2) 证明: $b^2 > 3a$;
- (3) 若 $f(x), f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\frac{7}{2}$, 求 a 的取值范围.
17. 【2015 江苏 19】已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). 若 $b = c - a$ (实数 c 是与 a 无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, 求 c 的值.
18. 【2007 江苏 21】已知 a, b, c, d 是不全为零的实数, 函数 $f(x) = bx^2 + cx + d, g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 集合 $M = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}, N = \{x \in \mathbb{R} \mid g(f(x)) = 0\}$ 满足 $M = N$.
- (1) 求 d 的值;
- (2) 若 $a = 0$, 求 c 的取值范围;
- (3) 若 $a = 1, f(1) = 0$, 求 c 的取值范围.
19. 【2021 天津 9】设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a), & x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, & x \geq a \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰有 6 个零点, 求 a 的取值范围.

20. 【2013 北京春季会考 28】已知

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in A, \\ -x^2 + 2x, & x \in B \end{cases}$$

是定义域为 $(0, 1)$ 的单调增函数, 且 $0 < x_0 < x' < 1$. 当 $x_0 \in B$ 时, 证明: $x' \in B$.

21. 【2013 北京夏季会考 28】已知函数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

对所有的实数 x , 等式 $f[g(x)] = g[f(x)]$ 恒成立, 其中 $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$.

(1) 设函数 $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$, 写出满足 $f[g(x)] = g[f(x)]$ 的两个函数 $g(x)$;

(2) 如果方程 $f(x) = g(x)$ 无实数解, 求证: 方程 $f[f(x)] = g[g(x)]$ 无实数解.

1. C.

2. C. 设 $g(x) = f(x) - ax - b$. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x$, 故 $g(x) = (1-a)x - b$.

函数 $y = x - ax - b$ ($x \in \mathbb{R}$) 恰有 1 个零点且当 $a \neq 1$ 时, 该零点为 $x_0 = \frac{b}{1-a}$. 若 $x_0 < 0$, 则当且仅当 $\frac{b}{1-a} < 0$ 时成立.

当 $x \geq 0$ 时, 函数变成 $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$, 且 $g'(x) = x^2 - (a+1)x = x[x - (a+1)]$.

当 $a \leq -1$ 时, $g'(x) \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 因而在 $[0, +\infty)$ 上至多有一个零点; 而 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上至多有一个零点, 所以至多有两个零点, 与条件不符. 故 $a > -1$.

此时 $g(x)$ 在 $(0, a+1)$ 上单调递减, 在 $(a+1, +\infty)$ 上单调递增. 要使 $g(x)$ 有 3 个零点, 必须

$$\text{有 } \begin{cases} g(0) \geq 0, \\ g(a+1) < 0. \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -b \geq 0, \\ -\frac{1}{6}(a+1)^3 - b < 0. \end{cases}, \text{ 因此 } b \leq 0, \text{ 且 } b > -\frac{1}{6}(a+1)^3.$$

又因为左侧零点必须位于 $(-\infty, 0)$, 所以 $\frac{b}{1-a} < 0$. 结合 $b \leq 0$, 可得 $a < 1$; 同时 $a > -1$, 故 $-1 < a < 1$.

综上, 参数范围为 $\begin{cases} b < 0, \\ -1 < a < 1, \\ -\frac{1}{6}(a+1)^3 < b. \end{cases}$

假设 $\begin{cases} b < 0, \\ -1 < a < 1, \\ -\frac{1}{6}(a+1)^3 < b. \end{cases}$ 当 $x < 0$ 时, $g(x) = (1-a)x - b$, 其零点为 $\frac{b}{1-a} \in (-\infty, 0)$. 当 $x \geq 0$

时, $g'(x) = x[x - (a+1)]$, 因此 $g(x)$ 在 $(0, a+1)$ 上单调递减, 在 $(a+1, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0) = -b > 0$, $g(a+1) = -\frac{1}{6}(a+1)^3 - b < 0$. 并且 $g\left(\frac{3}{2}(|a|+1)\right) > \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 > = \frac{1}{3}x^2\left[x - \frac{3}{2}(a+1)\right] > 0$. 所以 $g(x)$ 在区间 $(0, a+1)$ 、 $(a+1, \frac{3}{2}(|a|+1))$ 内分别有 1 个零点, 再加上负半轴上的 1 个零点, 共有 3 个零点.

3. D. 方程 $x^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + 1 = 0$ 的判别式都为 $\Delta = b^2 - 4c$.

当 $\Delta = 0$ 时, 方程 $x^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + 1 = 0$ 的根分别为 $-\frac{b}{2}$ 与 $-\frac{2}{b}$ ($b \neq 0$).

(1) 若 $a = b = c = 0$, 则 $f(x) = x^3$, $g(x) = 1$, 此时 $S = \{0\}$, $T = \emptyset$, 从而 $|S| = 1$, $|T| = 0$, 故 A 选项的情形可能发生.

(2) 若 $a = 0$, $\Delta = 0$, 则 $S = \left\{-\frac{b}{2}, 0\right\}$, $T = \left\{-\frac{2}{b}\right\}$, 从而 $|T| = 1$, $|S| = 2$, 不能排除选项.

(3) 若 $a \neq 0$, $\Delta < 0$, 则 $S = \{-a\}$, $T = \left\{-\frac{1}{a}\right\}$, 从而 $|S| = |T| = 1$, 故 B 选项的情形可能发生.

(4) 若 $a \neq 0$, $\Delta = 0$, 则 $S = \left\{-a, -\frac{b}{2}\right\}$, $T = \left\{-\frac{1}{a}, -\frac{2}{b}\right\}$. 若 $2a \neq b$, 则 $|S| = |T| = 2$, 故 C 选项的情形可能发生.

(5) (反证) 若 $|T|=3$, 则必有 $a \neq 0, \Delta > 0$, 则

$$T = \left\{ -\frac{1}{a}, \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right\},$$

且 $-\frac{1}{a} \neq \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$, 此时 $S = \left\{ -a, \frac{2}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}} \right\}$, $|S|=3$, 不可能有 $|S|=2$, 故 D 选项的情形不可能发生, 从而选 D.

4. B.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12. 新答案 (来源: 4.4 多个量词的问题 (3) 向量、几何.md): $\sqrt{2}$

【解题思路】由题意得 $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - a \right| (x > 1, a > 0)$, 点 $A \left(1 + \frac{2}{a}, 0 \right)$.

设 $P(x_0, y_0)$ 是 $f(x)$ 图像上的任意一点, 并不妨设 $x_0 < 1 + \frac{2}{a}$. 由 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$ 且 $|AP| = |AQ|$, $\overrightarrow{AP} = \left(x_0 - 1 - \frac{2}{a}, y_0 \right)$, 可得 $\overrightarrow{AQ} = \left(y_0, 1 + \frac{2}{a} - x_0 \right)$. 所以 $Q \left(1 + \frac{2}{a} + y_0, 1 + \frac{2}{a} - x_0 \right)$.

由 Q 在曲线 $y = -\left(\frac{2}{x-1} - a \right)$ 上, 得点 $Q' \left(1 + \frac{2}{a} + y_0, x_0 - 1 - \frac{2}{a} \right)$ 在曲线 $y = \frac{2}{x-1} - a$ 上, 于是 P, Q' 均在曲线 $y = \frac{2}{x-1} - a$ 上. 由

$$\begin{cases} x_0 - 1 - \frac{2}{a} = \frac{2}{\frac{2}{a} + y_0} - a, \\ y_0 = \frac{2}{x_0 - 1} - a, \end{cases} \iff x_0 - 1 = \frac{2}{y_0 + a},$$

得

$$\frac{2}{y_0 + a} - \frac{2}{a} = \frac{2}{\frac{2}{a} + y_0} - a,$$

整理得 $(a^2 - 2)y_0 + \frac{a^3 - 4}{a} = 0$.

综上, 对任意 $P(x_0, y_0) (y_0 > 0)$, 都有 $(a^2 - 2)y_0 + \frac{a^3 - 4}{a} = 0$.

由 y_0 的任意性, 上面关于 y_0 的多项式为零多项式, 有 $a^2 - 2 = 0$ 且 $\frac{a^3 - 4}{a} = 0$, 解得 $a = \sqrt{2}$. ($a > 0$)

4.4.2 题组二

1. 【2019 全国 , 文 21(2)】题号位置:

☐☐☐

已知点 A, B 关于坐标原点 O 对称, $|AB| = 4$, $\odot M$ 过点 A, B 且与直线 $x + 2 = 0$ 相切.

是否存在定点 P , 使得当 A 运动时, $|MA| - |MP|$ 为定值? 说明理由.

2. 【2009 山东, 22(2)】

设椭圆 $E: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, O 为坐标原点. 是否存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A, B , 且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$? 若存在, 写出该圆的方程, 并求 $|AB|$ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

3. 【2021 上海, 20(3)】题号位置: F

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, F_1, F_2 为椭圆 C 的左、右焦点, 直线 l 过点 $P(m, 0)$ ($m < -\sqrt{2}$), 且与椭圆 C 的上半部分交于 A, B 两点, A 在线段 PB 上.

对于任意点 $P(m, 0)$ ($m < -\sqrt{2}$), 是否存在唯一的过点 P 的直线 l , 使得 $\overrightarrow{AF_1} \parallel \overrightarrow{BF_2}$?

4. 【2015 全国, 20】题号位置: FFFF

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y = kx + a$ ($a > 0$) 交于 M, N 两点.

(1) 当 $k = 0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(2) y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? 说明理由.

5. 【2011 辽宁, 文 21 理 20】

如图, 已知椭圆 C_1 的中心在原点 O , 长轴左、右端点 M, N 在 x 轴上, 椭圆 C_2 的短轴为 MN , 且 C_1, C_2 的离心率都为 e . 直线 $l \perp MN$, l 与 C_1 交于两点, 与 C_2 交于两点, 这四点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D .

(1) 设 $e = \frac{1}{2}$, 求 $|BC|$ 与 $|AD|$ 的比值;

(2) 当 e 变化时, 是否存在直线 l , 使得 $BO \parallel AN$, 并说明理由.

6. 【2010 湖北, 文 20 理 19】题号位置: F

已知一条曲线 C 在 y 轴右边, C 上每一点到点 $F(1, 0)$ 的距离减去它到 y 轴距离的差都是 1.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 是否存在正数 m , 对于过点 $M(m, 0)$ 且与曲线 C 有两个交点 A, B 的任一直线, 都有 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} < 0$? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

7. 【2009 湖北, 20】题号位置: F

过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的对称轴上一点 $A(a, 0)$ ($a > 0$) 的直线与抛物线相交于 M, N 两点, 自 M, N 向直线 $l: x = -a$ 作垂线, 垂足分别为 M_1, N_1 .

(1) 当 $a = \frac{p}{2}$ 时, 求证: $AM_1 \perp AN_1$;

(2) 记 $\triangle AMM_1, \triangle AM_1N_1, \triangle ANN_1$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 . 是否存在 λ , 使得对任意的 $a > 0$, 都有 $S_2^2 = \lambda S_1 S_3$ 成立. 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

8. 【2012 湖北, 文 21】题号位置: $\square\square$

设 A 是单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的任意一点, l 是过点 A 与 x 轴垂直的直线, D 是直线 l 与 x 轴的交点, 点 M 在直线 l 上, 且满足 $|DM| = m|DA|$ ($m > 0$, 且 $m \neq 1$). 当点 A 在圆上运动时, 记点 M 的轨迹为曲线 C .

- (1) 求曲线 C 的方程, 判断曲线 C 为何种圆锥曲线, 并求其焦点坐标;
- (2) 过原点斜率为 k 的直线交曲线 C 于 P, Q 两点, 其中 P 在第一象限, 且它在 y 轴上的射影为点 N , 直线 QN 交曲线 C 于另一点 H . 是否存在 m , 使得对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

9. 【2011 山东, 22】

已知动直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两不同点, 且 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 其中 O 为坐标原点.

- (1) 证明: $x_1^2 + x_2^2$ 和 $y_1^2 + y_2^2$ 均为定值;
- (2) 设线段 PQ 的中点为 M , 求 $|OM| \cdot |PQ|$ 的最大值;
- (3) 椭圆 C 上是否存在三点 D, E, G , 使得 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$? 若存在, 判断 $\triangle DEG$ 的形状; 若不存在, 请说明理由.

新答案 (来源: 3.4 性质的证明 (4) 解析几何.md): (1) 证法 1: 由抛物线的定义得

$$|MF| = |MM_1|,$$

$$|NF| = |NN_1|.$$

所以 $\angle MFM_1 = \angle MM_1F$, $\angle NFN_1 = \angle NN_1F$.

如图, 设准线 l 与 x 轴的交点为 F_1 .

因为 $MM_1 \parallel NN_1 \parallel FF_1$, 所以 $\angle F_1FM_1 = \angle MM_1F$, $\angle F_1FN_1 = \angle NN_1F$.

而 $\angle F_1FM_1 + \angle MFM_1 + \angle F_1FN_1 + \angle NFN_1 = 180^\circ$, 即 $2\angle F_1FM_1 + 2\angle F_1FN_1 = 180^\circ$,

所以 $\angle F_1FM_1 + \angle F_1FN_1 = 90^\circ$, 即 $\angle M_1FN_1 = 90^\circ$,

故 $FM_1 \perp FN_1$.

证法 2: 依题意, 焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线 l 的方程为 $x = -\frac{p}{2}$.

设点 M, N 的坐标分别为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $x = my + \frac{p}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} M_1 &\left(-\frac{p}{2}, y_1\right), \\ N_1 &\left(-\frac{p}{2}, y_2\right), \\ \overrightarrow{FM_1} &= (-p, y_1), \\ \overrightarrow{FN_1} &= (-p, y_2). \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} x = my + \frac{p}{2}, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

得 $y^2 - 2myp - p^2 = 0$.

于是, $y_1 + y_2 = 2mp$, $y_1 y_2 = -p^2$.

所以 $\overrightarrow{FM_1} \cdot \overrightarrow{FN_1} = p^2 + y_1 y_2 = p^2 - p^2 = 0$, 故 $FM_1 \perp FN_1$.

(2) $S_2^2 = 4S_1 S_3$ 成立, 证明如下:

证法 1: 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则由抛物线的定义得

$$\begin{aligned} |MM_1| &= |MF| = x_1 + \frac{p}{2}, \\ |NN_1| &= |NF| = x_2 + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot |MM_1| \cdot |F_1 M_1| = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{p}{2} \right) |y_1|, \\ S_2 &= \frac{1}{2} \cdot |M_1 N_1| \cdot |FF_1| = \frac{1}{2} p |y_1 - y_2|, \\ S_3 &= \frac{1}{2} \cdot |NN_1| \cdot |F_1 N_1| = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{p}{2} \right) |y_2|. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} S_2^2 = 4S_1 S_3 &\iff \left(\frac{1}{2} p |y_1 - y_2| \right)^2 = 4 \times \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{p}{2} \right) |y_1| \cdot \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{p}{2} \right) |y_2| \\ &\iff \frac{1}{4} p^2 [(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2] = \left[x_1 x_2 + \frac{p}{2} (x_1 + x_2) + \frac{p^2}{4} \right] |y_1 y_2|, \end{aligned}$$

将

$$\begin{cases} x_1 = my_1 + \frac{p}{2}, \\ x_2 = my_2 + \frac{p}{2}, \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2mp, \\ y_1 y_2 = -p^2. \end{cases}$$

代入上式化简得

$$p^2 (m^2 p^2 + p^2) = p^2 (m^2 p^2 + p^2),$$

此式恒成立. 故 $S_2^2 = 4S_1 S_3$ 成立.

证法 2: 设直线 MN 的倾角为 α , $|MF| = r_1$, $|NF| = r_2$, 则由抛物线的定义得 $|MM_1| = |MF| = r_1$, $|NN_1| = |NF| = r_2$.

因为 $MM_1 \parallel NN_1 \parallel FF_1$, 所以 $\angle FMM_1 = \alpha$, $\angle FNN_1 = \pi - \alpha$.

于是 $S_1 = \frac{1}{2} r_1^2 \sin \alpha$, $S_3 = \frac{1}{2} r_2^2 \sin (\pi - \alpha) = \frac{1}{2} r_2^2 \sin \alpha$.

在 $\triangle FMM_1$ 和 $\triangle FNN_1$ 中, 由余弦定理可得

$$\begin{aligned} |FM_1|^2 &= 2r_1^2 - 2r_1^2 \cos \alpha = 2r_1^2 (1 - \cos \alpha), \\ |FN_1|^2 &= 2r_2^2 + 2r_2^2 \cos \alpha = 2r_2^2 (1 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

由 (1) 的结论, 得 $S_2 = \frac{1}{2} |FM_1| \cdot |FN_1|$,

所以 $S_2^2 = \frac{1}{4} |FM_1|^2 \cdot |FN_1|^2 = \frac{1}{4} \cdot 4r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = r_1^2 r_2^2 \sin^2 \alpha = 4S_1 S_3$,

即 $S_2^2 = 4S_1 S_3$, 得证.

【实测数据】本题阅卷数据如下.

题号	满分	平均分	难度	区分度
文 20	13	3.23	0.25	0.74
文 20(1)	6	2.32	0.39	0.74
文 20(2)	7	0.91	0.13	0.55

13.

14.

15.

16.

17.

18. (1) 设 r 为方程的一个根, 即 $f(r)=0$, 则由题设 $g(f(r))=0$. 于是, $g(0)=g(f(r))=0$, 即 $g(0)=d=0$. 所以, $d=0$.

(2) 由题意及 (1) 知 $f(x)=bx^2+cx$, $g(x)=ax^3+bx^2+cx$.

由 $a=0$ 得 b, c 是不全为零的实数, 且 $g(x)=bx^2+cx=x(bx+c)$,

则

$$g(f(x))=x(bx+c)[bx(bx+c)+c]=x(bx+c)(b^2x^2+bcx+c).$$

方程 $f(x)=0$ 就是 $x(bx+c)=0$,

方程 $g(f(x))=0$ 就是 $x(bx+c)(b^2x^2+bcx+c)=0$.

() 当 $c=0$ 时, $b \neq 0$, 方程 、 的根都为 $x=0$, 符合题意.

() 当 $c \neq 0, b=0$ 时, 方程 、 的根都为 $x=0$, 符合题意.

() 当 $c \neq 0, b \neq 0$ 时, 方程 的根为 $x_1=0, x_2=-\frac{c}{b}$, 它们也都是方程 的根, 但它们不是方程 $b^2x^2+bcx+c=0$ 的实数根.

由题意, 方程 $b^2x^2+bcx+c=0$ 无实数根, 此方程根的判别式 $\Delta=(bc)^2-4b^2c<0$,

得 $0<c<4$.

综上所述, 所求 c 的取值范围为 $[0, 4)$.

- (3) 由 $a=1, f(1)=0$ 得 $b=-c, f(x)=bx^2+cx=cx(-x+1)$,

$$g(f(x))=f(x)[f^2(x)-cf(x)+c].$$

由 $f(x)=0$ 可以推得 $g(f(x))=0$, 知方程 $f(x)=0$ 的根一定是方程 $g(f(x))=0$ 的根.

当 $c=0$ 时, 符合题意.

当 $c \neq 0, b \neq 0$, 方程 $f(x)=0$ 的根不是方程

$$f^2(x)-cf(x)+c=0$$

的根, 因此, 根据题意, 该方程应无实数根. 那么

当 $(-c)^2 - 4c < 0$, 即 $0 < c < 4$ 时, $f^2(x) - cf(x) + c > 0$, 符合题意.

当 $(-c)^2 - 4c \geq 0$, 即 $c < 0$ 或 $c \geq 4$ 时, 由方程得

$$f(x) = -cx^2 + cx = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4c}}{2},$$

即

$$cx^2 - cx + \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4c}}{2} = 0,$$

则方程应无实数根, 所以有

$$(-c)^2 - 4c \cdot \frac{c + \sqrt{c^2 - 4c}}{2} < 0$$

且

$$(-c)^2 - 4c \cdot \frac{c - \sqrt{c^2 - 4c}}{2} < 0.$$

当 $c < 0$ 时, 只需 $-c^2 - 2c\sqrt{c^2 - 4c} < 0$, 解得 $0 < c < \frac{16}{3}$, 矛盾, 舍去.

当 $c \geq 4$ 时, 只需 $-c^2 + 2c\sqrt{c^2 - 4c} < 0$, 解得 $0 < c < \frac{16}{3}$.

因此, $4 \leq c < \frac{16}{3}$.

综上所述, 所求 c 的取值范围为 $\left[0, \frac{16}{3}\right)$.

19.

20.

21. (1) 如 $g(x) = f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1, g(x) = x$, 符合题意. (答案不唯一)

(2) 设函数 $F(x) = f(x) - g(x)$,

因为方程 $f(x) = g(x)$ 无实数解, 所以函数 $F(x)$ 的图象恒在 x 轴上方, 或者恒在 x 轴下方, 即对于任意 $x \in \mathbb{R}, F(x) > 0$, 或者对于任意 $x \in \mathbb{R}, F(x) < 0$.

当 $F(x) > 0$ 时, 因为

$$\begin{aligned} f[f(x)] - g[g(x)] &= \{f[f(x)] - g[f(x)]\} + \{g[f(x)] - g[g(x)]\} \\ &= \{f[f(x)] - g[f(x)]\} + \{f[g(x)] - g[g(x)]\} \\ &= F[f(x)] + F[g(x)] > 0, \end{aligned}$$

所以此时方程 $f[f(x)] = g[g(x)]$ 无实数解.

当 $F(x) < 0$ 时, 同理可证 $f[f(x)] - g[g(x)] < 0$. 所以此时方程 $f[f(x)] = g[g(x)]$ 无实数解.

综上, 当方程 $f(x) = g(x)$ 无实数解时, 方程 $f[f(x)] = g[g(x)]$ 无实数解.

【解题思路】(1) 我们把性质 $f[g(x)] = g[f(x)]$ 称为 f, g “可交换”. 根据 (1) 的启发, 我们可以证明 $g(x) = x$ 和任意的多项式都“可交换”, 这是因为此时

$$f[g(x)] = f(x) = g(f(x)).$$

另一方面, 如果 $g(x) = f(x)$, 那么

$$f(g(x)) = g(f(x)) = f(f(x)),$$

所以 f, g 也是“可交换”. 事实上, 若取 $g(x) = f^{(n)}(x)$ (对 f 复合 n 次), 都有 f, g “可交换”.

实际上, 可以从群论的观点来理解这个问题. 设 M 是所有多项式按函数复合运算 $\circ$ 构成的幺半群, 例如 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. 则多项式 $e(x) = x$ 是 M 中的单位元, 而对每个多项式 f , 记

$$\langle f \rangle := \{f^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

则 $\langle f \rangle$ 是 M 的子幺半群, 并且 $\langle f \rangle$ 是交换的.

(2) 设 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(x)$ 是多项式, 从而是连续函数.

根据 $f(g(x)) = g(f(x))$ 得

$$\begin{aligned} f(f(x)) - g(g(x)) &= f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x)) \\ &= F(f(x)) + F(g(x)). \end{aligned}$$

(反证法) 如果 x_0 是方程 $f[f(x)] = g[g(x)]$ 的实数解, 则

$$F(f(x_0)) + F(g(x_0)) = 0,$$

所以 $F(f(x_0))F(g(x_0)) \leq 0$.

若 $F(f(x_0))F(g(x_0)) = 0$, 则 $F(f(x_0)) = F(g(x_0)) = 0$, 故 $f(x_0)$ 和 $g(x_0)$ 都是 $F(x)$ 的零点, 这与 $F(x)$ 没有零点矛盾.

若 $F(f(x_0))F(g(x_0)) > 0$, 则存在 ξ 介于 $f(x_0)$ 与 $g(x_0)$ 之间, 使得 $F(\xi) = 0$, 这与 $F(x)$ 没有零点矛盾.

第一章 函数

1.2 基本初等函数

杂 题

1. 【2015 山东理 10】设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$, 求满足 $f(f(a)) = 2^{f(a)}$ 的 a 的取值范围.

2. 若函数 $f(x) = |x^2 - kx + k| + 2kx$ 有两个零点, 求 k 的取值范围.

3. 【2020 天津 9】已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbb{R}$) 恰有 4 个零点, 求 k 的取值范围.

4. 实数 a 满足 $a|x+1| \leq a^2 + x^2$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

5. 【2013 江西文 21】设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x, & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{1-a}(1-x), & a < x \leq 1 \end{cases}$, a 为常数且 $a \in (0, 1)$.

(1) 若 x_0 满足 $f(f(x_0)) = x_0$, 但 $f(x_0) \neq x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶周期点, 证明函数 $f(x)$ 有且仅有两个二阶周期点, 并求二阶周期点 x_1, x_2 ;

(2) 对于 (2) 中 x_1, x_2 , 设 $A(x_1, f(f(x_1))), B(x_2, f(f(x_2))), C(a^2, 0)$, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 $s(a)$, 求 $s(a)$ 在区间 $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

1.

2.

3.

4.

5.

第一章 函数

1.2 基本初等函数