

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.5 数域

在小学,我们学习了自然数的加法,两个自然数相加,永远会得到一个自然数,但考虑减法时,比如 $3 - 5$, 就不知道结果是什么了,直到引入负数才得以解决这一问题,我们对数的认知也就从自然数集 $\mathbb{N}$ 扩充到整数集 $\mathbb{Z}$. 于此同时,在考虑两自然数之商时,也是通过引入分数的概念才得以解决,至此,我们对数的理解局限在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中,任取内部两个元素进行四则运算(除法保证除数不为 0),结果仍属于 $\mathbb{Q}$.

在中学二年级引入平方根后,我们发现: $\sqrt{2}$ 是无限不循环小数,我们也可以证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数,由此认识了无理数¹,并将有理数与无理数并称为实数,我们对数的认识扩充到整个实数域 $\mathbb{R}$.

对于某个三次方程,利用平凡的方法可以得到实数解,但在三次方程求根公式中,求解这个根的表达式需要对负数开平方,如果设 $\sqrt{-1}$ 为某个变元,经过层层化简后,这个变元又消失了,于是得到了对应的实数解,这样来看,引入对负数开平方的操作也不无道理. 我们现在称 $\sqrt{-1} = i$, 这就又引进了复数,由此,我们对数的认识扩充到了整个复数域 $\mathbb{C}$.

回忆对数的认知过程,我们发现,如果要想弄清楚某个集合及定义在其上的运算 $\oplus$, 最好先确定: 如果我们任取两个元素 $a, b \in A$, $a \oplus b$ 会不会“跑到 A 的外面去”? 从这个想法出发,我们引申出关于运算封闭的概念.

定义 1.5.1 (关于运算封闭). 设 $\oplus$ 是在 $\mathbb{C}$ 上的某种运算, A 是 $\mathbb{C}$ 的非空子集. 若对任意 $a, b \in A$, 有 $a \oplus b \in A$, 则称 A 关于运算 $\oplus$ 封闭. (若 $\oplus$ 是除法, 则还要求除数不为 0.)

定义 1.5.2 (数域). 满足关于加法、减法、乘法、除法(除数不为 0)封闭的数集叫做数域, 规定集合 $\{0\}$ 不是数域.

问题 1.1 下列集合中, 是数域的是

自然数集 $\mathbb{N}$, 整数集 $\mathbb{Z}$, 偶数集, 奇数集, 有理数集 $\mathbb{Q}$, 无理数集, 复数集 $\mathbb{C}$

问题 1.2 证明: 集合 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域.

问题 1.3 设 A 是 $\mathbb{C}$ 的非空子集:

1. 如果集合 A 关于减法运算封闭, 说明 $0 \in A$;
2. 如果集合 A 关于除法运算封闭(除数不等于 0), 且 A 包含非零元素, 说明 $1 \in A$;
3. 若 A 关于加法和减法运算封闭, 且 $1 \in A$, 证明 $\mathbb{Z} \subseteq A$;
4. 若 A 关于加法、减法、乘法和除法(除数不为 0)运算封闭, 证明 $\mathbb{Q} \subseteq A$;

¹无理数(Irrational Number), 有理数(Rational Number)实际上应分别译为“非比数”与“可比数”.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.5 数域

本节习题

1. 写出包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域, 并证明它是数域.

1.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.5 数域

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.5 数域

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.5 数域