

第一章 计算与比较

1.3 证明不等式的基本方法

1.3.1 比较法

包括作商法与作差法, 其原理很简单, 此处略去。

1.3.2 反证法

在第一章谈了, 此处略去。

1.3.3 放缩法

1.3.4 数学归纳法

考虑证明

$$-1 + 3 - 5 + \cdots + (-1)^n(2n - 1) = (-1)^n n.$$

这个问题的特点是: 要证等式在 n 为任意正整数时都成立. 虽然我们可以验证 $n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 甚至 $n = 1000, 100000, \cdots$ 时该等式成立, 但正整数有无限多个, 无法对它们一一验证. 于是我们想要寻找一种用有限个步骤, 就能处理完无限多个对象的方法.

或许你听说过多米诺骨牌, 在玩骨牌时, 如何它们全部倒下呢? 我们只需在摆放骨牌时保证: 对任意两块相邻的骨牌, 若前一块倒下, 则一定导致后一块也倒下. 这样, 只要推倒第 1 块骨牌就能使所有骨牌都倒下了。

可以验证, 当 $n = 1$ 时, 等式 (*) 成立. 试想, 若从 “ $n = k$ 时等式 (*) 成立” 能推出 “ $n = k + 1$ 时等式 (*) 也成立”, 那么就可以建立一种像推多米诺骨牌那样的自动递推关系.

于是我们得到了数学归纳法¹的基本流程. 现要证明对任意正整数 $n \geq n_0$, 命题 $P(n)$ 成立, 如果可以完成以下两步:

- (1) **奠基 (Basis)**: 证明命题 $P(n_0)$ 成立;
- (2) 证明: 若命题 $P(k)$ 成立, 则命题 $P(k + 1)$ 也成立.

那么根据数学归纳法, 我们就完成了原命题的证明。

在证明:

- (1) 与无穷多个正整数相关的命题;
 - (2) 具有递推, 递归结构的命题
- 时, 使用数学归纳法可能会收到较好的效果.

问题 1.1 证明下述命题:

- (1) 对任意正整数 $n, 6 \mid n^3 + 5n$.
- (2) 对任意正整数 $n, x + y \mid x^{2n-1} + y^{2n-1}$
- (3) 对任意不小于 5 的正整数, 有 $n^2 < 2^n$

¹ 此处讲的是第一类数学归纳法。

(4) 对任意正整数 n , $|\sin n\theta| \leq n|\sin \theta|$

第一章 计算与比较

1.3 证明不等式的基本方法

习 题

1. 使用作差法证明二维形式的柯西不等式.
2. 已知 a, b 是正数, 求证: $a^a b^b \geq a^b b^a$, $a^a + b^b \geq a^b + b^a$
3. 已知 $x, y > 0$, 且 $x + y > 2$, 证明: $\frac{1+x}{y}, \frac{1+y}{x}$ 中至少有一个小于 2.
4. 已知 a, b, c 为实数, $a + b + c > 0, ab + bc + ca > 0, abc > 0$, 求证: $a, b, c > 0$.
5. 【2021 浙江 8】 α, β, γ 是互不相同的锐角, 则 $\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma \cos \alpha$ 三个值中, 求大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值.

6. 证明:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

7. 若 a, b, c 三个正数成等差数列, 公差 $d \neq 0$, 自然数 $n \geq 2$, 求证: $a^n + c^n > 2b^n$.

8. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \pi), n$ 是大于 1 的正整数, 求证:

$$|\sin(a_1 + a_2 + \dots + a_n)| < \sin a_1 + \sin a_2 + \dots + \sin a_n$$

9. 已知 $a_1, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, 且 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 求证: $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n$

10. 【2011 安徽 19】

(1) 设 $x \geq 1, y \geq 1$, 证明: $x + y + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

(2) 设 $1 < a \leq b \leq c$, 证明: $\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c$

11. 斐波那契数列 $\{F_n\}$ 满足, $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3)$, 设 S_n 是 $\{F_n\}$ 的前 n 项和, 证明:

$$(a) S_n = F_{n+2} - 1. \quad (b) F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

12. 若 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\sum_{k=1}^n k^k \leq (n+1)^n$

13. 【1981 全国卷理 6】用数学归纳法证明: $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} (n \in \mathbb{N}^*)$

14. 已知 a, b, c 是正数, 求证: $a^{2a} b^{2b} c^{2c} \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$

15. 已知 $m, n \in \mathbb{R}_+$, 求证: $\frac{m+n}{2} \geq \sqrt[m+n]{m^n n^m}$

1. 略。

2. **两式均成立。** 第一式取对数, 等价于 $(a-b)(\ln a - \ln b) \geq 0$, 因 $\ln x$ 在正数域上递增, 故成立。对第二式不妨设 $a \geq b$, 令 $h(t) = t^a - t^b$ 。若 $b \geq 1$, 则对 $t \geq b$, $h'(t) = t^{b-1}(at^{a-b} - b) \geq t^{b-1}(a-b) \geq 0$, 故 $h(a) \geq h(b)$ 。若 $b < 1 < a$, 则 $h(a) > 0 > h(b)$, 结论显然。若 $0 < b \leq a \leq 1$, 对 $t \in [b, a]$, 只需证 $at^{a-b} \geq b$ 。因 $t \geq b$, 只需证 $ab^{a-b} \geq b$ 。令 $q(u) = \ln(u/b) + (u-b)\ln b$, 则 q 在 $[b, 1]$ 上为凹函数, 且 $q(b) = 0, q(1) = -b\ln b > 0$, 故 $q(u) \geq 0$, 从而 $ab^{a-b} \geq b$ 。因此 $h'(t) \geq 0$, 仍有 $h(a) \geq h(b)$ 。即 $a^a - a^b \geq b^a - b^b$, 整理得 $a^a + b^b \geq a^b + b^a$ 。

3. 反设两个数都不小于 2, 则 $1+x \geq 2y$ 且 $1+y \geq 2x$ 。相加得 $2+x+y \geq 2x+2y$, 即 $x+y \leq 2$, 与题设矛盾。因此结论成立。

4. 由 $abc > 0$, 要么 a, b, c 全为正, 要么恰有一个为正、两个为负。假设后一种情形, 不妨设 $a > 0, b = -u, c = -v$, 其中 $u, v > 0$ 。由 $a+b+c > 0$ 得 $a > u+v$, 于是

$$ab+bc+ca = -a(u+v) + uv < -(u+v)^2 + uv = -(u^2 + uv + v^2) < 0$$

与 $ab+bc+ca > 0$ 矛盾。因此只能是 $a, b, c > 0$ 。

5. 个数不可以为 3: 由基本不等式,

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \leq \frac{1}{2}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma + \cos^2 \alpha) = \frac{3}{2}$$

所以不可能三个值都大于 $\frac{1}{2}$ 。

个数可以为 2: 取 α, β, γ 使得 $\sin \alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{\pi}{4}, \cos \gamma = \frac{1}{8}$,

则 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{16} < \frac{1}{2}, \sin \beta \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} > \frac{9}{16} > \frac{1}{2}, \sin \gamma \cos \alpha = \frac{63}{64} > \frac{1}{2}$, 三个值中有两个值大于 $\frac{1}{2}$ 。

6.

7.

8.

9. (1) 用数学归纳法: $n=1$ 时两式均成立。若前 k 项成立, 则

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

且

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

归纳完成。

(2) $f(t) = t^n$ 在正数域上 $f''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0$ 。因 $a+c=2b$ 且 $a \neq c$, 严格 Jensen 不等式给出 $(a^n + c^n)/2 > b^n$, 故 $a^n + c^n > 2b^n$ 。

(3) $n=2$ 时由和角公式 $|\sin(a_1 + a_2)| \leq \sin a_1 |\cos a_2| + \sin a_2 |\cos a_1| < \sin a_1 + \sin a_2$ 。若前 k 项成立, 则 $|\sin(S_k + a_{k+1})| \leq |\sin S_k| + \sin a_{k+1} < \sum_{i=1}^{k+1} \sin a_i$, 归纳完成。

$$(4) \text{ 逐项使用 } 1+a_i \geq 2\sqrt{a_i}, \text{ 得 } \prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 2^n \sqrt{\prod_{i=1}^n a_i} = 2^n.$$

10. (1) 由于 $x \geq 1, y \geq 1$, 所以

$$x+y+\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy \iff xy(x+y)+1 \leq y+x+(xy)^2.$$

用作差法. 将上式中的右式减左式, 得

$$\begin{aligned} & (y+x+(xy)^2) - (xy(x+y)+1) \\ &= ((xy)^2-1) - (xy(x+y)-(x+y)) \\ &= (xy+1)(xy-1) - (x+y)(xy-1) \\ &= (xy-1)(xy-x-y+1) \\ &= (xy-1)(x-1)(y-1). \end{aligned}$$

而 $x \geq 1, y \geq 1$, 所以 $(xy-1)(x-1)(y-1) \geq 0$, 从而所要证明的不等式成立.

(2) 设 $\log_a b = x, \log_b c = y$, 由对数的换底公式得

$$\log_c a = \frac{1}{xy}, \quad \log_b a = \frac{1}{x}, \quad \log_c b = \frac{1}{y}, \quad \log_a c = xy.$$

于是所要证明的不等式即为

$$x+y+\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy,$$

其中 $x = \log_a b \geq 1, y = \log_b c \geq 1$. 由 (1) 立知所要证明的不等式成立.

Fiddie 评 [?]: 本题考查不等式的基本性质, 对数函数的性质和对数换底公式等基本知识. 考查代数式的恒等变形能力和推理论证能力. 从阅卷数据得知, 本题得分率只有 0.16, 是 2011 年安徽卷得分率最低的解答题 (本题是第 4 道解答题, 2011 年安徽卷共 6 道解答题). 掌握作差法证明不等式、因式分解, 是至关重要的. 这是大部分高中生的盲区, 只要考到作差法证不等式, 得分率通常都非常惨淡.

11. (a). 当 $n=1$ 时, $S_1=F_1=1$, 而 $F_3-1=2-1=1$, 命题成立. 假设 $S_k=F_{k+2}-1$, 则

$$S_{k+1}=S_k+F_{k+1}=(F_{k+2}-1)+F_{k+1}=F_{k+3}-1.$$

由数学归纳法, $S_n=F_{n+2}-1$ 对一切正整数 n 成立.

(b). 当 $n=1$ 时, $F_1^2=1=F_1F_2$, 命题成立. 假设 $\sum_{k=1}^n F_k^2=F_nF_{n+1}$, 则

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}.$$

由数学归纳法, $\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_nF_{n+1}$ 对一切正整数 n 成立.

12. 记 $A_n = \sum_{k=1}^n k^k$, 要证 $A_n \leq (n+1)^n$. 当 $n=1$ 时, $A_1=1 \leq 2=(1+1)^1$, 命题成立. 假设当

$n = k$ 时命题成立, 当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + (n+1)^{n+1} \\ &\leq (n+1)^n + (n+1)^{n+1} \\ &= (n+1)^n (n+2) \\ &\leq (n+2)^n (n+2) = (n+2)^{n+1}. \end{aligned}$$

据数学归纳法, $A_n \leq (n+1)^n$ 对所有正整数 n 成立。

13. 当 $n = 1$ 时, 由二倍角公式 $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$, 有 $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin(x/2)}$. 等式成立。假设当

$n = k$ 时等式成立, 即 $\prod_{j=1}^k \cos \frac{x}{2^j} = \frac{\sin x}{2^k \sin(x/2^k)}$. 则当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{k+1} \cos \frac{x}{2^j} &= \frac{\sin x}{2^k \sin(x/2^k)} \cos \frac{x}{2^{k+1}} \\ &= \frac{\sin x}{2^k \cdot 2 \sin(x/2^{k+1})} \frac{2 \sin(x/2^{k+1}) \cos(x/2^{k+1})}{\sin(x/2^k)} \\ &= \frac{\sin x}{2^{k+1} \sin(x/2^{k+1})}. \end{aligned}$$

等式成立, 据数学归纳法得证。

14. 两边均为正数, 取自然对数后, 即证

$$2a \ln a + 2b \ln b + 2c \ln c \geq (b+c) \ln a + (c+a) \ln b + (a+b) \ln c.$$

将左边减去右边并整理, 得到

$$\begin{aligned} &2a \ln a + 2b \ln b + 2c \ln c - (b+c) \ln a - (c+a) \ln b - (a+b) \ln c \\ &= (a-b)(\ln a - \ln b) + (a-c)(\ln a - \ln c) + (b-c)(\ln b - \ln c). \end{aligned}$$

因为 $\ln t$ 在正数域上严格递增, 所以每一项 $(u-v)(\ln u - \ln v) \geq 0$. 故上式非负, 原不等式得证。

15. 将 n 个数 m 与 m 个数 n 放在一起, 由基本不等式

$$\frac{nm + mn}{m+n} \geq {}^{m+n}\sqrt{m^n n^m}.$$

左端化简为 $\frac{2mn}{m+n}$. 另一方面 $\frac{m+n}{2} - \frac{2mn}{m+n} = \frac{(m-n)^2}{2(m+n)} \geq 0$. 因而 $\frac{m+n}{2} \geq \frac{2mn}{m+n} \geq {}^{m+n}\sqrt{m^n n^m}$, 故原不等式成立; 当且仅当 $m = n$ 时两处等号同时成立。

第一章 计算与比较

1.3 证明不等式的基本方法

B 组

1. 所有的马都有同样的颜色,我们可以对给定集中的马匹数量运用归纳法来证明之.理由就是:“如果恰有一匹马,那么它与自身有相同的颜色,故而奠基是显然的.根据归纳法的步骤,假设有 n 匹马,标号从 1 到 n ,根据归纳假设,标号从 1 直到 $n-1$ 的马都有同样的颜色,类似地,标号从 2 直到 n 的马也有同样的颜色.但是,处于中间位置标号从 2 直到 $n-1$ 的马,当它们在不同的马群中时不可能改变颜色,因为这些是马,而不是变色龙.故而依据传递性可知,标号从 1 到 n 的马也必定有同样的颜色,于是全部 n 匹马都有同样的颜色.证毕.”如果这一推理有误,那么错在哪儿?

2. 【2026 “集英苑”5 月模拟考 10】已知 $\frac{\sin^4 \theta}{2} + \frac{\cos^4 \theta}{3} = \frac{1}{5}$, 则下列值中可以确定的是

- (A) $\sin 2\theta$ (B) $\cos 2\theta$ (C) $\sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$ (D) $\tan \theta \tan 2\theta$

3. 解答下述问题:

- (1) 已知 $x \in [0, \pi]$, 求 $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{64}{1 + \cos x}$ 的最小值.

- (2) 已知实数 x, y 满足 $\sqrt{9x^2 - 1} + \sqrt{9y^2 - 1} = 9xy$, 求 $4x^2 + y^2$ 的最小值.

4. 【2020 全国 III 卷理 23】已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, abc = 1$, 证明: $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$.

5. 解答下述问题:

- (1) 证明一般情况的德摩根律: 对有限集 X , 集合 $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ 满足:

$$\complement_X(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = (\complement_X A_1) \cup (\complement_X A_2) \cup \dots \cup (\complement_X A_n)$$

- (2) 使用数学归纳法证明一般形式的柯西不等式.

- (3) 设 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(x) > 0$. 设 $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$, 点 $A(a, f(a)), B(b, -f(b))$. 设 $X(m, 0)$ 是线段 AB 与 x 轴的交点.

- i. 用 $a, b, f(a), f(b)$ 表示 m ;

- ii. A. 若 $f(x) = \sqrt{x}$, 证明 $m = \sqrt{ab}$;

- B. 求一个函数 $f(x)$ 使得 $m = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$.

- iii. 设 $g_1(x), g_2(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $g_1(x) > 0, g_2(x) > 0$. 当 $f(x) = g_1(x)$ 时, 记 $m = M_1$; 当 $f(x) = g_2(x)$ 时, 记 $m = M_2$. 证明: 如果 $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ 是减函数, 则 $M_1 > M_2$.

根据这个结果推出 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$.

- iv. 取 p, c 使得曲线 $y = p(c-x)^3$ 经过点 A, B .

- A. 证明: $\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{f(a)}{f(b)} \right)^{\frac{1}{3}}$, 并用 $a, b, f(a), f(b)$ 表示 c .

B. 证明: 如果 f 是减函数, 则 $c < m$.

(4) 【2015 湖北理 22】已知数列的各项均为正数, $b_n = n(1 + \frac{1}{n})^n a_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

- 求函数 $f(x) = 1 + x - e^x$ 的单调区间, 并比较 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 与 e 的大小;
- 计算 $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}, \frac{b_1 b_2 b_3}{a_1 a_2 a_3}$, 由此推测计算 $\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的公式, 并给出证明;
- 令 $c_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$, 数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n, T_n , 证明: $T_n < e S_n$

(5) 【2005 全国 I 卷理 22】

- 设函数 $f(x) = x \log_2 x + (1-x) \log_2 (1-x)$ ($0 < x < 1$), 求 $f(x)$ 的最小值;
- 设正数 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2^n}$ 满足 $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{2^n} = 1$, 证明:

$$p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + p_3 \log_2 p_3 + \cdots + p_{2^n} \log_2 p_{2^n} \geq -n$$

(6) 【2012 北京理 20 节选】设 A 是由 $m \times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的数表, 满足: 每个数的绝对值不大于 1, 且所有数的和为零. 记 $S(m, n)$ 为所有这样的数表构成的集合. 对于 $A \in S(m, n)$, 记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之和 ($1 \leq i \leq m$), $c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之和 ($1 \leq j \leq n$); 记 $k(A)$ 为 $|r_1(A)|, |r_2(A)|, \dots, |r_m(A)|, |c_1(A)|, |c_2(A)|, \dots, |c_n(A)|$ 中的最小值.

- 对如下数表 A , 求 $k(A)$ 的值;

1	1	-0.8
0.1	-0.3	-1

- 设数表 $A \in S(2, 3)$ 形如

1	1	c
a	b	-1

求 $k(A)$ 的最大值;

(7) 【2011 湖北 21】

- 已知函数 $f(x) = \ln x - x + 1, x \in (0, +\infty)$, 求函数 $f(x)$ 的最大值;
- 设 $a_k, b_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 均为正数, 证明:

$$A. \text{ 若 } a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \text{ 则 } a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdots a_n^{b_n} \leq 1$$

$$B. \text{ 若 } b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1, \text{ 则 } \frac{1}{n} \leq b_1^{b_1} b_2^{b_2} \cdots b_n^{b_n} \leq b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$$

(8) 【2012 湖北 22】已知函数 $f(x) = r x^{r-1} + (1-r)x^r (x > 0)$, 其中 r 为有理数, 且 $0 < r < 1$.

- 求 $f(x)$ 的最小值;
- 试用 (1) 的结果证明如下命题: 设 $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, b_1, b_2$ 为正有理数, 若 $b_1 + b_2 = 1$, 则 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$;
- 请将 (2) 中的命题推广到一般形式, 并用数学归纳法证明你所推广的命题.

(9) 【2007 湖北理 21】已知 m, n 为正整数.

- 用数学归纳法证明: 当 $x > -1$ 时, $(1+x)^m \geq 1+mx$;
- 对于 $n \geq 6$, 已知 $\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n < \frac{1}{2}$, 求证: $\left(1 - \frac{m}{n+3}\right)^n < \frac{1}{2}, m = 1, 2, \dots, n$
- 求满足等式 $3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n = (n+3)^n$ 的所有正整数 n .

(10) 【2003 江苏 23 改编】

- i. 若 $\cos x$ 是有理数, 证明对任意正整数 n , $\cos nx$ 是有理数;
- ii. 若 $\sin x$ 为有理数, 证明对任意正整数 n , $\sin^2(nx)$ 是有理数.

6. 第二类数学归纳法也称为强归纳法. 现证明对任意正整数 n , 命题 $P(n)$ 成立, 只需满足:

i. $P(1)$ 成立;

ii. 对任意正整数 k , 若 $P(1), P(2), \dots, P(k)$ 均成立, 则可以推出 $P(k+1)$ 成立.

利用第二类数学归纳法, 解答下述问题:

- (1) 现要证明这一问题: 任意大于等于 3 分的邮资都可以只用 3 分和 4 分的邮票构成. 证明思路如下:

奠基: 可以只用一张 3 分的邮来构成 3 分的邮资, 只用一张 4 分的邮票来构成 4 分的邮资。

归纳: 假设对所有满足 $j \leq k$ 的非负整数 j , 只用 3 分和 4 分的邮票就能构成 j 分的邮资. 那么就可以通过用一张 4 分的邮票代替一张 3 分的邮票, 或通过用三张 3 分的邮票代替两张 4 分的邮票来构成 $k+1$ 分的邮资。

根据第二类数学归纳法, 命题得证。

指出这一证明思路的问题。

1. **归纳步骤在 $n=2$ 时失效。** 当 $n=2$ 时, 第一组“第 1 至第 $n-1$ 匹马”和第二组“第 2 至第 n 匹马”分别只有第 1 匹和第 2 匹马, 两个集合没有公共元素, 不能由两组分别同色推出两匹马同色。因此归纳步骤无法从 $n=1$ 推出 $n=2$, 整个证明不成立。

2. **D.** 令 $u = \sin^2 \theta$, 则 $\cos^2 \theta = 1 - u$, 题设化为 $\frac{u^2}{2} + \frac{(1-u)^2}{3} = \frac{1}{5}$ 。两边乘以 30, 得 $15u^2 + 10(1-u)^2 = 6$, 即 $25u^2 - 20u + 4 = 0$, 所以 $u = \frac{2}{5}$ 。因而 $\tan^2 \theta = \frac{u}{1-u} = \frac{2}{3}$, 从而 $\tan \theta \tan 2\theta = \frac{2 \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 4$, 该值确定, 故选 D。

3. (1) 做三角换元, 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 于是

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

于是原式化为

$$32 + 32t^2 + \frac{1}{t} = 32 + (32t^2 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t}) \geq 32 + \sqrt[3]{32t^2 \cdot \frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{2t}} = 38$$

当且仅当 $t = \frac{1}{4}$ 时取等, 据此可解出 x , 是符合题意的。于是原式的最小值为 38. (注: 也可在最后求最小值时采用对函数求导的方法。)

评: 上述三角换元可以将三角函数化为多项式函数, 在某些时候可简化代数变形。也是简单积分中的一种常见变形方式。

(2) 设 $\sqrt{9x^2 - 1} = u, \sqrt{9y^2 - 1} = v$, 则有 $9x^2 = u^2 + 1, 9y^2 = v^2 + 1$, 将原条件左右平方, 并消去 x, y , 得到

$$(u+v)^2 = (u^2+1)(v^2+1)$$

化简得 $(uv-1)^2 = 0$, 于是 $uv = 1$. 而 $4x^2 + y^2 = \frac{1}{9}(5 + 4u^2 + v^2) \geq 1$, 当且仅当 $2u = v$, 即 $u = \frac{\sqrt{2}}{2}, v = \sqrt{2}$ 时取到等号, 据此解出的 x, y 是符合题意的。于是原式的最小值为 1.

4.

5. **见下文。** 对任意 $x \in X, x \notin A_1 \cap \cdots \cap A_n$ 当且仅当存在某个 i 使 $x \notin A_i$, 这正是 $x \in (\complement_X A_1) \cup \cdots \cup (\complement_X A_n)$, 故两集合相等。

一般形式的柯西不等式用归纳法证明。 $n=2$ 时,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

等价于 $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$, 故成立。假设前 k 项成立, 记

$$A = \sum_{i=1}^k a_i b_i, \quad B = \sum_{i=1}^k a_i^2, \quad C = \sum_{i=1}^k b_i^2.$$

由归纳假设 $A^2 \leq BC$, 得 $|A| \leq \sqrt{BC}$. 于是

$$\begin{aligned} |A + a_{k+1} b_{k+1}| &\leq |A| + |a_{k+1} b_{k+1}| \\ &\leq \sqrt{BC} + |a_{k+1}| |b_{k+1}| \\ &\leq \sqrt{(B + a_{k+1}^2)(C + b_{k+1}^2)}, \end{aligned}$$

最后一步仍是二维柯西不等式。两边平方即得前 $k+1$ 项的结论, 归纳完成。

由递推式 $\cos((n+1)x) = 2\cos x \cos nx - \cos((n-1)x)$, 可知当 $\cos x$ 为有理数时, $\cos nx$ 对所有正整数 n 均为有理数。又 $\sin^2(nx) = \frac{1-\cos(2nx)}{2}$, 所以当 $\sin x$ 为有理数时, 取 $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, 可得 $\sin^2(nx)$ 为有理数。

6. **归纳步骤错误, 且原命题本身错误。** 原命题声称任意不小于 3 的整数都能表示成 3 和 4 的非负整数倍之和, 但 5 不能表示为 $3m+4n$ (其中 m, n 为非负整数): 当 $n=0$ 时 $3m=5$ 无整数解; 当 $n \geq 1$ 时 $4n \geq 4$, 只需检验 $n=1$, 此时 $3m=1$ 也无非负整数解。因此原命题已经被 5 这一反例否定。

归纳步骤也确实不成立。若取 $k=4$, 归纳假设只覆盖 3 分和 4 分邮资可以构成, 但 4 分的构成方案中没有 3 分邮票, 也没有两张 4 分邮票, 所谓“替换一张 3 分邮票”或“替换两张 4 分邮票”均无法进行, 不能推出 5 分邮资可以构成。此外, 题干若把“所有满足 $j \leq k$ 的非负整数 j ”包括 $j=0$, 则 0 分也不在“用邮票构成”的正整数范围内, 表述本身还存在范围不一致。

参考文献

- [1] 普通高中课程标准实验教科书选修 4-5: 不等式选讲 [M]. 北京, 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心.
- [2] Fiddie 数学杂谈. 平均值的函数观点 (2025 剑桥大学 STEP3)[EB/OL], 2026-05-16. <https://mp.weixin.qq.com/s/cuq4qEIhnZI-uzZvCB8Acg>
- [3] Fiddie 数学杂谈. 绝大部分高中生的盲区——作差法证不等式 (2011 安徽理 19)[EB/OL]. 2024-03-15. https://mp.weixin.qq.com/s/G0wF3NgSDdYt2_y1HOH1WQ

第一章 计算与比较

1.3 证明不等式的基本方法

第一章 计算与比较

1.3 证明不等式的基本方法