

第一章 计算与比较

1.2 条件最值

1.2.1 基本不等式

定理 1.2.1 (基本不等式). 已知正数 a, b , 有

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

定理 1.2.2 (基本不等式的一般形式). 已知正数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 有

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时, 等号成立.

二元形式的基本不等式的证明过于简单, 此处略证。一般形式的基本不等式的证明将在后续给出不同方式的证明。

1.2.2 柯西不等式

定理 1.2.3 (二维形式的柯西不等式). 若 a, b, c, d 都是实数, 则

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

当且仅当 $ad = bc$ 时, 等号成立.

作差法证明二维形式的柯西不等式留作习题, 下介绍柯西不等式的几何背景。在平面直角坐标系 xOy 中有向量 $\alpha = (a, b), \beta = (c, d)$, 记 α 与 β 的夹角为 θ 。据向量数量积的定义有

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta| \cos \theta$$

于是 $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta| |\cos \theta|$, 而 $|\cos \theta| \leq 1$, 因此 $|\alpha \cdot \beta| \leq |\alpha||\beta|$, 即

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}$$

两边平方得到

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

如果向量 α 和 β 中有零向量, 则 $ad - bc = 0$, 以上不等式取等号. 如果向量 α 和 β 都不是零向量, 则当且仅当 $|\cos \theta| = 1$, 即向量 α 和 β 共线时, 以上不等式取等号. 这时存在非零实数 k , 使 $\alpha = k\beta$, 即 $(a, b) = k(c, d)$, 可得 $ad - bc = 0$.

观察柯西不等式的二维形式, 进一步猜想其 n 维形式.

定理 1.2.4 (柯西不等式的一般形式). 若 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 都是实数, 则

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

当且仅当 $b_i = 0$ 或存在一个数 k 使得 $a_i = kb_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 等号成立.

证明. 设 $A = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, B = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n, C = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$, 即证 $AC \geq B^2$. 考虑二次函数 $f(x) = Ax^2 + 2Bx + C = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$. 可知

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2 \geq 0$$

故 $f(x)$ 的判别式 $\Delta = 4B^2 - 4AC \leq 0$, 即 $B^2 \leq AC$. 当且仅当 $a_ix + b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时取等. 当 $x = 0$ 时, $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 当 $x \neq 0$ 时, $a_i = -\frac{b_i}{x} (i = 1, 2, \dots, n)$, 即存在 k , 使得 $a_i = kb_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 时取等. $\square$

1.2.3 排序不等式

看这个问题:¹有三个房间需要粉刷, 要求每个房间只用一种颜色, 且三个房间颜色各不相同. 已知三个房间的粉刷面积 (单位: m^2) 分别为 x, y, z , 且 $x < y < z$, 三种颜色涂料的粉刷费用 (单位: 元/ m^2) 分别为 a, b, c , 且 $a < b < c$. 求粉刷的最小总费用.

简化情况进行探究. 设 $a = x = 1, b = y = 2, c = z = 3$. 计算各种组合发现: $ax + by + cz = 14$ 为总费用最大值, $az + by + cx = 10$ 为总费用最小值. 观察到最大值出现在 a, b, c 与 x, y, z 皆为升序排列时, 最小值出现在其中一个序列升序排列, 另一序列降序排列时. 于是做出猜想 (已被验证正确, 此处写成定理形式)

定理 1.2.5 (排序不等式). 设 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 为两组实数, $c_1, c_2, \dots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 的任一排列, 则

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \leq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

记不等式最左侧的和为反序和, 不等式最右侧的和为顺序和, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时, 反序和等于顺序和.

¹取自【2015 浙江文 6】

证明. 因为 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 的全排列只有 $n!$ 种, 所以

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \quad (1)$$

的不同的值只有有限个, 其中必有最大值和最小值.

考虑 (1) 式, 若 $c_1 \neq b_1$, 则有某 $c_k = b_1, c_1 > c_k$. 将 (1) 中 c_1, c_k 对换, 得

$$S' = a_1c_k + \cdots + a_kc_1 + \cdots + a_nc_n \quad (2)$$

(2) - (1) 得

$$S' - S = a_1c_k + a_kc_1 - a_1c_1 - a_kc_k = (a_k - a_1)(c_1 - c_k) \geq 0$$

这说明将 (1) 中的第一项调换为 a_1b_1 后, 和式不减小.

若 $a_1 = b_1$, 转而考察 c_2 并进行类似讨论. 可以证明, 将 (1) 中的第一项换为 a_1b_1 , 第二项换为 a_2b_2 后, 和式不减小. 如此进行下去, 经有限步调整, 可知在一切和式中, 最大和式对应的情况只可能是 b_i 由小到大排序, 对应顺序和 S_1 . 同理可证, 最小和数是反序和 S_2 , 即 $S_2 \leq S \leq S_1$ $\square$

问题 1.1 参考排序不等式的证明思路, 利用逐步调整法证明基本不等式的一般形式.

提示: 设 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p$, 证明 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{p}{n}$

1.2.4 琴生不等式

有一类函数满足下述特殊性质, 设其解析式为 $y = f(x)$, 在其图象上任取不重合的两点 A, B , 连接 AB 得到图象的一条弦, 这条弦处在图象的上方, 例如 $y = x^2, y = e^x$ 等. 考虑这一性质的代数形式, 设点 $A(x, f(x)), B(y, f(y))$, 弦 AB 上的点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$, 代入 A, B 坐标得到 $P(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$, 于是对任意 $\lambda \in [0, 1]$, 点 P 的纵坐标都不小于其横坐标对应的函数值, 即

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

我们把满足上述性质的函数称为凸函数, 具体定义如下:

定义 1.2.6 (凸函数). 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , $f(x)$ 称为凸函数 (Convex Function) 当且仅当对任意 $x, y \in I$ 和 $0 \leq \lambda \leq 1$, 有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \quad (1)$$

命题 1.2.7. 设凸函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 则对任意 $x_1, x_2 \in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

定理 1.2.8 (琴生不等式). 设凸函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 则对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, 和 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1, 0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i),$$

证明. 用数学归纳法, 当 $n = 2$ 时, 命题成立. 假设当 $n = k$ 时命题成立. 考虑 $n = k + 1$ 的情况. 若 $\lambda_{k+1} = 1$, 则 $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, 从而 $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$, 结论成立.

若 $\lambda_{k+1} \neq 1$, 令 $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}}, i = 1, 2, \dots, k$. 由于 $\lambda_i \geq 0$, 所以 $\mu_i \geq 0$, 并且 $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$. 设 $y = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$, 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{k+1})y + \lambda_{k+1}x_{k+1}$. 由凸函数定义,

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_{k+1})f(y) + \lambda_{k+1}f(x_{k+1}).$$

由归纳假设, $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^k \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \mu_i f(x_i)$, 因此

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &\leq (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \mu_i f(x_i) + \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i) + \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

于是完成了证明。

□

当所有权重相等, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ 时, 得到

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

第一章 计算与比较

1.2 条件最值

A1 组

- 【2008 课标全国文 7 理 6】已知 $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, 则使得 $(1 - a_i x)^2 < 1 (i = 1, 2, 3)$ 都成立的 x 的取值范围是
 (A) $(0, \frac{1}{a_1})$ (B) $(0, \frac{2}{a_1})$ (C) $(0, \frac{1}{a_3})$ (D) $(0, \frac{2}{a_3})$
- 【2011 浙江 7】若 a, b 为实数, 则 “ $0 < ab < 1$ ” 是 “ $a < \frac{1}{b}$ 或 $b > \frac{1}{a}$ ” 的
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【2026 “漫游数海” 预测卷 7】已知 a, b 是实数, 则 (Δ) 是 $|a - b| > |b| - |a|$ 的充要条件
 (A) $a < b$ (B) $b < a$ (C) $\frac{a}{b} < 1$ (D) $\frac{b}{a} < 1$
- 【2013 浙江文 10】若正数 a, b, c, d 满足 $ab \geq 4, c + d \leq 4$, 则
 (A) $\min\{a, b\} \geq 2, \min\{a, b\} \leq 2$ (B) $\min\{a, b\} \geq 2, \max\{c, d\} \geq 2$
 (C) $\max\{a, b\} \geq 2, \min\{c, d\} \leq 2$ (D) $\max\{a, b\} \geq 2, \max\{c, d\} \geq 2$
- 【2021 八省联考变式 7】若 $a > b > c > 1$, 且 $ac < b^2$, 则
 (A) $\log_a b < \log_b c < \log_c a$ (B) $\log_c b > \log_b a > \log_a c$
 (C) $\log_b c > \log_a b > \log_c a$ (D) $\log_b a > \log_c b > \log_a c$
- 已知正实数 x, y 满足 $\log_2 x + \log_3 y = 2 \log_6(xy)$, 则下列关系可能正确的是
 (A) $1 < x < y$ (B) $y < x < 1$ (C) $y > x + 1$ (D) $x > y + 1$
- 在 $|x + y|, |x - y|, |x - z|, |y + x - 3|$ 四个数中
 (A) 任意三个数不能同时等于 0 (B) 任意两个数之和不等于另两个数之和
 (C) 至少有一个数不大于 3 (D) 至少有一个数不小于 1
- 【2010 安徽文 15】(多选) 已知正实数 a, b 满足 $a + b = 2$, 则对任意满足题意的 a, b , 下述不等式成立的是
 (A) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$ (B) $a^2 + b^2 \geq 2$ (C) $a^3 + b^3 \geq 3$ (D) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$
- 解答下述问题
 (1) 【2010 江苏 12】设实数 x, y 满足 $3 \leq xy^2 \leq 8, 4 \leq \frac{x^2}{y} \leq 9$, 求 $\frac{x^3}{y^4}$ 的最大值.

(2) 设实数 x, y 满足 $3 < x + y < 4$, $2 < x + y^2 < 6$, 求 $(x + y)(x + y^2)$ 的取值范围。

10. 【2008 湖南理 10】对于给定的 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义 $C_n^x = \frac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}$, $x \in [1, +\infty)$, 则当 $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right)$ 时, 求函数 C_8^x 的值域。

11. 【1990 上海 18】已知 $1 < x < d$, $a = (\log_d x)^2$, $b = \log_d(x^2)$, $c = \log_d(\log_d x)$, 比较 a, b, c 的大小。

12. 已知 $a > b > 1$, $x = \log_b a$, $y = \log_{2b} 2a$, $z = \log_{3b} 3a$, $w = \log_{4b} 4a$, 比较 x, y, z, w 的大小。

13. $f(x) = \frac{p \sin x}{q \cos x + r}$ 在何种条件下存在最值? 在此情况下, 给出求解最值的方法 (至少两种), 并叙述这几种方法的优劣。

14. 解答下述问题:

(1) 【2001 京蒙皖理 15】已知 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ (α, β, γ 均为锐角), 求 $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ 的最大值。

(2) 【2013 山东 12】设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, 求 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值。

(3) 【2004 全国 I 卷理 12】 $a^2 + b^2 = 1$, $b^2 + c^2 = 2$, $c^2 + a^2 = 2$, 求 $ab + bc + ac$ 的最小值。

(4) 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{x}{2} \log_2 \frac{x}{8}$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$), 求 $\frac{1}{x_1} + \frac{9}{x_2}$ 的最小值。

(5) 已知 $x + 2y + 3z = 1$, 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值。

(6) 【2012 湖北理 6】设 a, b, c, x, y, z 是正数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 40$, $ax + by + cz = 20$, 求 $\frac{a+b+c}{x+y+z}$ 。

15. 解答下述问题

(1) 【2005 福建理 11】已知实数 a, b 满足 $a^2 + 2b^2 = 6$, 求 $a + b$ 的最小值。

(2) 已知实数 x, y 满足 $x^2 - 3xy - 4y^2 = 1$, 求 $x^2 + 4y^2$ 的最小值。

(3) 已知实数 a, b 满足 $a + b = 4$, 求 $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1}$ 的最大值。

(4) 已知实数 x, y 满足 $x + y = 1$, 求 $(x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$ 的最小值。

(5) 求 $\frac{x(1+x^2)}{(1+2x^2)(2+x^2)}$ 的最大值。

(6) 【2012 江苏 14】已知正数 a, b, c 满足 $5c - 3a \leq b \leq 4c - a$, $c \ln b \geq a + c \ln c$, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围。

(7) 已知 $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$, 求 $x^2 + y^2$ 的取值范围。

16. 解答下述问题

(1) 求 $\frac{(\cos \theta + 1)(\sin \theta + 1)}{\sin \theta \cos \theta}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 的最小值。

(2) 【2008 辽宁文 16】求函数 $\frac{2\sin^2 x + 1}{\sin 2x}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 的最小值。

(3) 求 $\sqrt{7 + 2\sqrt{16 - r^2}} \cdot \sqrt{49 - 4(16 - r^2)}$ ($\frac{\sqrt{15}}{2} < r < 4$) 的最大值。

(4) 求 $\sqrt{36-x^2}(x+1)$ 的最大值.

(5) 已知 $x, y, z \in \mathbb{R}$, $2x + y - \sqrt{5}z = 2$, 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值.

(6) 求 $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 4}$ 的最小值.

(7) 求 $\frac{\sqrt{16x^2 + 1}}{|3x + 1|}$ 的最小值.

(8) 求 $\frac{2 + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 的最大值.

17. 【2024 九省联考 14】以 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数, 设 $0 < a < b < c < 1$, 已知 $b \geq 2a$ 或 $a + b \leq 1$, 求 $\max\{b - a, c - b, 1 - c\}$ 的最小值.

18. 【2025 成都零诊 11】设 x, y 为正实数且满足
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + xy \\ x^2 + 4 \geq y^2 \\ y^2 + 4 \geq x^2 \end{cases},$$
 分别求 xy 的最大值、最小值与 $x + y$ 的最大值与最小值.

19. 【2026 浙江学考 18】已知 $a, b \in (0, 1)$, 若不等式 $a^2(1 - b) + b^2(1 - a) < m$ 恒成立, 求 m 的最小值.

20. 已知 $a > 0$, 正实数 m, n 满足 $m + n = \sqrt{a}$, 若 $(m + \frac{1}{m})(n + \frac{1}{n})$ 在 $m = n$ 时取到最小值, 求 a 的取值范围.

21. 【2014 辽宁 16】对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$, 且使 $|2a + b|$ 最大时, 求 $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$ 的最小值.

1. **B.** 由于 $a_i > 0$, 对每个 i 有

$$(1 - a_i x)^2 < 1 \iff -1 < 1 - a_i x < 1 \iff 0 < a_i x < 2 \iff 0 < x < \frac{2}{a_i}.$$

三个不等式同时成立时,

$$x \in \bigcap_{i=1}^3 \left(0, \frac{2}{a_i}\right).$$

因为 $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, 所以 $\frac{2}{a_1} < \frac{2}{a_2} < \frac{2}{a_3}$, 交集为 $\left(0, \frac{2}{a_1}\right)$, 故选 B.

评: 实测数据: 本题理科难度 0.354, 区分度 0.285. 文科难度 0.326, 区分度 0.199.

2. **A.** 先证充分性. 若 $0 < ab < 1$, 则 a, b 同号. 当 $a, b > 0$ 时, $ab < 1$ 等价于 $a < \frac{1}{b}$; 当 $a, b < 0$ 时, $ab < 1$ 等价于 $b > \frac{1}{a}$. 因此必有 $a < \frac{1}{b}$ 或 $b > \frac{1}{a}$.

必要性不满足. 取 $a = -1, b = 1$, 则 $a < \frac{1}{b}$ 成立, 但 $ab = -1$, 不满足 $0 < ab < 1$. 所以原条件是充分不必要条件, 选 A.

3.

4. **C.** 若同时有 $a < 2$ 且 $b < 2$, 则 $ab < 4$, 与 $ab \geq 4$ 矛盾, 故 $\max\{a, b\} \geq 2$. 若同时有 $c > 2$ 且 $d > 2$, 则 $c + d > 4$, 与 $c + d \leq 4$ 矛盾, 故 $\min\{c, d\} \leq 2$. 所以选 C.

5. **B.** 可知 $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}, \log_b c = \frac{\ln c}{\ln b}$, 而 $\ln a \ln c < \frac{(\ln a + \ln c)^2}{4} < \frac{(\ln b^2)^2}{4} = (\ln b)^2$, 于是 $\log_a b > \log_b c$, A, C 错误. 由 $a^2 > bc$ 可以得到 $\log_b a > \log_a c$, 于是 D 错误, B 正确.

评: 解答中这一基本不等式的用法在【2020 全国 III 卷理 12】中已经谈了一次.

6.

7.

8. **BD.** 由 $a + b = 2$, 有

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 - 2ab.$$

又由 $ab \leq ((a + b)/2)^2 = 1$, 得 $a^2 + b^2 \geq 2$, 故 B 正确. 同样因为 $ab \leq 1$, 所以

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a + b}{ab} = \frac{2}{ab} \geq 2,$$

故 D 正确. 取 $a = b = 1$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2 > \sqrt{2}$, 且 $a^3 + b^3 = 2 < 3$, 所以 A, C 均不恒成立.

9. **(1) 27; (2) (33/4, 24).** (1) 令 $u = xy^2, v = x^2/y$. 由题设, $3 \leq u \leq 8, 4 \leq v \leq 9$, 且

$$\frac{x^3}{y^4} = \frac{(x^2/y)^2}{xy^2} = \frac{v^2}{u} \leq \frac{9^2}{3} = 27.$$

取 $x = 3, y = 1$ 时 $u = 3, v = 9$, 等号成立, 故最大值为 27.

(2) 令

$$u = x + y, \quad v = x + y^2.$$

则题设等价于 $3 < u < 4, 2 < v < 6$. 同时

$$v - u = y^2 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$

反过来, 若 $2 < u < 4, 2 < v < 6$ 且 $v - u \geq -1/4$, 则方程 $y^2 - y - (v - u) = 0$ 的判别式为 $1 + 4(v - u) \geq 0$, 存在实数 y ; 取 $x = u - y$, 便有 $x + y = u$ 且 $x + y^2 = v$. 因此 (u, v) 的可行

域恰为

$$D = \left\{ (u, v) : 3 < u < 4, 2 < v < 6, v - u \geq -\frac{1}{4} \right\}.$$

在 D 中, 由 $v - u \geq -1/4$ 得 $v \geq u - 1/4$, 从而

$$uv \geq u \left(u - \frac{1}{4} \right) > 3 \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{4},$$

其中最后一个严格不等式来自 $u > 3$ 且函数 $u(u - 1/4)$ 在 $u > 3$ 上严格递增. 下界 $33/4$ 可以逼近: 取 $u = 3 + \varepsilon, v = u - 1/4$, 其中 $\varepsilon > 0$ 足够小, 则 $(u, v) \in D$ 且 $uv = (3 + \varepsilon)(11/4 + \varepsilon) \rightarrow 33/4$. 上界 24 也可以逼近: 取 $u = 4 - \varepsilon, v = 6 - \varepsilon$, 则 $(u, v) \in D$ 且 $uv \rightarrow 24$. 又 D 是凸集, 函数 uv 连续, 故 $uv(D)$ 是一个区间; 结合其下确界为 $33/4$ 、上确界为 24, 并且两端均不能取到, 得到取值范围为 $\boxed{(33/4, 24)}$.

10. $\underline{(4, 16/3]} \cup \underline{(28/3, 28]}$

11.

12.

13.

14. (1) 可以得到 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$, 该式左侧 $\geq 3 \sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}$, 于是 $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 2\sqrt{2}$.

(2) 令 $t = \frac{x}{y} > 0$, 则 $\frac{xy}{z} = \frac{t}{t^2 - 3t + 4} = \frac{1}{t + \frac{4}{t}} - 3$, 当 $t = 2$ 即 $x = 2y$ 时 $\frac{xy}{z}$ 取到最大值, 此

时 $z = 2y^2$, 故 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} \leq 1$.

(3) 由上述三个条件可以解得 $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}, c^2 = \frac{3}{2}$. 当 $c = -\sqrt{\frac{3}{2}}, b = a = \sqrt{1/2}$ 时, $ab + bc + ca$ 取到最小值 $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

(4) $f(x) = (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 3)$, 设 $\log_2 x = t, \log_2 x_1 = t_1, \log_2 x_2 = t_2$, 构造函数 $g(t) = t^2 - 4t + 3$, 其图象关于直线 $t = 2$ 对称, 而 $t_1 \neq t_2$ 且 $g(t_1) = g(t_2)$, 于是 $t_1 + t_2 = 4$, 可得 $x_1 x_2 = 16$, 从而 $\frac{1}{x_1} + \frac{9}{x_2} \geq \frac{6}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{3}{2}$.

(5) 由柯西不等式, $1 = (x + 2y + 3z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 14(x^2 + y^2 + z^2)$, 故最小值为 $1/14$, 等号在 $(x, y, z) = (\frac{1}{14}, \frac{2}{14}, \frac{3}{14})$ 时取得.

(6) 由柯西不等式, $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 20^2$, 其取值对应该不等式的取等条件, 即 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 2$. 于是 $\frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{1}{2}$.

15. (1) 做三角换元, 设 $a = \sqrt{6} \cos \theta, b = \sqrt{3} \sin \theta$, 于是 $a + b = \sqrt{6} \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \geq -3$.

(2) 对条件做因式分解有 $(x - 4y)(x + y) = 1$, 设 $x - 4y = u, x + y = v$, 则 $uv = 1$, 而 $x = \frac{u + 4v}{5}, y = \frac{v - u}{5}$. 于是 $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}u^2 + \frac{4}{5}v^2 \geq \frac{4}{5}uv = \frac{4}{5}$. 故原式最小值为 $\frac{4}{5}$.

(3) 对原式通分得到 $\frac{a^2 + b^2 + 2}{a^2 b^2 + a^2 + b^2 + 1}$, 而 $2ab + a^2 + b^2 = (a + b)^2 = 16$, 于是设 $ab = x, a^2 + b^2 = 16 - 2x$, 原式化为 $\frac{2(9 - x)}{x^2 - 2x + 17}$, 设 $9 - x = u$, 上式化为 $\frac{2u}{u^2 - 16u + 80} = \frac{2}{u + \frac{80}{u} - 16} \leq$

$$\frac{2}{8\sqrt{5}-16} = \frac{\sqrt{5}+2}{4}. \text{ 于是原式的最大值为 } \frac{\sqrt{5}+2}{4}.$$

(4) 对原式通分得到 $\frac{x^2y^2+x^2+y^2+1}{xy}$, 而 $2xy+x^2+y^2=(x+y)^2=1$, 于是设 $xy=t, x^2+y^2=1-2t$, 原式化为 $\frac{t^2-2t+2}{t} \geq 2\sqrt{2}-2$, 故原式的最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

$$(5) \frac{x(x^2+1)}{(1+2x^2)(2+x^2)} = \frac{(x+\frac{1}{x})}{2x^2+\frac{2}{x^2}+5} = \frac{8\left(\frac{1}{x}+x\right)}{1+2\left(\frac{1}{x}+x\right)^2}. \text{ 设 } t=x+\frac{1}{x}, \text{ 由 } x>0 \text{ 得到 } t \geq 2, \text{ 当}$$

且仅当 $x=1$ 时取等号. 因为 $S = \frac{t}{1+2t^2}$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递减, 所以当 $t=2$, 即 $x=1$ 时, S 取得最大值 $\frac{2}{9}$.

(6) 第二个条件可化为 $\ln \frac{b}{c} \geq \frac{a}{c}$, 于是设 $\frac{b}{c}=y, \frac{a}{c}=x$, 于是条件一化为 $5-3x \leq y \leq 4-x, \frac{b}{a} = \frac{y}{x}$. 根据条件一, 二作出有序对 (x, y) 的可行区域如下图.

(7) 方法三: 用极坐标换元, 令 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta$, 代入条件得 $R^2(2\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\sin^2\theta)=1$, 于是所要求的 x^2+y^2 为

$$x^2+y^2=R^2=\frac{1}{2\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\sin^2\theta}.$$

对于分母, 有

$$2\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+5\sin^2\theta=\frac{7}{2}+2\sin 2\theta-\frac{3}{2}\cos 2\theta \in [1, 6].$$

于是欲求的代数式的取值范围是 $\left[\frac{1}{6}, 1\right]$.

16. (1) 令 $t=\sin\theta+\cos\theta$, 则 $1<t\leq\sqrt{2}$, 可以得到 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$, 于是原式化为 $1+\frac{2(t+1)}{t^2-1}=1+\frac{2}{t-1} \geq 3+2\sqrt{2}$, 等号在 $t=\sqrt{2}$ 时取得.

评: 本题取自【2025 广州一模 18】, 该思路早在 [] 中就已出现.

□

$$(2) \frac{2\sin^2x+1}{\sin 2x} = \frac{3\sin^2x+\cos^2x}{2\sin x\cos x} \geq \sqrt{3}, \text{ 等号在 } x=\frac{\pi}{6} \text{ 时取得.}$$

(3) 令 $u=2\sqrt{16-r^2}$, 则 $0<u<7$, 记原式的平方为 $f(u)=(7-u)(7+u)^2$. 求得 $f'(u)=(7+u)(7-3u)$, 最大值在 $u=\frac{7}{3}$ 处取得, 于是得到原式的最大值为 $\frac{28\sqrt{42}}{9}$.

评: 本题取自【2009 大纲卷理 21】.

(4) 令 $F(x)=(36-x^2)(x+1)^2$, 则 $F'(x)=2(x+1)(36-2x^2-x)$, 在 $x=4$ 处取得最大值 500, 故原式最大值为 $10\sqrt{5}$.

评: 本题取自【2020 江苏 14】

(5) 方法一: 由柯西不等式, $(2x+y-\sqrt{5}z)^2 \leq (4+1+5)(x^2+y^2+z^2)$, 于是 $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{2}{5}$, 最小值为 $\frac{2}{5}$.

方法二：由 $z = \frac{2x+y-2}{\sqrt{5}}$ 消去原式中的 z ，于是

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + y^2 + \frac{(2x+y-2)^2}{5} \\ &= \frac{9x^2 + 6y^2 + 4xy - 4y - 8x + 4}{5} \\ &= \frac{1}{5} \left[9\left(x + \frac{2}{9}y - \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{50}{9}y^2 - \frac{20}{9}y + \frac{20}{9}\right) \right] \\ &\geq \frac{2}{9}(5y^2 - 2y + 2) \\ &\geq \frac{2}{9} \left[5 - \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \right] \geq \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

故原式最小值为 $\frac{2}{5}$ 。

注：该方法较为繁杂，不建议采用。

评：本题取自【2021 浙江 17】，事实上，原题可考虑几何意义，定一议一快速解决。

$$(6) \quad \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 4} = 1 - \frac{3}{(x+1) + \frac{3}{x+1}} \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 等号在 } x = \sqrt{3} - 1 \text{ 时取得.}$$

评：本题取自【2022 全国甲卷理 16】

$$(7) \text{ 方法一：考虑柯西不等式，} (16x^2 + 1) \left(\frac{9}{16} + 1 \right) \geq (3x + 1)^2, \text{ 于是原式最小值为 } \frac{4}{5}.$$

方法二：考虑求其平方的最小值，设 $f(x) = \frac{16x^2 + 1}{(3x + 1)^2}$ ，求导得到 $f'(x) = \frac{2(48x^2 + 7x - 3)}{(3x + 1)^4}$ 。 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{3}{16})$ 取负值，在 $(\frac{3}{16}, +\infty)$ 取正值，故 $f(x)$ 在 $x = \frac{3}{16}$ 处取得最小值 $\frac{25}{16}$ ，于是原式最小值为 $\frac{4}{5}$ 。

方法三：考虑求其平方的最小值，令 $u = 3x + 1$ ，则原式化为 $\frac{16u^2 - 32u + 25}{9u^2} = \frac{25}{9} \left(\frac{1}{u} - \frac{16}{25} \right)^2 + \frac{16}{25}$ ，其最小值为 $\frac{16}{25}$ ，于是原式最小值为 $\frac{4}{5}$ 。

方法四：做三角换元，设 $x = \frac{1}{4} \tan \theta$ ，原式化为 $\frac{1/\cos \theta}{|\frac{3}{4} \tan \theta + 1|} = \frac{1}{|\frac{3}{4} \cos \theta + \sin \theta|}$ 。其最小值为 $\frac{4}{5}$ 。

评：本题取自【2022 浙江 21】

$$(8) \text{ 方法一：设 } \sqrt{x^2 - 2} = u, \text{ 原式化为 } \frac{2+u}{\sqrt{u^2+3}}, \text{ 由柯西不等式, } (u^2+3)(1+\frac{4}{3}) \geq (2+u)^2, \\ \text{于是原式} \leq \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

注：这一处理方式同【2022 浙江 21】，同样的，也可以不使用柯西不等式，不求导解决。考虑其平方 $\frac{u^2 + 4u + 4}{u^2 + 3}$ 的最大值，分离常数得到 $1 + \frac{4u+1}{u^2+3}$ ，设 $4u+1=t$ ，于是原式化为 $1 + \frac{t}{\frac{1}{16}t + \frac{49}{16t} - \frac{1}{8}} \leq 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ ，进而得到待求式的最大值为 $\frac{\sqrt{21}}{3}$ 。这一方法显然麻烦了。

方法二：换元同上，记 $f(u) = \frac{2+u}{\sqrt{u^2+3}}$ ，求导得到 $f'(u) = \frac{3-2u}{(u^2+3)^{3/2}}$ ，令 $f'(u) = 0$ ，得 $u = \frac{3}{2}$ ，此时 $f(u)$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{21}}{3}$ 。

注：最好做一步换元，否则形式较为复杂不易求导。

方法三：设 $\sqrt{x^2+1}=u$ ，原式化为 $\frac{2+\sqrt{u^2-3}}{u}$ ，做三角换元，设 $u=\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ ，于是原式化为 $\frac{2\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}}\leq\frac{\sqrt{21}}{3}$ 。

注：方法三换元后得到的函数也是易于求导的。

评：本题取自【2026 新高考 I 卷 11】的 D 选项。

17.

18. 令 $s=x+y, p=xy$ 。由 $x^2+y^2=4+xy$ ，得

$$s^2=4+3p.$$

又

$$(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(4+p)^2-4p^2=16+8p-3p^2.$$

由题设 $|x^2-y^2|\leq 4$ ，所以 $16+8p-3p^2\leq 16$ ，即 $p(8-3p)\leq 0$ 。因 $p>0$ ，得到 $p\geq 8/3$ 。另一方面， x, y 为实数时，方程 $t^2-st+p=0$ 的判别式非负，故 $s^2-4p\geq 0$ 。代入 $s^2=4+3p$ ，得 $4-p\geq 0$ ，即 $p\leq 4$ 。当 $p=4$ 时 $x=y=2$ ；当 $p=8/3$ 时，取 $s=2\sqrt{3}$ ，方程 $t^2-2\sqrt{3}t+8/3=0$ 有两个正根，且 $|x^2-y^2|=4$ ，故两端均可取得。因此 $xy\in[8/3, 4]$ 。又 $s=\sqrt{4+3p}$ 随 p 增大而增大，故 $x+y\in[\sqrt{12}, 4]=[2\sqrt{3}, 4]$ 。

19.

20.

21.

第一章 计算与比较

1.2 条件最值

第一章 计算与比较

1.2 条件最值

1. 已知正实数 x, y 满足 $\log_2 x + \log_3 y = 2\log_6(xy)$, 则下列关系可能正确的是

(A) $1 < x < y$

(B) $y < x < 1$

(C) $y > x + 1$

(D) $x > y + 1$

1.

第一章 计算与比较

1.2 条件最值