

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.6 拓展阅读：从尺规作图到域扩张

三等分角, 立方倍积, 化圆为方, 等分圆周的尺规作图问题, 都是古希腊著名的问题, 经过了几千年的时间才得到了解决, 而解决这类问题的思想方法不仅在数学上, 而且在人类思想上都具有重要的意义.

这四类问题的具体表述如下:

化圆为方: 已知一个圆, 求作一个正方形与这个圆的面积相等.

立方倍积: 已知一个正方体, 求作新的正方体, 使它的体积是已知正方体的 2 倍.

三等分角: 将任意一个已知角三等分.

等分圆周: 任给一个圆与整数 $n \geq 2$, 在给定圆的圆周上依次作出 n 个点, 将圆周 n 等分.

1.6.1 尺规作图的基本概念

定义 1.6.1 (尺规作图). 尺规作图是指仅使用圆规和无刻度直尺在平面内进行几何图形构建的方法.

在初中我们学会了解决一些简单的尺规作图问题, 包括: 过平面内一点作一条已知直线的垂线/平行线; 作一个已知角的角平分线等等.

这些问题的作图依据都是较为浅显的, 仅仅使用中学的基础几何定理即可说明, 但如果我们试图解决本文开头提出的难题, 恐怕就不得不去探索尺规作图的本质了.

尺规作图作出的量包括线段长与角度, 我们可以将求作角度的问题转化为求作线段长的问题: “已知 1, 求作角度 α ” 这个问题等价于 “已知 1, 求作 $\cos \alpha$ ”.

于是我们可以将上述四个著名作图问题作等价如下:

化圆为方: 已知 1, 求作 $\sqrt{\pi}$.

立方倍积: 已知 1, 求作 $\sqrt[3]{2}$.

三等分角: 已知 1, $\cos \alpha$, 求作 $\cos \frac{1}{3}\alpha$.

等分圆周: 已知 1, 并给定一个整数 $n \geq 2$, 求作 $\cos \frac{2\pi}{n}$.

我们先来探讨尺规作图在代数上的一些性质.

结论 1 已知实数 a, b , 可作 $a + b, a - b$.

这一结论是显然的.

结论 2 已知实数 1, a, b , 可作 $ab, \frac{a}{b}$ (其中 $b \neq 0$)

证明. 如图 1.10.1, 从 P 点沿两个不同的方向引两条射线, 可作出 A_1, B_1 两点满足 $PA_1 = 1, PB_1 = a$, 再作 A_2 , 其与 P 均处于 l_1 上且位于 A_1 两侧, 满足 $A_1A_2 = b$.

过 A_2 可作平行线 $A_2B_2 // A_1B_1$, 交 l_2 于 B_2 .

可知 $\triangle A_1B_1P \sim \triangle A_2B_2P$, 据相似三角形性质有 $B_1B_2 = ab$, 于是通过尺规作图作出了 ab .

此处省略 $\frac{a}{b}$ 可作的证明叙述, 看图 1.10.2 便知.

□

结论 3 已知实数 $1, a$, 可作 $\sqrt{a}$

问题 1.1 参考图 1.10.3, 给出证明.

根据上述结论, 我们可以得到引理

引理 1.6.2. 设 S_0 是已知的实数的集合, 包含 1. 则由尺规作图可以作出 S_1 中任意两数的和、差、积、商 (除数不为 0), 以及 S_0 中任意正实数的平方根.

记 S_0 为最初已知数的集合 (包含 1), 从 S_0 出发, 将 S_0 中的数进行有限次加、减、乘、除以及正实数开方运算得到的所有实数的集合记为 S_1

结论 4 S_1 对于加、减、乘、除以及正实数开方运算封闭.

这是因为, 我们可以将“对 S_1 中的数进行上述有限次运算”这一过程视作“在对 S_0 中的数进行上述有限步运算”的延续, 显然前者的结果仍然落在 S_1 中.

对于引理, 我们自然就要问: 上述五种运算是可以借助尺规作图得到的, 反过来, 尺规作图是不是仅能得到上述五种运算? 还是说, 对 S_0 中的数用尺规作图, 能作出一些新的数, 这些数不属于 S_1 ?

我们依次审查直尺和圆规所能做的几项基本作图.

(1) 直尺的唯一功能是过两个已知点作一条直线. 设两个已知点为 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), x_1, x_2, y_1, y_2 \in S_0$, 将其带入直线方程 $Ax + By + C = 0$, 解得

$$a = y_2 - y_1, b = x_1 - x_2, c = x_2 y_1 - x_1 y_2$$

参数 A, B, C 都可由 S_0 中的数经过加、减、乘得到, 仍在 S_1 中.

(2) 圆规的唯一功能是以已知点为圆心, 以已知长度为半径作圆. 设圆的方程为 $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$, 化为一般方程 $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$, 有

$$C = -2x_1, D = -2x_2, E = x_1^2 + y_1^2 - R^2$$

参数 C, D, E 都可由 S_0 中的数经过加、减、乘得到, 仍在 S_1 中,

(3) 由已知点产生新的点的唯一方式是, 从已知点出发, 按上述两种方式作直线与圆, 这些圆或直线两两的交点就是新的点.

问题 1.2 验证“直线与直线的交点”、“直线与圆的交点”、“圆与圆的交点”的横纵坐标均可由 S_0 中的元素通过加、减、乘、除和正实数开方运算得到.

由此证明了尺规作图的一条重要定理.

定理 1.6.3. 设 S_0 是已知的实数的集合, 包含 1, x 是任意实数. 则由 S_0 出发经过尺规作图可以作出 x 的充要条件是: 由 S_0 中的数经过有限次加、减、乘、除和正实数开方运算可以得出 x .

1.6.2 三等分角问题

我们现在就来考察, 对于三等分角这一作图问题, 尺规作图这一本领是否足够大, 可以从 $1, \cos \alpha$ 出发作出 $\cos \frac{1}{3}\alpha$? 不妨设 $x = \cos \frac{1}{3}\alpha$, 据三倍角公式, 有

$$4x^3 - 3x - \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

这里我们暂不考虑对任意角度的证明, 只取若干特殊角进行尝试, 如果尺规作图不能作出, 那么也就解决了三等分角. 我们所选角度的形式不仅要较为简洁, 还不能是平凡的, 例如, 三等分 $180^\circ, 90^\circ$ 是很轻松的, 但是这并不能帮助我们推进对问题的研究.

基于上述考虑, 我们不妨选取 $\alpha = 60^\circ$, 带入方程 (1), 有

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \quad (2)$$

我们当然希望得到 x , 为此, 我们拼命地对 S_0 中的数作加、减、乘、除和开平方, 将所得到的数统统添加进 S_0 中, 来扩大已知数的集合, 扩得越大越好, 并希望能将 x 也囊括进去.

我们已经证明了: 由 1 开始通过加、减、乘、除四种运算, 可以得到全体有理数.

那么我们就要问, 方程 (2) 是否有有理根呢? 如果有, $\alpha = 60^\circ$ 就是可三等分的. 为了搞清楚这个问题, 我们先看一般的一元 n 次整系数方程的有理根应当是什么样子.

1.6.3 一元整系数方程的有理根

定理 1.6.4 (有理根定理). 设 n 次多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是整数, $a_0 \neq 0$, $\frac{p}{q}$ 是既约分数, 如果 $\frac{p}{q}$ 是整系数代数方程 $f(x) = 0$ 的根, 则 $p \mid a_n, q \mid a_0$.

证明. 将 $x = \frac{p}{q}$ 代入方程:

$$a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0$$

两边同乘以 q^n

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 \quad (*)$$

先证明 $p \mid a_n$:

从等式 (*) 中, 将前 n 项移项并将公因式 p 提出来:

$$p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}q^{n-1}) = -a_nq^n$$

由于括号内的各项都是整数, 其和也是整数. 因此, 左侧可以被 p 整除, 从而推导出:

$$p \mid a_n q^n$$

根据引理：若 $a \mid bc$ 且 $\gcd(a, c) = 1$, 则 $a \mid b$.

已知 $\gcd(p, q) = 1$, 故 $\gcd(p, q^n) = 1$.

由此得证： $p \mid a_n$

再证明 $q \mid a_0$ ：

同样，从等式 (*) 中，将后 n 项移项并提出公因式 q ：

$$q(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \cdots + a_n q^{n-1}) = -a_0 p^n$$

同理，等式左侧能被 q 整除，推导出：

$$q \mid a_0 p^n$$

已知 $\gcd(q, p) = 1$, 故 $\gcd(q, p^n) = 1$.

由此得证： $q \mid a_0$

□

有理根定理虽然只给出了分数 $\frac{p}{q}$ 是有理根的必要条件：不满足条件的肯定不是根，满足条件的可能是根，但最高次项 a_0 与最低次项 a_n 的因子个数是有限的，对于部分方程，我们可以列举所有的 $p, q (p \mid a_0, q \mid a_n)$ ，把这些 $\frac{p}{q}$ 作为候选根，逐一带回原方程进行验证.

现在再看方程 (2)，可知，方程若存在有理根，则可能的根只能为 $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ ，可以发现它们都不是原方程的根.

或对方程 (2) 稍作变形，令 $y = 2x$ ，有

$$y^3 - 3y - 1 = 0 \quad (3)$$

可知，方程 (2) 存在有理根当且仅当方程 (3) 存在有理根，对于方程 (3)，仅需验证 ± 1 即可，可知 ± 1 均不是方程 (3) 的根.

这说明了 $x = \cos 20^\circ$ 不是有理数.

问题 1.3 借助有理根定理，证明： $\sqrt{2}$ 是无理数.

尺规作图从 1 出发通过四则运算得到了全体有理数，它的本领是很大的了，可是我们仍然不满意，仅仅通过四则运算是不可能得到 $\cos 20^\circ$ 这个无理数的. 但尺规作图还有一招：开平方. 只需在 $\mathbb{Q}$ 中取一个正数 D_1 ，当然这个正数不能是任何有理数的平方，由尺规作图可作出无理数 $\sqrt{D_1}$ ，这个无理数又可以与全体有理数作四则运算，得到一个新的已知数集合

$$E_1 = \{a + b\sqrt{D_1} \mid a, b, D_1 \in \mathbb{Q}, \sqrt{D_1} \notin \mathbb{Q}\}$$

问题 1.4 验证 E_1 对于四则运算封闭.

问题 1.5 推广上述结论：设 F 是任意数域， $D \in F$ 且 $\sqrt{D} \notin F$ ，设 $E = \{a + b\sqrt{D}, a, b \in F\}$ ，证明： E 是数域。

定理 1.6.5. 设实系数代数方程 $f(x) = 0$ 有一个复根 $x_1 = a + bi$ (a, b 是实数, $b \neq 0, i$ 是虚数单位)，则 x_1 的共轭复数 $a - bi$ 也是方程 $f(x) = 0$ 的根。

证明. 设实系数多项式为 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ ，其中系数 $c_k \in \mathbb{R}$ 。

若 x_1 是方程的根，则有：

$$c_n x_1^n + c_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$$

对等式两边同时取复共轭，得：

$$\overline{c_n x_1^n + c_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + c_0} = \overline{0} = 0$$

利用复共轭运算法则： $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ 且 $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ ，上式变为：

$$\overline{c_n} (\overline{x_1})^n + \overline{c_{n-1}} (\overline{x_1})^{n-1} + \cdots + \overline{c_0} = 0$$

由于 $c_k \in \mathbb{R}$ ，故 $\overline{c_k} = c_k$ 。

因此：

$$c_n (\overline{x_1})^n + c_{n-1} (\overline{x_1})^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$$

这说明 $f(\overline{x_1}) = 0$ ，即 $a - bi$ 也是方程的根。 □

还可从多项式整除的角度出发，此处补充几个概念。

定义 1.6.6 (多项式的次数). 在多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) 中，最高次项 x^n 的指数 n 称为这个多项式的**次数**，记作 $\deg f(x)$ 。

定义 1.6.7 (实数域上多项式的带余除法). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个实系数多项式，且 $g(x) \neq 0$ 。则一定存在唯一的一对实系数多项式 $q(x)$ (**商式**) 和 $r(x)$ (**余式**)，使得：

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x)$$

当 $r(x) = 0$ 时，称 $g(x)$ **整除** $f(x)$ ，记作 $g(x) \mid f(x)$ 。

定义 1.6.8 (因式定理). 多项式 $f(x)$ 有因式 $(x - a)$ 的充分必要条件是 $f(a) = 0$ 。

我们据此再对定理 3 给出另一种证明，并使用此方法完成后续两个定理的证明。

证明. 构造 $g(x) = (x - x_1)(x - x_2) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)]$ 。

要证明 $a + bi, a - bi$ 都是 $f(x) = 0$ 的根，则需证明 $g(x) \mid f(x)$

展开 $g(x)$: $g(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ ，系数 $1, -2a, a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ 。

将实系数多项式 $f(x)$ 除以实系数多项式 $g(x)$ 。根据多项式除法法则，存在实系数多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ ，使得：

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

其中 $\deg r(x) < \deg g(x) = 2$, 故设 $r(x) = cx + d$, 且由除法封闭性知 $c, d \in \mathbb{R}$.

已知 $f(x_1) = 0$, 根据构造知 $g(x_1) = 0$, 则有: $0 = 0 \cdot q(x_1) + r(x_1) \implies c(a + bi) + d = 0$
整理得: $(ca + d) + (cb)i = 0$.

已知 $b \neq 0$, 解得 $c = d = 0$.

所以 $r(x) = 0$, 即 $g(x) \mid f(x)$

因此 x_2 是 $f(x) = 0$ 的一个根. □

定理 5 设有理系数代数方程 $f(x) = 0$ 有一个形如 $x_1 = a + b\sqrt{D}$ 的根 (其中 a, b 是有理数, $b \neq 0$, $\sqrt{D}$ 是无理数), 则 $x_2 = a - b\sqrt{D}$ 一定也是方程 $f(x) = 0$ 的根.

证明.

构造 $g(x) = (x - x_1)(x - x_2) = [x - (a + b\sqrt{D})][x - (a - b\sqrt{D})]$.

要证明 $a + b\sqrt{D}, a - b\sqrt{D}$ 都是 $f(x) = 0$ 的根, 则需证明 $g(x) \mid f(x)$

展开 $g(x)$: $g(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2D)$, 系数 $1, -2a, a^2 + b^2D \in \mathbb{Q}$.

(仿照上述示例, 给出余下的证明.) □

定理 6 设 F 是某些复数组成的一个集合, 至少包含一个非零的数, 且 F 对四则运算封闭. 代数方程 $f(x) = 0$ 的系数全在 F 中, 若此方程有一个形如 $x_1 = a + b\sqrt{D}$ 的根 (其中 $a, b, D \in F, b \neq 0, \sqrt{D} \notin F$), 则 $x_2 = a - b\sqrt{D}$ 一定也是方程 $f(x) = 0$ 的根.

证明.

构造 $g(x) = (x - x_1)(x - x_2) = [x - (a + b\sqrt{D})][x - (a - b\sqrt{D})]$.

要证明 $a + b\sqrt{D}, a - b\sqrt{D}$ 都是 $f(x) = 0$ 的根, 则需证明 $g(x) \mid f(x)$

展开 $g(x)$: $g(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2D)$, 由于 $a, b, D \in F$, 据数域 F 对四则运算, 可知, 系数 $1, -2a, a^2 + b^2 \in F$.

(仿照上述示例, 给出余下的证明.) □

1.6.4 三等分角问题的解决

做了那么多铺垫, 我们终于是有希望解决三等分角问题了.

命题 1 设一元三次方程 $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ 的系数 a_0, a_1, a_2, a_3 属于某个数域 F , 且 $a_0 \neq 0$, 如果此一元三次方程有一个形如 $a + b\sqrt{D}$ 的根, 其中 $a, b, D \in F$, 则方程在 F 中有一个根.

证明.

如果 $\sqrt{D} \in F$ 或 $b = 0$, 则 $x_1 \in F, x_1$ 就是方程在 F 中的根.

故设 $\sqrt{D} \notin F$ 且 $b \neq 0$, 从而 $x_1 \notin F$. 此时, 由定理 6 知 $x_2 = a - b\sqrt{D}$ 也是方程的根. 据一元三次方程根与系数的关系, 命题所述方程的三个根 x_1, x_2, x_3 满足

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$

从而

$$x_3 = -\frac{a_1}{a_0} - (x_1 + x_2) = -\frac{a_1}{a_0} - 2a$$

x_3 由 F 中的数 a_1, a_0, a 经加、减、乘、除运算得出, 仍在 F 中. 即 x_3 是方程在 F 中的根.

由此证明了原命题. □

现在将命题 1 应用于 $\cos 20^\circ$ 所满足的三次方程

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \quad (1)$$

已经知道这个方程在有理数集合 $\mathbb{Q}$ 中没有根. 只用加、减、乘、除也不可能把 $\mathbb{Q}$ 再扩大. 要想用尺规作图把 $\mathbb{Q}$ 扩大使之包含无理数 $x = \cos 20^\circ$, 剩下的唯一希望是开平方.

取 $D_1 \in \mathbb{Q}$ 且 $\sqrt{D_1} \notin \mathbb{Q}$. 则 $\sqrt{D_1}$ 可由尺规作图作出, $\sqrt{D_1}$ 再与 $\mathbb{Q}$ 中的数作加、减、乘、除, 产生一个比 $\mathbb{Q}$ 更大的数域 $E_1 = \{a + b\sqrt{D_1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, 其中所有的数都可由尺规作图作出.

但 E_1 能否包含 $x = \cos 20^\circ$ 呢?

如果 E_1 包含 $\cos 20^\circ$, 则方程 (1) 在 E_1 中有根 $x_1 = a + b\sqrt{D_1}$, 由命题 1 推出方程 (1) 在有理数集合 $\mathbb{Q}$ 中有根, 矛盾. 这个矛盾说明了方程 (1) 在 E_1 中也没有根, E_1 仍没有将所需的 $x = \cos 20^\circ$ 网罗进去. 要想将 x 网罗进去.

只有再从 E_1 取正数 D_2 进行开平方, 然后再与 E_1 通过加、减、乘、除得到更大的数域 $E_2 = \{a + b\sqrt{D_2} \mid a, b \in E_1\}$, 然而, 仿照前面的推导, 我们可以得到这样的推导逻辑.

(1) 在 E_2 中有根 $\implies$ (1) 在 E_1 中有根 $\implies$ (1) 在 $\mathbb{Q}$ 中有根

而 (1) 在 $\mathbb{Q}$ 中无根, 故 (1) 在 E_2 中也无根. 我想到这里你也能看出来: 无论通过开平方将数域扩大多少次, 都不可能把 $\cos 20^\circ$ 囊括进去.

定理 7 不存在三等分任意角的尺规作图法.

证明.

考虑证明尺规作图不能三等分 60° 角.

每一次尺规作图由已知数得到新的数的过程都是在用已知数作加、减、乘、除、正实数开平方运算. 而用尺规作图三等分 60° 角就是由已知数的集合 $S_0 = \{1, \cos 60^\circ\}$ 出发经过有限次加、减、乘、除和正实数开平方得出 $x = \cos 20^\circ$.

设整个过程中用到了 n 次开平方运算, 每次的被开方数依次是 $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$. 则从 S_0 产生 D_1 只用到加、减、乘、除运算, 而 $S_0 = \{1, \cos 60^\circ\}$ 经过加、减、乘、除所能得到的所有数就是全体有理数, 因此 $D_1 \in \mathbb{Q}$. 经过第一次开平方产生 $\sqrt{D_1}$ 之后, 直到第二次对 D_2 开平方之前, 只有加、减、乘、除运算, D_2 由有理数与 $\sqrt{D_1}$ 经过加、减、乘、除得到. 而有理数与 $\sqrt{D_1}$ 经过加、减、乘、除所能得到的就是具有形式 $a + b\sqrt{D_1}$ (其中 $a, b \in \mathbb{Q}$) 的所有数, 记它们组成的集合为 E_1 , 则 E_1 包含 D_2 . 以此类推, D_3 由 $\sqrt{D_2}$ 与 E_1 中的数经过加、减、乘、除得到, 含于集合 $E_2 = \{a + b\sqrt{D_2} \mid a, b \in E_1\}$. 一般地, 设从 $\mathbb{Q}$ 出发经过若干次开平方和加、减、乘、除运算将可作的数的范围扩展到 E_{k-1} , 并且 $D_k \in E_{k-1}$, 再由 $\sqrt{D_k}$ 与 E_{k-1} 经过加、减、乘、除可将可作出的数的范围进一步扩大到 $E_k = \{a + b\sqrt{D_k} \mid a, b \in E_{k-1}\}$,

则 E_k 包含下一个被开方数 D_{k+1} . 并且可由 E_{k-1} 是数域推知 E_k 也是数域. 不断重复此过程, 经过 n 次开平方之后得到 $n+1$ 个数域 $\mathbb{Q}, E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$. 被开方数 $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ 分别含于其中前 n 个数域 $\mathbb{Q}, E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$. 而在最后一次开平方得到 $\sqrt{D_n}$ 之后不再有开平方运算, $\sqrt{D_n}$ 与 E_{n-1} 作加、减、乘、除运算得到最后的答案 $x = \cos 20^\circ$, 它含于 E_n .

下证明: $\cos 20^\circ$ 不可能含于 E_n .

为叙述的统一起见, 将最初的数域 $\mathbb{Q}$ 记为 E_0 . 对 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 用数学归纳法, 证明所有的 E_k 都不可能包含方程

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \quad (2)$$

的根, 从而不可能包含 $\cos 20^\circ$.

当 $k = 0$ 时, $E_0 = \mathbb{Q}$ 由全体有理数组成. 由有理根定理知道方程 (2) 没有有理根, 即 E_0 不包含方程 (2) 的根.

$k \geq 1$ 时, 假设方程在 E_{k-1} 中没有根, 下证明: 方程 (2) 在 E_k 中没有根.

若不然, 设方程 (2) 在 E_k 中有根 $x_1 = a + b\sqrt{D_k}$, 其中 $a, b, D_k \in E_{k-1}$. 由命题 1 可证明方程 (2) 在 E_k 中有根可推出方程 (2) 在 E_{k-1} 中有根, 与归纳假设矛盾.

根据数学归纳法原理, 可知方程 (2) 在所有的 E_k 中都没有根 ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). 故 E_n 不含方程 (2) 的根, 因而不可能包含方程 (2) 的根 $\cos 20^\circ$. 这就证明了: 用尺规作图不能三等分 60° 角, 说明了不存在三等分任意角的尺规作图法.

□

1.6.5 立方倍积问题与化圆为方问题

我们终于完成了古希腊三大作图问题中的三等分角问题, 接下来可以轻松一点, 只粗浅了解其余两个问题.

立方倍积问题 这一问题可转化为: 已知 1, 求作方程 $x^3 = 2$ 的正根 $x = \sqrt[3]{2}$.

这一定理的证明可以仿照 $\cos 20^\circ$ 不可尺规作图的证明完成.

化圆为方问题 这一问题可转化为, 已知 1, 求作方程 $x^2 = \pi$ 的正根 $x = \sqrt{\pi}$.

这一问题可归结为: 已知 1, 求作 π .

1882 年德国数学家林德曼证明了: 不是任何有理系数代数方程的根.

而我们可以证明: 凡是由已知数出发用尺规作图能作出的数, 一定是有理系数代数方程的根. **因篇幅原因就不给出解释了.** 据此可证明化圆为方问题不可用尺规作图解决.

等分圆周问题 这一问题可转化为, 给定 $n, n \geq 2$, 已知 1, 求作 $\cos \frac{2\pi}{n}$.

我们先来探讨部分简单的情况, 当 $n = 2^k$ 时, 我们可以轻松作出目标. 当 $n = 3 \cdot 2^k$ 时同理, 先将圆三等分, 在对每一段弧进行 2^k 等分即可.

但是当我们考虑 $n = 5, 7 \dots$ 时, 问题就显得不那么容易了, 不过借助前面的知识, 我们勉强可以解决.

命题 2 尺规作图五等分圆周是可行的.

证明. 问题转化为: 已知 1, 求作 $\cos \frac{2\pi}{5}$.

先尝试找出 $\cos \frac{2\pi}{5}$ 所满足的有理系数代数方程.

在复平面中, 以原点为圆心, 半径为 1 作圆, 记圆内接正五边形的一个顶点为, 向左依次作出另外四个顶点, 可知这五个点对应的复数分别是

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

这五个复数是方程

$$z^5 = 1 \quad (4)$$

的五个根, 已知 $z_1 = 1$, 对方程作因式分解, 有

$$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \quad (5)$$

其中 z_1 使得第二个因式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ 取值为 0, 是方程

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad (6)$$

的根. 由于 0 不是方程的根, 将方程两边同时除以 z^2 , 有

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \quad (7)$$

设 $z + \frac{1}{z} = y = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$, 则 $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$, 原方程化为

$$y^2 + y - 1 = 0 \quad (8)$$

解得 $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (舍去负根), 则 $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 可以通过尺规作图从 1 出发得到. 于是证明了尺规作图可以五等分圆周, 自然地, $5 \cdot 2^k$ 等分圆周也是可行的. $\square$

仿照类似的思路, 可以得到 $2 \cos \frac{2\pi}{7}$ 是方程 $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ 的根, 可以验证这一方程无有理根, 根据三等分角问题的相关证明可得: 无法从 1 出发, 通过尺规作图作出 $\cos \frac{2\pi}{7}$, 于是证明了尺规作图不可以七等分圆周.

实际上, $2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k$ 等分圆周的尺规作图方法早在欧几里得时代就已经被揭晓, 在此后的 2000 多年, 人们并未作出新的进展, 直到 1795 年才由高斯解决了这个悬而未决的难题

高斯不仅证明了正十七边形是可作的, 并且给出了正多边形可尺规作图的充分条件, 这时他才 19 岁.

正多边形可尺规作图的充分条件 如果正多边形的边数 n 可以表示成 2 的非负整数次方乘上任意个 (可为 0 个) 不同的费马素数的乘积, 那么这样的正多边形可以尺规作图.

注: 费马素数是形如下方形式的数

$$p = 2^{2^n} + 1, n \in \mathbb{N}, \text{且 } p \text{ 是素数}$$

高斯断言,这一条件也是正多边形可尺规作图的必要条件,但他没有给出证明.这一证明最终由旺策尔(Pierre Laurent Wantzel)¹给出.

尺规作图的研究起源于人们的直观经验,但随着问题研究的深入,我们逐步将这一问题的代数性质抽象出来,这一几何问题便转化为了域论的问题,判断一个图形是否可作时,我们无需纠结于画图的手法,而可以去分析在这一画图规则所支持的运算下,能否从已知数集合出发不断添加进新的数,把要作的数囊括进来.对于其他作图规则,如二刻尺作图,折纸几何,是同样适用的.而当我们解决等分圆周的尺规作图问题时,又需要研究方程 $z^n = 1$ 的性质,这需要我们在之前的基础上更进一步.数学家发现,这些根之间存在着一种微妙的置换关系,这种关系,之后被抽象为伽罗瓦群,在伽罗瓦创立的群论中得以分析透彻,尺规作图的可能性,又与群的可解性紧密相连了.就这样,我们从具体的运算与操作,不断向着数学结构的深层规律前进.

参考文献

- [1] 普通高中课程标准实验教科书选修系列 3-6:三等分角与数域扩充 [M]. 长沙:湖南教育出版社, 2004.

¹法国数学家,他于 1837 年首次严格证明倍立方积与三等分角的尺规作图是不可能的.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.6 拓展阅读：从尺规作图到域扩张

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.6 拓展阅读：从尺规作图到域扩张

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.6 拓展阅读：从尺规作图到域扩张

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.6 拓展阅读：从尺规作图到域扩张