

# 第一章 函数

## 1.1 函数的相关概念

### 1.1.1 函数的定义

提到函数,你的脑海中或许会浮现出一条灵动的曲线,例如一次函数  $y = x$  对应直线,二次函数  $y = x^2$  对应抛物线.对于某些简单的函数,我们可以直接作出其图象来呈现相关性质.然而在历史上随着数学的发展,出现了相当一部分不能用图象描述的函数,那么我们必须要在先前理解的基础上更进一步,于是催生了函数的现代定义,即函数是一种特殊的映射,高中所接触的函数一般是建立在两个非空数集上的映射.自然地,函数应当满足映射的定义,即每个自变量  $x$  在该法则下有唯一确定的因变量  $y$ .

### 1.1.2 显函数与隐函数

如果函数的因变量可以由自变量经数学演算直接表达,那么称它为**显函数**,若  $y$  是自变量  $x$  的函数,那么可记作  $y = f(x)$ ,多变量函数可以写成  $v = F(x, y, z)$ ,这表示  $v$  是变量  $x, y, z$  的函数.如果函数不是通过自变量直接表出,而只有一个方程表示函数值和自变量的值的关系,那么称它为**隐函数**,例如,变量  $x, y$  满足方程  $y \sin x = \cos(x - y)$ ,则  $y$  是自变量  $x$  的隐函数.显函数和隐函数之间并无严格界限,有时可以从隐函数解出显函数,但隐函数方程的求解可能较为困难,并且解出的显函数在形式上也可能较为繁杂,因而发生了一些用隐函数直接处理问题的研究.

### 1.1.3 反函数

研究问题时,依据问题研究的主要对象, $x, y$  有时需要表示成  $y = f(x)$  的形式,有时也需要表示成  $x = g(y)$  的形式.例如在自由落体运动中,如果想从已知时间  $t$  解出路程  $s$ ,那么考虑函数  $s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ .反过来,如果想从已知路程  $s$  解出下落时间  $t$ ,那么考虑把  $s = f(t)$  化为  $t = g(s) = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ .这里的函数  $f, g$  是同一种关系的不同表示,称这样两个函数“互为反函数”.于是要想得到  $y = f(x), x \in D$  的反函数,只需从  $y = f(x)$  中解出  $x = f^{-1}(y)$ ,由于自变量习惯上常用  $x$  表示,而函数值常用  $y$  表示,因此通常把该函数改写为  $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$  的形式.

从函数是特殊映射这一角度出发,可知反函数的定义与可逆映射基本相同.也就是说,设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ,  $y = f(x)$  的反函数(如果存在的话)  $y = f^{-1}(x)$  满足:对任意  $x \in D$ ,都有  $f^{-1}(f(x)) = x$ ,对任意  $x \in f(D)$ ,都有  $f(f^{-1}(x)) = x$ .

对于连续函数,有下述判断其反函数是否存在的定理.

**定理 1.1.1** (反函数存在定理).连续函数  $y = f(x)$  存在反函数当且仅当它是严格单调递增(严格单调递减)的,该反函数也是严格单调递增(严格单调递减)的.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>在后续部分将给出严格证明.

# 第一章 函数

## 1.1 函数的相关概念

### 习 题

#### A 组

- 【2016 全国 II 卷文 10】下列函数中, 其定义域和值域分别与函数  $y = 10^{\lg x}$  的定义域和值域相同的是  
 (A)  $y = x$  (B)  $y = \lg x$  (C)  $y = 2^x$  (D)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- 【2025 北京 7】已知函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 则“函数  $f(x)$  的值域为  $\mathbb{R}$ ”是“对任意  $M \in \mathbb{R}$ , 存在  $x_0 \in D$ , 使得  $|f(x_0)| > M$ ”的  
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【2011 广东文 10】设  $f(x), g(x), h(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的任意实值函数. 定义如下两个函数  $(f \circ g)(x)$  和  $(f \bullet g)(x)$ : 对任意  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ;  $(f \bullet g)(x) = f(x)g(x)$ , 则下列等式恒成立的是  
 (A)  $((f \circ g) \bullet h)(x) = ((f \bullet h) \circ (g \bullet h))(x)$  (B)  $((f \bullet g) \circ h)(x) = ((f \circ h) \bullet (g \circ h))(x)$   
 (C)  $((f \circ g) \circ h)(x) = ((f \circ h) \circ (g \circ h))(x)$  (D)  $((f \circ g) \bullet h)(x) = ((f \bullet h) \bullet (g \bullet h))(x)$
- 【2011 北京理 8】设  $A(0, 0), B(4, 0), C(t+4, 4), D(t, 4) (t \in \mathbb{R})$ . 记  $N(t)$  为平行四边形  $ABCD$  内部 (不含边界) 的整点的个数, 其中整点是指横、纵坐标都是整数的点, 求函数  $N(t)$  的值域.
- 【2013 大纲全国卷 4】已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 0)$ , 求函数  $f(2x+1)$  的定义域.
- 定义在  $\{0, 1\}$  上的两个函数  $f(x) = x^2, g(x) = x^3$  是同一个函数吗?
- 证明: 如果函数  $y = f(x)$  存在反函数  $y = f^{-1}(x)$ , 则它们的图象关于  $y = x$  对称.
- 三角函数的反函数称为反三角函数, 其中  $y = \sin x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}), y = \cos x (0 \leq x \leq \pi), \tan x (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$  的反函数分别记作  $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x$ , 写出这三个函数的定义域与值域, 并画出草图.

1. **D.** 可知函数  $y = 10^{\lg x}$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ; 而  $10^{\lg x} = x$ , 所以该函数的值域为  $(0, +\infty)$ .

逐一考察选项:  $y = x$  的定义域、值域均为  $\mathbb{R}$ ;  $y = \lg x$  的定义域为  $(0, +\infty)$  而值域为  $\mathbb{R}$ ;  $y = 2^x$  的定义域为  $\mathbb{R}$  而值域为  $(0, +\infty)$ , 三者均与给定函数不同.  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  定义域为  $(0, +\infty)$ , 值域为  $(0, +\infty)$ , 符合. 因此选 D.

2. **A.** 充分性: 因为  $f(x)$  的值域是  $\mathbb{R}$ , 所以对任意  $M \in \mathbb{R}$ , 存在  $x_0 \in D$  使得  $f(x_0) = |M| + 1$ , 故  $|f(x_0)| = |M| + 1 > M$ , 从而充分性成立.

必要性: 考虑函数  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $D = [0, +\infty)$ , 则对任意  $M \in \mathbb{R}$ , 取  $x_0 = M^2 + 1 \in D$ , 则  $|f(x_0)| = \sqrt{M^2 + 1} > M$ . 但是  $f(x)$  的值域不是  $\mathbb{R}$ . 必要性不成立.

3. **B.** 对于 B:  $((f \bullet g) \circ h)(x) = (f \bullet g)(h(x)) = f(h(x))g(h(x)) = ((f \circ h) \bullet (g \circ h))(x)$ , 故 B 恒成立.

对于 A: 左边  $((f \circ g) \bullet h)(x) = f(g(x))h(x)$ , 右边  $((f \bullet h) \circ (g \bullet h))(x) = f(g(x)h(x))h(g(x)h(x))$ . 取  $f(x) = g(x) = x$ ,  $h(x) = 2$ , 则左边为  $2x$ , 右边为  $4x$ , 当  $x \neq 0$  时二者不相等, A 不恒成立.

对于 C: 左边  $((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ , 右边  $((f \circ h) \circ (g \circ h))(x) = f(h(g(h(x))))$ . 取  $f(x) = g(x) = x$ ,  $h(x) = x + 1$ , 则左边为  $x + 1$ , 右边为  $x + 2$ , 二者不恒相等, 故 C 不成立.

对于 D: 左边  $((f \circ g) \bullet h)(x) = f(g(x))h(x)$ , 右边  $((f \bullet h) \bullet (g \bullet h))(x) = f(x)h(x)g(x)h(x) = f(x)g(x)[h(x)]^2$ . 取  $f(x) = g(x) = h(x) = x$ , 则左边为  $x^2$ , 右边为  $x^4$ , D 不恒成立.

综上, 恒成立的等式为 B.

4. **{9, 11, 12}** 直线  $AD$  的方程为  $x = \frac{t}{4}y$ , 直线  $BC$  的方程为  $x = 4 + \frac{t}{4}y$ . 因此对  $k = 1, 2, 3$ , 水平线  $y = k$  被平行四边形截得的内部线段为开线段  $\left(\frac{kt}{4}, 4 + \frac{kt}{4}\right)$ , 内部整点只能出现在这三条水平线上.

记  $f(m)$  为开区间  $(m, m+4)$  内整数的个数. 若  $m \in \mathbb{Z}$ , 则该区间内的整数为  $m+1, m+2, m+3$ , 共 3 个; 若  $m \notin \mathbb{Z}$ , 则区间内恰有 4 个整数. 于是

$$N(t) = f\left(\frac{t}{4}\right) + f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{3t}{4}\right).$$

注意到  $\frac{t}{4} + \frac{t}{2} = \frac{3t}{4}$ , 所以  $\frac{t}{4}, \frac{t}{2}, \frac{3t}{4}$  中任意两个为整数时, 第三个也必为整数, 因而其中整数的个数只能是 0, 1, 3, 不能恰为 2.

当三者全为整数时, 取  $t = 0$ , 此时  $N(t) = 3 + 3 + 3 = 9$ ; 当三者中恰有一个为整数时, 取  $t = 2$ , 则  $\frac{t}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{t}{2} = 1$ ,  $\frac{3t}{4} = \frac{3}{2}$ , 此时  $N(t) = 4 + 3 + 4 = 11$ ; 当三者全不是整数时, 取  $t = 1$ , 此时  $N(t) = 4 + 4 + 4 = 12$ . 于是函数  $N(t)$  的值域为  $\{9, 11, 12\}$ .

5.  **$(-1, -\frac{1}{2})$**  解题的关键在于根据同一函数只能对同一范围内的自变量作用, 得出一个简单不等式. 由  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 0)$ , 所以  $-1 < 2x + 1 < 0$ , 解得  $-1 < x < -\frac{1}{2}$ .

6. **是同一个函数.** 判断两个函数是否为同一个函数, 要看它们的定义域是否相同, 并且在定义域内的每一个点上对应的函数值是否都相同. 本题中两个函数的定义域都是  $\{0, 1\}$ . 当  $x = 0$  时,  $f(0) = 0^2 = 0$ ,  $g(0) = 0^3 = 0$ ; 当  $x = 1$  时,  $f(1) = 1^2 = 1$ ,  $g(1) = 1^3 = 1$ . 两个函数在定义域的每个点上的函数值都相等, 所以它们是同一个函数.

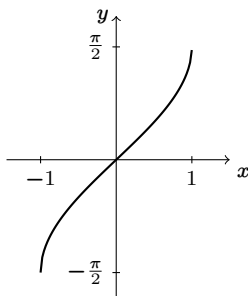
7. 函数  $y = f(x)$  的图象为点集  $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ , 函数  $y = f^{-1}(x)$  的图象为点集  $G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in R\}$ . 任取  $P(x_0, f(x_0)) \in G_f$ , 记  $y_0 = f(x_0)$ , 则  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ , 于是点  $Q(y_0, x_0)$  在  $G_{f^{-1}}$  上; 而  $Q$  恰为  $P$  关于直线  $y = x$  的对称点 (关于  $y = x$  对称正是交换横、纵坐标), 反之亦然. 于是两个图象上的点关于直线  $y = x$  一一对应地互为对称点, 所以它们的图象关于直线  $y = x$  对称.

8. (1)  $y = \arcsin x$ : 定义域  $[-1, 1]$ , 值域  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ;

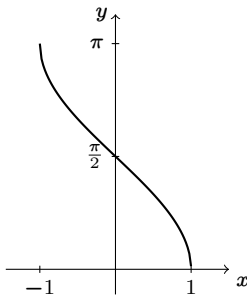
(2)  $y = \arccos x$ : 定义域  $[-1, 1]$ , 值域  $[0, \pi]$ ;

(3)  $y = \arctan x$ : 定义域  $\mathbb{R}$ , 值域  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

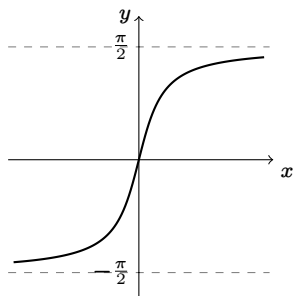
草图如下:



(1)  $y = \arcsin x$



(2)  $y = \arccos x$



(3)  $y = \arctan x$

# 第一章 函数

## 1.1 函数的相关概念

### B 组

1 到 3 题重点考察函数的定义。

1. 【2015 浙江 7】存在函数  $f(x)$  满足, 对于任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有

(A)  $f(\sin 2x) = \sin x$       (B)  $f(\sin 2x) = x^2 + x$       (C)  $f(x^2 + 1) = |x + 1|$       (D)  $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$

2. 【2018 上海 16】设  $D$  是含数 1 的有限实数集,  $f(x)$  是定义在  $D$  上的函数. 若  $f(x)$  的图象绕原点逆时针旋转  $\frac{\pi}{6}$  后与原图象重合, 则在以下各项中,  $f(1)$  的可能取值只能是

(A)  $\sqrt{3}$       (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       (D) 0

3. 【2025 温州一模 8】已知点  $A(2, 0), B(0, 2), P(m, n)$  在曲线  $x = \sqrt{1 - y^2}$  上, 记  $\angle APB = \alpha$ , 则存在函数  $f(x)$ , 对曲线上任意一点  $P$  都有

(A)  $m = f(\alpha)$       (B)  $\alpha = f(m)$       (C)  $n = f(\alpha)$       (D)  $\alpha = f(n)$

4. 【2026 上海春 16】对函数  $y = f(x)$ , 定义集合  $A_f = \{(x, y) | y \geq f(x), x \in D\}$ , 对平面点集  $M$ , 若存在  $(x_0, y_0) \in M$ , 使得对任意  $(x, y) \in M$  都有  $y_0 \leq y$ , 则称  $(x_0, y_0)$  为  $M$  的“最低点”, 对于定义在  $\mathbb{R}$  的两个函数  $f(x), g(x)$ , 下列叙述正确的是.

- (A) 若  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  都有最小值, 则  $A_f \cap A_g$  有最低点  
 (B) 若  $A_f \cap A_g$  有最低点, 则  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  都有最小值  
 (C) 若  $y = f(x)$  或  $y = g(x)$  有最小值, 则  $A_f \cup A_g$  有最低点  
 (D) 若  $A_f \cup A_g$  有最低点, 则  $y = f(x)$  或  $y = g(x)$  有最小值

5. (多选) 设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 函数  $f(x) = \ln[\sin(\pi x) \cdot \sin(2\pi x) \cdots \sin(n\pi x)]$  的定义域为  $D$ . 记  $E = D \cap [0, 1]$ . 两个集合  $A, B$  不交指的是  $A \cap B = \emptyset$ . 则

- (A) 若  $n = 2$ , 则  $f(x)$  是定义在  $D$  上的偶函数  
 (B) 若  $n = 2$ , 则  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{3}$  处取到最大值  
 (C) 若  $n = 4$ , 则  $E$  可表示成 4 个两两不交的开区间的并  
 (D) 若  $n = 6$ , 则  $E$  可表示成 6 个两两不交的开区间的并

6. 【2025 “fiddie” 模拟考 11】(多选) 给定空间中的一个多面体  $\Gamma$ . 为了衡量  $\Gamma$  与正方体的接近程度, 需要定义一个衡量的指标  $f(\Gamma)$ , 满足: (1)  $f(\Gamma) \in [0, 1]$ ; (2) 当  $\Gamma$  是正方体时,  $f(\Gamma) = 1$ . 记  $\Gamma_0$  为包含  $\Gamma$  的最小正方体, 下面几种  $f(\Gamma)$  的定义方式中, 满足 (1) (2) 的是

$$(A) f(\Gamma) = \frac{6^3 \times (\Gamma \text{ 的体积})^2}{(\Gamma \text{ 的表面积})^3}$$

$$(B) f(\Gamma) = \frac{\Gamma_0 \text{ 的所有棱长之和}}{\Gamma \text{ 的所有棱长之和}}$$

$$(C) f(\Gamma) = \frac{\Gamma \text{ 的体积}}{\Gamma_0 \text{ 的体积}}$$

$$(D) f(\Gamma) = \frac{\Gamma \text{ 的最短棱的长度}}{\Gamma \text{ 的最长棱的长度}}$$

7. 【2013 福建 10 改编】设  $S, T$  是  $\mathbb{R}$  的两个非空子集, 如果存在一个从  $S$  到  $T$  的函数  $y = f(x)$  满足: (i)  $T = \{f(x) \mid x \in S\}$ ; (ii) 对任意  $x_1, x_2 \in S$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 那么称这两个集合是“保序同构”的.

(1) 证明下列集合是“保序同构”的:

$$(a). A = \mathbb{N}^*, B = \mathbb{N} \quad (b). A = [-1, 3], B = \{-8\} \cup (0, 10] \quad (c). A = (0, 1), B = \mathbb{R}$$

(2) 证明集合  $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}$  不是“保序同构”的.

8. 解答下述问题:

(1) 【2011 上海理 14】设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 若将函数  $y = f(x)$  的图象绕坐标原点逆时针方向旋转角  $\theta (0 \leq \theta \leq \alpha)$ , 得到曲线  $C$ , 若对于每一个旋转角  $\theta$ , 曲线  $C$  都是某个函数的图象, 求  $\alpha$  的最大值;

(2) 将函数  $y = f(x)$  的图象绕坐标原点逆时针方向旋转角  $\theta (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$  得到曲线  $C$ . 设命题甲: 曲线  $C$  可以被某个函数  $g(x)$  表示; 命题乙: 对任意  $b \in \mathbb{R}$ , 关于  $x$  的方程:  $f(x) = kx + b$  解的个数不超过 1, 其中  $k = \frac{1}{\tan \theta}$ .

i. 证明: 甲是乙的充要条件;

ii. 若将“绕原点旋转”这一条件改为“绕平面内任一点旋转”, 上述结论是否仍然成立?

9. 已知连续函数  $f(x)$  的定义域为  $I$ , 设集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = x\}$ .

(1) 如果  $f(x)$  是严格单调递增函数, 证明:  $A = B$

(2) 如果  $A, B$  都是有限集, 证明:  $|B| - |A|$  是偶数.

1. D.

对 A: 取  $\sin 2x = 0$ , 则  $x$  可以等于 0 或  $\frac{\pi}{2}$  以及其他值,  $\sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$ , 于是 0 对应了两个不同的值: 0 和 1, 不符合函数定义。故 A 不成立。

对 B 同理: 取  $\sin 2x = 0$  可推出不符合函数定义, 故 B 不成立。

对 C 同理: 取  $x^2 + 1 = 1$  可推出不符合函数定义, 故 C 不成立。

对 D: 令  $t = x^2 + 2x$ , 则  $|x+1| = \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{t+1}$ , 对每一个  $t$  都有唯一的值  $\sqrt{t+1}$  与之对应, 符合函数定义, 故 D 正确。

2. B. 考虑到有旋转操作, 把  $P$  写成极坐标  $P = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$  可知道, 若  $P$  是函数图象上一点, 则把  $P$  累次绕原点逆时针旋转  $\frac{\pi}{6}$  得到的 12 个点也在函数图象上。

容易发现, 如果累次旋转得到的点中存在横坐标相等, 纵坐标互为相反数的一对点, 那么就出现了定义域中的一个值对应了两个不同值的情况, 这是不符合函数定义的。

若  $f(1) = 0$ , 则该点对应的极角为 0, 其累次旋转得到的点中存在极角为  $\pm \frac{\pi}{6}$  的点, 于是不符合函数定义。 $f(1) = \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$  也是同理, 不符合函数定义。于是选 B。(容易验证, B 选项对应的情况是可以取到的。)

3. D.4. D. 记  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ , 则  $A_f \cap A_g$  为满足  $y \geq h(x)$  的点  $(x, y)$  全体,  $A_f \cup A_g$  为满足  $y \geq f(x)$  或  $y \geq g(x)$  的点  $(x, y)$  全体。

D 正确: 若  $(x_0, y_0)$  是  $A_f \cup A_g$  的最低点, 不妨设  $(x_0, y_0) \in A_f$ , 则  $y_0 \geq f(x_0)$ 。又对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 点  $(x, f(x)) \in A_f \subseteq A_f \cup A_g$ , 由最低点的定义得  $y_0 \leq f(x)$ ; 特别地  $y_0 \leq f(x_0)$ 。于是  $y_0 = f(x_0)$ , 且对一切  $x$  有  $f(x_0) \leq f(x)$ , 即  $f$  在  $x_0$  处取到最小值。若最低点属于  $A_g$ , 同理可得  $g$  取到最小值。故 D 正确。

A 错误: 取  $f(x) = \frac{1}{|x|}$  (补充定义  $f(0) = 0$ ),  $g(x) = \frac{1}{|x-1|}$  (补充定义  $g(1) = 0$ ), 两者在  $\mathbb{R}$  上都有最小值 0。但  $A_f \cap A_g = \{(x, y) \mid y \geq h(x)\}$ , 而  $h(x) > 0$  恒成立 ( $f(x) \leq 0$  仅在  $x = 0$  成立, 此时  $g(0) = 1 > 0$ ;  $g(x) \leq 0$  仅在  $x = 1$  成立, 此时  $f(1) = 1 > 0$ ), 且当  $x \rightarrow +\infty$  时  $h(x) \rightarrow 0$ 。故  $A_f \cap A_g$  中纵坐标的下确界为 0 却取不到, 没有最低点。

B 错误: 取  $f(x) \equiv 1, g(x) = e^{-x^2}$ 。  $f$  有最小值 1, 而  $g$  无最小值 (下确界为 0 但取不到)。此时因  $e^{-x^2} \leq 1$ , 有  $A_f \cap A_g = \{(x, y) \mid y \geq 1\}$ , 它有最低点 (如  $(0, 1)$ ), 但  $g$  没有最小值。

C 错误: 取  $f(x) \equiv 0, g(x) = -e^x$ 。  $f$  有最小值 0, 但  $A_g = \{(x, y) \mid y \geq -e^x\}$  中当  $x \rightarrow +\infty$  时纵坐标可以任意小, 故  $A_f \cup A_g$  没有最低点。

5. ACD. 记  $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \sin(k\pi x)$ , 则  $f(x) = \ln P_n(x)$ , 定义域  $D = \{x \mid P_n(x) > 0\}$ 。

A 正确:  $n = 2$  时,  $P_2(x) = \sin(\pi x) \sin(2\pi x) = 2 \sin^2(\pi x) \cos(\pi x)$ , 故  $x \in D$  当且仅当  $\sin(\pi x) \neq 0$  且  $\cos(\pi x) > 0$ 。若  $x \in D$ , 则  $-x \in D$ , 且

$$f(-x) = \ln[\sin(-\pi x) \sin(-2\pi x)] = \ln[\sin(\pi x) \sin(2\pi x)] = f(x),$$

故  $f$  在  $D$  上是偶函数。

B 错误:  $n=2$  时, 在  $(0,1)$  内有  $D \cap (0,1) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 此时

$$f(x) = \ln 2 + 2 \ln \sin(\pi x) + \ln \cos(\pi x),$$

求得  $f'(x) = 2\pi \cot(\pi x) - \pi \tan(\pi x)$ ,  $f''(x) = -2\pi^2 \csc^2(\pi x) - \pi^2 \sec^2(\pi x) < 0$ , 故  $f'$  严格递减. 又  $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = +\infty$ , 而

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \pi \left(2 \cot \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3}\right) = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) < 0,$$

故  $f'$  在  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$  内有唯一零点  $x_0$ ,  $f$  在  $x_0$  处取最大值 (事实上  $x_0 = \frac{\arctan \sqrt{2}}{\pi} \approx 0.304$ ), 不在  $x = \frac{1}{3}$  处取最大值, 故 B 错误.

C 正确:  $n=4$  时, 在  $(0,1)$  上  $\sin(\pi x) > 0$  恒成立, 其余各因子的符号如下表 (+ 表示正, - 表示负):

| 区间           | $\sin \pi x$ | $\sin 2\pi x$ | $\sin 3\pi x$ | $\sin 4\pi x$ | 乘积 |
|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|----|
| $(0, 1/4)$   | +            | +             | +             | +             | +  |
| $(1/4, 1/3)$ | +            | +             | +             | -             | -  |
| $(1/3, 1/2)$ | +            | +             | -             | -             | +  |
| $(1/2, 2/3)$ | +            | -             | -             | +             | +  |
| $(2/3, 3/4)$ | +            | -             | +             | +             | -  |
| $(3/4, 1)$   | +            | -             | +             | -             | +  |

故乘积为正的区间为

$$E = \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right),$$

恰为 4 个两两不交的开区间 (其中  $\frac{1}{2}$  处  $\sin(2\pi x) = 0$ , 不属于  $D$ ), 故 C 正确.

D 正确:  $n=6$  时, 各因子在  $(0,1)$  上的符号如下表:

| 区间           | $\sin \pi x$ | $\sin 2\pi x$ | $\sin 3\pi x$ | $\sin 4\pi x$ | $\sin 5\pi x$ | $\sin 6\pi x$ | 乘积 |
|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----|
| $(0, 1/6)$   | +            | +             | +             | +             | +             | +             | +  |
| $(1/6, 1/5)$ | +            | +             | +             | +             | +             | -             | -  |
| $(1/5, 1/4)$ | +            | +             | +             | +             | -             | -             | +  |
| $(1/4, 1/3)$ | +            | +             | +             | -             | -             | -             | -  |
| $(1/3, 2/5)$ | +            | +             | -             | -             | -             | +             | -  |
| $(2/5, 1/2)$ | +            | +             | -             | -             | +             | +             | +  |
| $(1/2, 3/5)$ | +            | -             | -             | +             | +             | -             | -  |
| $(3/5, 2/3)$ | +            | -             | -             | +             | -             | -             | +  |
| $(2/3, 3/4)$ | +            | -             | +             | +             | -             | +             | +  |
| $(3/4, 4/5)$ | +            | -             | +             | -             | -             | +             | -  |
| $(4/5, 5/6)$ | +            | -             | +             | -             | +             | +             | +  |
| $(5/6, 1)$   | +            | -             | +             | -             | +             | -             | -  |

故乘积为正的区间为

$$E = \left(0, \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right),$$



恰为 6 个两两不交的开区间 (其中  $(\frac{3}{5}, \frac{2}{3})$  与  $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$  在  $x = \frac{2}{3}$  处相邻但不交, 因为  $\sin(3\pi x)$  在该点等于 0), 故 D 正确。

综上选 ACD。

6. **CD.** 对于 A 选项, 考虑底面边长为  $a = 2$ 、高为  $h = 2\sqrt{3}$  的正六棱柱  $\Gamma$ , 则正六棱柱的表面积是  $12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 6ah = 36\sqrt{3}$ , 体积是  $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = 36$ . 所以  $f(\Gamma) = \frac{6^3 \times 36^2}{(36\sqrt{3})^3} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ , 不满足条件 1. 更极端地, 对于一个球, 可以在球面上取任意多个点构成一个近似的多面体, 则球与这个多面体的体积和表面积都可以任意接近. 半径为 1 的球的体积是  $\frac{4}{3}\pi$ , 表面积是  $4\pi$ . 所以, 当  $\Gamma$  为球时, 此时  $f(\Gamma) = \frac{6^3 \times \frac{16}{9}\pi^2}{(4\pi)^3} = \frac{6}{\pi} > 1$ , 不满足条件 1. A 错误。

对于 B 选项, 考虑边长为 1 的正方体  $\Gamma_0$  中的正四面体  $\Gamma$ , 则正方体的所有棱长之和为 12, 正四面体的所有棱长之和为  $6\sqrt{2}$ , 且  $\Gamma_0$  是包含  $\Gamma$  的最小正方体. 从而  $f(\Gamma) = \sqrt{2} > 1$ . 更极端地, 考虑一个长度为  $\sqrt{3}$ 、宽和高均为  $c$  的长方体形状的“木棒”  $\Gamma_1$ , 其中  $c > 0$  待定. 则  $\Gamma_1$  无法放进边长为 1 的正方体, 所以包含  $\Gamma_1$  的最小正方体边长大于 1, 这个正方体的棱长之和大于 12. 而  $\Gamma_1$  的所有棱长之和为  $4\sqrt{3} + 8c$ , 则  $f(\Gamma_1) > \frac{12}{4\sqrt{3} + 8c}$ . 当  $c < \frac{\sqrt{3}}{4}$  时,  $f(\Gamma_1) > \frac{12}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ , 不满足条件 1. B 错误

对于 C 选项, 若  $\Gamma$  不是正方体, 则  $\Gamma_0$  所围区域完全覆盖了  $\Gamma$  所围区域, 所以  $0 \leq f(\Gamma) < 1$ . 而如果  $\Gamma$  是正方体, 则  $f(\Gamma) = 1$ , 满足条件 1, 2, C 正确。

对于 D 选项, 因为正方体的所有棱长相等, 故  $f(\Gamma) = 1$ . 另外长度是大于 0 的, 且最短棱的长度不超过最长棱的长度, 所以  $f(\Gamma) \in (0, 1]$ , 满足. 注: 如果  $\Gamma$  是正多面体 (正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体), 那么 D 选项中的  $f(\Gamma) = 1$ . D 正确。

**Fiddie 评:** 原创题. 本题的命制灵感源于 2019 年左右的教育部新高考命题标准样题第 15 题. 然而此题开放性过大, 难以进行批改. 因此改成多选题的形式, 设计了四个定义域是全体多面体的函数, 让考生判断这四个函数是否满足条件 1, 2. 判断它们正确需要严格的证明; 而判断它们错误则具有开放性, 考生可以举出各种不同的多面体例子来说明命题错误。

在设计之初, 本题考虑的是平面上的图形, 但是考虑到样子和课程标准的教学范围差距太大, 而改为考虑空间中的立体图形。

实际上, 本题仍有进一步探索的空间, 因为本题的设计没有引入半序, 导致可以定义一些非常平凡的函数, 如  $f(\Gamma) = 1$ . 感兴趣的同学可以探究各种满足要求的不同的定义方法中的半序会是什么样。

**【命题标准样题 15】** 两位同学在研究三角形时, 分别用三角形的周长和面积刻画三角形三个顶点的“集中程度”, 你认为这两位同学的刻画方式更合理的是 ( $\Delta$ ); 请你再给出一种刻画三角形三个顶点的“集中程度”的方式: ( $\Delta$ ).

7. (1) 这里只给出函数  $f$  的构造, 读者可自行验证其满足“保序同构”的性质。

(a) 取  $f(n) = n - 1$ 。

(b) 取  $f(-1) = -8$ , 且当  $-1 < x \leq 3$  时  $f(x) = \frac{5}{2}(x + 1)$ 。

(c) 取  $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。

(2) 假设存在从  $\mathbb{Z}$  到  $\mathbb{Q}$  的满足“保序同构”性质的函数, 且  $f(p_1) = q_1, f(p_2) = q_2, p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ , 根据性质 (i) 有  $[q_1, q_2] \cap \mathbb{Q} = [p_1, p_2] \cap \mathbb{Z}(\star)$ , 由于两个有理数之间存在无穷个有理数, 而两个正整数之间的正整数是有限个,  $(\star)$  式不可能成立, 故集合  $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Q}$  不是“保序同构”的。

评: 在解决问题前不妨思考, 题中设问涉及了哪些数学概念? 数学概念本身有何性质? 概念之间有何联系……这些都可以作为解题的抓手. 在完成习题后, 也应对题目展现的, 但未考察尽的联系与性质尝试给出推广, 以本题为例, 不妨进一步提问: 两个有理数之间是否存在无穷个无理数? 两个无理数之间是否存在无穷个有理数? 两个实数之间是否存在无穷个有理数与无穷个无理数? 如何给出严格的证明呢?

如果不考虑所谓“保持次序”, 能否在  $\mathbb{Z}$  与  $\mathbb{Q}$  之间建立双射?<sup>1</sup>

8. (1) 先给出一般判据: 把图象上任意两点的连线称为图象的一条弦. 图象绕原点逆时针旋转  $\theta$  后仍是某个函数的图象, 当且仅当图象中不存在方向角为  $\frac{\pi}{2} - \theta$  的弦: 若存在这样的弦, 旋转后它变成竖直线, 其上至少有两个图象点, 违反“函数图象与竖直线至多交于一点”的要求; 反之, 若不存在这样的弦, 则旋转后任意竖直线与曲线至多交于一点, 曲线就是某个函数的图象。

(1)  $\alpha_{\max} = \arctan \frac{2}{3}$ . 对  $y+2 = \sqrt{4+6x-x^2}$  两边平方, 得  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13 (y+2 \geq 0)$ , 于是图象是以  $(3, -2)$  为圆心、 $\sqrt{13}$  为半径的圆上从  $(0, 0)$  到  $(6, 0)$  的一段圆弧 (位于圆心上方), 可以求出原点  $O$  处的切线斜率为  $\frac{3}{2}$ , 可以想象, 将该图象与上述切线一同逆时针旋转  $\theta$  时, 如果该切线越过  $y$  轴到达左侧, 那么图象上将存在两个横坐标相同, 纵坐标不同的点, 于是该图象不能表成某函数图象. 于是  $\theta$  的最大值为  $\arctan \frac{2}{3}$ 。

(2) (i) 直线族  $L_b: y = kx + b$  中每条直线的倾斜角为  $\arctan k = \arctan \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\pi}{2} - \theta$ . 将图象与直线族  $L_b$  共同绕原点逆时针旋转  $\theta$  后,  $L_b$  的方向角变为  $\frac{\pi}{2}$ , 即  $L_b$  被旋转成竖直线; 反过来, 任意竖直线都是某个  $L_b$  绕原点顺时针旋转  $\theta$  后得到的结果. 而曲线  $C$  是某个函数的图象当且仅当旋转后的图象与每条竖直线至多交于一点, 这等价于每条  $L_b$  与原图象至多交于一点, 即对任意  $b \in \mathbb{R}$ , 方程  $f(x) = kx + b$  至多有一个解. 故甲与乙互为充要条件。

(ii) 结论仍然成立. 绕平面内任一点逆时针旋转  $\theta$ , 每条直线的方向角仍然增加  $\theta$ , 方向的变化与旋转中心无关, 旋转中心只影响直线的位置 (平移); 在选定旋转中心的前提下, 直线族  $\{L_b\}$  与竖直线族之间仍保持一一对应关系, 因此上述充要关系依然成立。

9. (1) 先证  $A \subseteq B$ : 若  $x \in A$ , 则  $f(x) = x$ , 于是  $f(f(x)) = f(x) = x$ , 故  $x \in B$ , 所以恒有  $A \subseteq B$ 。

设  $x \in B$ , 记  $y = f(x)$ , 则  $f(y) = f(f(x)) = x$ . 若  $y \neq x$ , 当  $y > x$  时, 由  $f$  严格递增得  $f(y) > f(x)$ , 即  $x > y$ , 与  $y > x$  矛盾; 当  $y < x$  时, 得  $f(y) < f(x)$ , 即  $x < y$ , 与  $y < x$  矛盾. 故  $y = x$ , 即  $x \in A$ , 于是  $B \subseteq A$ , 综上  $A = B$ 。

(2) 由  $A \subseteq B$  得  $|B| - |A| = |B \setminus A|$ . 记  $C = B \setminus A = \{x \mid f(f(x)) = x \text{ 且 } f(x) \neq x\}$ . 对任意  $x \in C$ , 令  $y = f(x)$ , 则  $y \neq x$ , 下面证明  $y \in C$ 。

可知  $f(f(y)) = f(f(f(x))) = f(x) = y$ , 又  $f(y) = f(f(x)) = x \neq y$ , 故  $y \in C$ . 这说明若  $x \in C$ , 则  $f(x) \in C$ , 于是可得出: 若  $f(x) \in C$ , 则  $f(f(x)) = x \in C$ , 这说明  $x, f(x)$  是成对出现的, 于是  $C$  可被划分成若干两两不交的二元集合, 所以  $|C|$  为偶数, 即  $|B| - |A|$  是偶数。

<sup>1</sup>这一问题已经在第一章的拓展阅读中回答了。

# 第一章 函数

## 1.1 函数的相关概念

### C 组

1. 【2009 上海理 22】已知函数  $y = f^{-1}(x)$  是  $y = f(x)$  的反函数。定义：若对给定的实数  $a (a \neq 0)$ ，函数  $y = f(x+a)$  与  $y = f^{-1}(x+a)$  互为反函数，则称  $y = f(x)$  满足“ $a$  和性质”；若函数  $y = f(ax)$  与  $y = f^{-1}(ax)$  互为反函数，则称  $y = f(x)$  满足“ $a$  积性质”。

- (1) 判断函数  $g(x) = x^2 (x > 0)$  是否满足“1 和性质”，并说明理由；
- (2) 求所有满足“2 和性质”的一次函数；
- (3) 设函数  $y = f(x) (x > 0)$  对任何  $a > 0$ ，满足“ $a$  积性质”。求  $y = f(x)$  的表达式。

1.

# 第一章 函数

## 1.1 函数的相关概念