

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.4 拓展阅读：从一到无穷大

在公元前 5 世纪和 6 世纪间，古希腊人发现了无穷。这个概念对人类的直觉而言是如此矛盾怪异，以致使古代哲学家和数学家深感困惑，引起了无限痛苦、精神错乱，至少有一个人因此而死。这个发现引起的结果对之后 2500 年的科学、数学、哲学和宗教有着深远的影响。

有证据表明古希腊人已接近无穷概念，其中一个便是芝诺悖论中的阿喀琉斯悖论。

阿喀琉斯悖论 乌龟和阿喀琉斯赛跑，乌龟的起点位于阿喀琉斯身前 1000 米处，假定阿喀琉斯的速度是乌龟的 10 倍。比赛开始后，若阿喀琉斯跑了 1000 米，此时乌龟领先他 100 米；当阿喀琉斯跑完下一个 100 米时，乌龟仍然领先他 1 米，如此往复进行下去，阿喀琉斯永远无法追上乌龟。

现在我们知道，虽然一共有无穷多步过程，但这些过程所花费的时间之和是有限的，这种情形被称为“收敛”。

实际上，关于无穷的思想在芝诺前一个世纪的毕达哥拉斯（Pythagoras）¹的著作中已经出现，作为古代最重要的数学家之一，毕达哥拉斯做出了诸多著名的发现，其中一个叫做毕达哥拉斯定理²。于此同时，他尝试建立一个完整的数学体系。毕达哥拉斯认为，数学可以解释世界上的一切事物，一切真理都可以用比例、平方及直角三角形去反映和证实，这种对数学痴迷到几近崇拜的理念贯彻到了他与其追随者所持有的毕达哥拉斯主义之中。

然而好景不长，从属毕达哥拉斯学派的希帕索斯（Ἱππασος ὁ Μεταποντῖνος）³发现：边长为 1 的正方形的对角线长度违背了这一理念（我们现在称其为 $\sqrt{2}$ ），他触犯学派章程，将这一发现透露给了外人，因此被毕达哥拉斯学派的人扔进爱琴海溺死，其罪名竟等同于“渎神”。

在某种意义上，毕达哥拉斯学派的神圣思想与希帕索斯一起死亡了，代之而起的是丰富的连续统概念。世界知道了无理数的秘密后，希腊的几何学诞生了。几何处理的是线、面和角，所有这些是连续的。无理数是连续世界的自然居民（虽然有理数也住在同样的范围里），它们构成连续统上数的主体。一个有理数可用一个有限项的数表示，而一个无理数，例如 π ，它的表达式是无穷无尽的：它是完全的无穷。

17 世纪早期到 19 世纪早期，微积分及其他重要的数学领域被建立并发展起来，一些最著名的数学家在此过程中留下了他们不可磨灭的印记：牛顿、莱布尼茨、高斯、欧拉……然而，他们的处理仅限于“过程上的无穷”，例如柯西（Cauchy）与魏尔斯特拉斯（Weierstrass）在 19 世纪通过 $\varepsilon - \delta$ 语言为微积分建立了严密的逻辑支撑。在此框架下，所有涉及无穷的问题都被转化为有限量的动态趋近过程。我们现在称这种无穷为潜无穷⁴，没有人敢于进入那个神秘

¹古希腊哲学家、数学家、天文学家，在西方率先提出“毕达哥拉斯定理”并以“万物皆数”来解释世界。

²即勾股定理。

³希帕索斯有时被认为是无理数的发现者，但没有任何明确证据表明。现代作家借助一系列模糊的古代记载，构思了希帕索斯因发现无理数而被处死的故事。本文采用了这种较为戏剧化的叙述。

⁴潜无穷（Potential Infinity）强调过程的无穷性，此时无穷不是一个已经完成的对象，而是一个可以延伸、永无止境的过

的实无穷⁵的园地.

于是,实无穷的一个关键特性的发现,就留给了所有时代中最伟大的科学家之一的伽利略.

在伽利略的论文《关于两门新科学的对话》中,他迈出了惊世骇俗的一步——在所有的正整数和正整数平方之间建立了一一对应关系,并说:“我们必然得出结论,平方数与正整数一样多.”这样一个所有正整数的无穷集合被证明是与所有正整数平方的集合“个数相等”的,但后者是前者的真子集.这怎么可能呢?

要理解伽利略的上述发现,我们不妨回顾自己是如何计数的,“计”数的动作是什么?



在计算上面那些圆的个数时,我们无意识地建立了它们与整数之间的一一对应关系——总是从 1 开始将它们分别与 1, 2, 3, ... 对应. 对任何有限个元素来说,完全没有问题,但如果把这一套计数原理迁移到无穷集合上呢? 伽利略就是这样来试图“计”所有的平方数: 对于要计的所有平方数的第一个数,他指定了数 1, 然后如我们通常的计数法,他指定下一个平方数 4 为第二个整数 2, 如此直到无穷:

$$1 \rightarrow 1, \quad 4 \rightarrow 2, \quad 9 \rightarrow 3, \quad 16 \rightarrow 4, \quad \dots, \quad n^2 \rightarrow n, \quad \dots$$

由此,伽利略发现无穷集合是非常不同于有限集合的: 这种计数方式下,一个无穷集合被证明与它的一个真子集“同样多”.

和伽利略一样,波尔查诺也注意到了无穷集合可以与自身的子集建立一一对应,他提出: 0 与 1 之间的实数个数与 0 与 2 之间的实数个数是相等的. (通过 $y = 2x (0 \leq x \leq 1)$ 这样的函数建立一一对应关系)

波尔查诺并不认为微积分学中常说的“无穷大量”和“无穷小量”是一种实实在在的数学量,但与此同时,他也为无穷集具有这种违反直觉的性质而感到困惑和不安.

康托尔 1845 年出生于俄国,但在他 12 岁的时候,全家移居到德国. 宗教是康托尔家庭的重要组成部分. 康托尔的父亲原是犹太教徒,后来皈依了新教,而他的母亲则生来就是罗马天主教徒. 既然家中存在这种混合的宗教信仰,那么,小乔治对神学产生一种伴随终生的兴趣,就不足为奇了. 一些神学问题,特别是那些与无限性质有关的问题对成年康托尔的数学产生了很大的影响

在还是个少年的时候,康托尔已爱好数学,1862 年 8 月,康托尔参加了大学入学考试,并以高分通过,那年末,他转入苏黎世大学学习,次年转入更有声誉的柏林大学攻读神学和数学,师从魏尔斯特拉斯、库默和克罗内克等著名数学家,三年后获得博士学位.

1869 年,康托尔开始了在哈雷大学的任教生涯,他最初把工作重点放在数论方面. 博士毕业后,在魏尔斯特拉斯的直接影响下,他将注意力转向严格的分析理论研究,不久便崭露头角.

在 19 世纪,集合对数学家们来说是非常熟悉的数学概念,但人们通常研究的都是有限集,数学界似乎在有意回避对无限集问题的研究. 到了康托尔时代,由于数学本身的发展,无限集的问题已经成为数学前进道路上的拦路虎,数学家们再也无法回避这一时刻的到来.

程,例如无穷数列.

⁵实无穷 (Actual Infinity) 强调无穷整体视为现成的,已完成的对象,例如自然数构成的集合.

1874 年,29 岁的康托尔在《克雷尔数学杂志》⁶上发表了论文“关于一切代数实数的一个性质”.这是他关于无穷集合论的第一篇革命性论文.

康托尔认为:如果两个集合的元素能建立双射,那么这两个集合的基数相同.

定义 1.4.1 (等势). 集合 A, B 有相同的基数当且仅当存在一个从 A 到 B 的双射.能彼此建立双射的集合被称为是**等势**的.

这样,康托尔仅仅依据两个基本前提(可以通过建立双射来确定相同的基数;实无穷是一个确实的概念)就开始了一段空前的知识旅程,这段旅程将他领进一个奇特的世界,带来无比的欢欣,亦需付出巨大的努力,其中取得的一些数学成就是如此好笑,让人不免嘲弄他所为之付出的努力.但康托尔没有因此而气馁,他凭借天才与勇气,以前所未有的方式正面探讨无穷.

考虑正偶数集 $E = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\}$ 与正整数集 $\mathbb{N}^*$ 的基数关系,根据康托尔的定义,很容易看出 E 与 $\mathbb{N}^*$ 等势,因我们可以建立一个双射

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow E \quad n \mapsto 2n$$

人们通常认为偶数的个数应该是整数个数的一半.可是,我们有什么依据来指责康托尔的演绎推理呢?我们要么抛弃实无穷的概念,甚至否认自然数集是一个独立的实体;要么拒绝承认简单至极的相同基数定义.但只要承认这两个前提,那么就不可避免地得出结论:偶数与自然数的个数是相同的.

同样地,整数集 $\mathbb{Z}$ 与自然数集 $\mathbb{N}$ 也是等势的,他们之间可建立下述双射:

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \cdots \end{array}$$

这时,康托尔已准备迈出大胆的一步.

定义 1.4.2. 一个集合如果是有限集或者是与自然数集 $\mathbb{N}$ 具有相同的基数,那么就称这个集合是可数的,否则称其是不可数的.如果一个无限集 S 是可数的,则用符号 $\aleph_0$ 表示集合 S 的基数,并说 S 有基数“阿列夫零”⁷.

如果考虑有理数集 $\mathbb{Q}$,情况又将如何呢?有理数是密密麻麻分布的.而相邻的整数之间总存在固定的间距,期间存在着无限多个有理数.绝大部分人都会猜想,有理数比自然数更为丰富.

然而,康托尔证明了有理数集是可数的.

⁶即《纯粹与应用数学杂志》,世界上首份数学专业期刊,也是现存历史最悠久的数学专业期刊.

⁷阿列夫 $\aleph$ 是希伯来文的第一个字母

证明. 任意正有理数都可以写成 $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^+$, 把分子 m 和分母 n 分别作为行、列, 得到数表:

	1	2	3	4	5
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

按斜对角线从左上到右下依次读取:

1/1;
 1/2, 2/1;
 1/3, 2/2, 3/1;
 1/4, 2/3, 3/2, 4/1;
 1/5, 2/4, 3/3, 4/2, 5/1;
 ...

其中每条斜对角线上的分子与分母之和相同.

对于重复的分数如 $2/2 = 1/1$, $2/4 = 1/2$, 只保留既约分数 ($\gcd(m, n) = 1$), 得到正有理数序列

$$1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, \dots$$

这里每个正有理数都会出现且只出现一次. 按这一顺序, 将正有理数与正整数建立双射, 于是

$$\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{N}^+.$$

再加入负有理数和零, 假设正有理数已经排列成: $r_1, r_2, r_3, \dots$, 将所有有理数排列成:

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \dots$$

另一方面, 整数可以排列为:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

定义映射 $F: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$F(0) = 0, F(r_k) = k, F(-r_k) = -k.$$

可以证明 F 是双射, 从而 $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. □

康托尔发现的不可数集是实数集 $\mathbb{R}$. 实际上, 他在 1874 年发表的论文中指出, 没有任何实数区间 (不论其长度多么小) 能够与自然数集 $\mathbb{N}$ 构成一一对应关系. 他最初的证明借助了某些相对高级的数学工具, 但他在 1891 年再次回到这个问题上时, 提出了一个非常简单的证明, 我们下面就来看看.

1.4.1 连续统的不可数性

“连续统”意指某一实数区间, 可以用符号 (a, b) 表示, 我们将要证明: 区间 $(0, 1)$ 是不可数的. 这一区间内的实数都可被写成无穷小数, 例如

$$\frac{1}{2} = 0.50000000 \dots, \quad \frac{3}{11} = 0.27272727 \dots, \quad \frac{\pi}{4} = 0.78539816 \dots$$

我们还必须谨慎地避免同一个数的两种不同的小数表示. 例如 $\frac{1}{2}$ 还可被写成 $0.49999999 \dots$. 在这种情况下, 我们选择以一连串 0 结尾结尾的小数. 这样, 在 $(0, 1)$ 区间中的任何实数都有唯一的小数表示.

证明. 采用反证法: 假设区间 $(0, 1)$ 内的实数能够与正整数集 $\mathbb{N}$ 一一对应, 设正整数 k 对应实数 x_k , 将这些实数写成无限小数:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots \\ x_4 &= 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

把这些数字排列成表:

	1	2	3	4	5	...
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	...
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	...
x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	...
x_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	...
x_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

其中第 n 行是 x_n 的小数展开.

观察表格的对角线数字:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots$$

现在构造一个新的小数 $y = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots$, 规定:

$$b_n = \begin{cases} 1, & a_{nn} \neq 1, \\ 2, & a_{nn} = 1. \end{cases}$$

也就是说, b_n 总是选择一个与 a_{nn} 不同的数字.

显然, $y \in (0, 1)$, 现在将 y 和列表中的数逐个比较, 可以发现: 对任意正整数 $n, y \neq x_n$. 这就产生了矛盾. 因此假设错误, $(0, 1)$ 是不可数集. $\square$

康托尔对这个证明非常满意, 证明中, 他所关注的小数位恰好连成数表中一条下降的对角线, 因此这一方法被称为康托尔的“对角线法”.

这样, 康托尔就证明了, 许多无穷集合 (特别是有理数集合) 都具有基数 $\aleph_0$, 然而, 尽管同样是无穷, 0 与 1 之间的实数组成的区间似乎是“更高一级的”无穷. 这个区间内的点如此之多, 其数量绝对超过了正整数.

此外, 还可通过函数 $y = a + (b-a)x$ 建立 $(0, 1)$ 与 (a, b) 的双射, 在此基础上再向前迈一小步, 我们便可证明, 实数集 $\mathbb{R}$ 与 $(0, 1)$ 等势, 这一次, 确定一一对应关系的函数是 $\tan(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2})$.

正如康托尔曾把 $\mathbb{N}$ 作为基本集合而引入了第一个超限基数一样, 区间 $(0, 1)$ 也将作为定义一个新的、更大的无限基数的标准. 康托尔定义这个单位区间的基数为 c (“连续统”一词的首字母). 前面的讨论表明: 不仅区间 $(0, 1)$ 有基数 c , 任何有限长的区间以及实数集本身都具有这一相同的基数. 另外, 区间 $(0, 1)$ 的不可数性说明 c 是一个与 $\aleph_0$ 不同的基数. 这样, 康托尔就要开始创建超限数的等级制度了.

根据上述这些讨论, 我们逐渐能够理解有理数集与无理数集的内在区别. 有理数集与无理数集的区别绝不仅仅是前者可以写成有限小数或无限循环小数而后者则不能. 为了更清楚地说明这个问题, 康托尔只需再证明一个定理.

定理 1.4.3. 如果集合 B, C 是可数的, 那么它们的并集 $B \cup C$ 也是可数的.

证明.

$\square$

现在我们可以证明有理数集与无理数集的一个重大区别: 我们已证明前者是可数的, 对于后者, 我们将断定它不可数.

证明. 假设无理数集是可数无限的. 那么, 根据上述定理, 有理数集与无理数集的并集, 即实数集也是可数集, 但我们在前面证明了实数集不可数, 于是导出矛盾, 根据反证法, 无理数集是不可数的. $\square$

这意味着无理数在数量上大大超过有理数, 有理数集虽然被公认为一个由非常重要的、密密麻麻分布的数组成的无穷集, 但与无理数相比不过是沧海一粟. 突然间, 可数集在实数集中似乎无足轻重了, 尽管就有理数集来说, 它们当初是如此丰富.

为深入探索微积分的奥秘, 康托尔证明了这些奇特的定理. 无疑, 他的研究已经让我们清楚地认识到实数集之间的内在区别, 并有助于解释某些迄今为止尚不能解释的现象. 如果说康托尔的研究工作追根溯源是来自微积分的算术化而引发的问题, 那么, 他由此创立的集合论则

呈现出属于自己的惊人的生命力。

所有这一切都足以令人震惊，但康托尔 1874 年的论文中还包含着一个更加令人震惊的结果。康托尔证明了区间的不可数性之后，又把这一性质应用于一个长期困扰数学家的难题——超越数的存在。

实数集可被划分为相对稀疏的有理数集和相对丰富的无理数集。然而，实数还可以被划分两个数系——代数数和超越数⁸。代数数似乎可以构成一个庞大的集合。它包括了所有有理数以及大量无理数（诸如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ ）。相比之下，超越数就极难得到，虽然欧拉最早猜测超越数的存在（并非所有实数都是比较驯顺的代数数），但第一个特定的超越数实例却是由法国数学家刘维尔于 1844 年给出的。1874 年，当康托尔开始研究这个问题的时候，还没有林德曼关于 π 是超越数的证明，将近 10 年以后，这个证明才问世。换言之，在康托尔发展他的无穷论时，人们还只发现了非常少的超越数。也许，这些超越数只是实数中的一种例外，而不是一种常规。

然而，乔治·康托尔已习惯于将例外转变为常规，在超越数问题上，他又一次成功地实现了这种转变。他首先证明了全部代数数的集合是可数的。基于这一事实，康托尔开始考虑看似稀有的超越数问题。他从任意区间 (a, b) 开始探索。他已证明在这一区间中的代数数构成了一个可数集，仿照先前证明无理数集不可数的思路，可以得到：无论在任何区间，超越数在数量上都一定大大超过代数数！

换句话说，康托尔认识到，在区间 (a, b) 内实数远远多于代数数，这也许就是代数数相对比较少的原因。然而，所有这些额外的实数是从哪里来的呢？它们必定是超越数，其丰富性压倒一切。

这是一个真正引起争论的定理。毕竟，在这个时候，人们只知道极少数几个非代数数的存在。而康托尔却十分自信地说，绝大多数实数是超越数，但是他在作出这种推断的时候却没有展示出任何一个具体的超越数实例！相反，他只是在“数”区间中的点，并由此认为，区间中的代数数只占很小一部分。这种证明超越数存在的间接方法真是令人吃惊。一位受人欢迎的数学史作家埃里克·坦普尔·贝尔以充满诗意的语言概述了这种情况：点缀在平面上的代数数犹如夜空中的繁星，而沉沉的夜空则由超越数构成。

这就是康托尔 1874 年划时代的杰出论文所留下的宝贵遗产。许多数学家看到康托尔的结论后都惊异地摇头或者干脆表示怀疑。在保守的数学家看来，比较无穷的大小简直就像是这位有点儿神秘兮兮的年青学者搞的一场浪漫而骇人的恶作剧；断言有大量的超越数存在，却又举不出一个具体的例子，真是愚蠢至极。

乔治·康托尔听到了这些批评。但是，他绝对坚信他的推理过程是正确的，而他所做的这一切还仅仅是开始。与他后来的成就相比，他此时的这些发现甚至还很苍白。

1.4.2 康托尔与超限王国

康托尔究竟要走向哪里呢？在他 1874 年的论文发表之后，康托尔对无穷点集的性质进行了更深入的研究。他从很多方向进行研究，并打开了完全出人意料的新大门，将他那特有的大胆和想象力表露无遗。

⁸如果某个数可以作为一个整系数多项式方程的根，那么称这个数为**代数数**（Algebraic Irrationals）；如果对任何整系数多项式方程，这个数都不可能是其中一个方程的根，那么称这个数为**超越数**（Transcendental Numbers）

当康托尔意识到他能够成功确定的超限基数不止一个时，他立即感到，为了这种新基数，有必要使“小于”这一概念形式化。为此他再次依靠一一对应关系，但很显然，这次必须特别谨慎。

在抽象地探索这个问题之前，我们再次回想一下，假设在一个原始社会中，人们只能数到 3。正如前文所述，这个原始社会里有一位天才引入了 5 作为新的基数，它是任何能够与她右手的手指构成一一对应关系的集合所具有的基数。那么，她怎样证明 3 小于 5 呢？

假设在经过认真思考和艰苦寻觅之后，她找到了一个右手只有 3 个手指（比如只有拇指、食指和无名指）的人。这样她就能够让那个人右手的全部手指与她右手的部分手指构成一一对应关系，即使两人的拇指、食指和无名指一一相对。最后，她的右手还剩两个没有配对的手指，这多出来的两个手指就证明了 5 大于 3。

人们试图将这个定义扩展到一般集合：如果集合 A 的全部元素能够与集合 B 的部分元素构成一一对应关系，那么就称集合 A 的基数小于集合 B 的基数，记作 $|A| < |B|$ 。

遗憾的是，尽管这个定义在证明 $3 < 5$ 时十分完美，但当应用于无穷集合时，却不能令人满意了。例如，考虑自然数集 $\mathbb{N}$ 和有理数集 $\mathbb{Q}$ ，可以很容易地写出 $\mathbb{N}$ 的全部元素与 $\mathbb{Q}$ 的某一子集（那些分子为 1 的正分数）之间的一一对应关系：

于是推断出 $|\mathbb{N}| < |\mathbb{Q}|$ 。但我们已证明了集合 $\mathbb{N}$ 与集合 $\mathbb{Q}$ 之间存在着另一种一一对应关系，这两个集合具有相同的基数。乍一看，我们似乎陷入了令人很不爽的困境。

康托尔敏锐地发现，如果在开始时引入的不是“小于”，而是“小于等于”的概念，那么就能巧妙地摆脱这种困境。

定义 1.4.4. 已知集合 A, B ，如果集合 A 与集合 B 的某一子集之间存在一一对应关系，那么称集合 A 的基数不大于集合 B 的基数，记作 $|A| \leq |B|$ 。

现在，康托尔可以用一个严格不等式给出一个定义来描述两个集合之间的基数性质。

定义 1.4.5. 如果 $|A| \leq |B|$ ，并且 A 与 B 之间不存在一一对应关系，那么， $|A| < |B|$ 。

从表面上看，这个定义似乎微不足道，但若仔细思考可以发现，这个定义主要依靠的是一一对应关系的重要性质。如果要证明 $A < B$ ，我们就必须首先在集合 A 的所有点与集合 B 的部分点之间找到一个一一对应关系（因而证明 $A \leq B$ ），然后，还必须证明集合 A 的所有点与集合 B 的所有点之间不存在一一对应的关系。问题很快就变复杂了，远非不证自明。

尽管如此，这个定义依然行之有效。例如，它为我们的原始朋友证明了 $3 < 5$ 。也就是说，拇指、食指和无名指与右手 5 个手指中的 3 个手指构成的一一对应关系证明了 $3 \leq 5$ ；然而，却没有办法将她的全部 5 个手指与她伙伴的 3 个手指一一相对，所以，基数 3 与 5 不相等，结论只能是 $3 < 5$ 。

至于无限基数，应用同一逻辑方法足以证明 $\aleph_0 < c$ 。可以很容易地找到集合 $\mathbb{N}$ 的全部点与区间 $(0, 1)$ 某一子集之间的一一对应关系：

于是， $|\mathbb{N}| \leq |(0, 1)|$ 。但是，康托尔的对角线法证明，在这两个集合之间不存在一一对应关系。因此， $|\mathbb{N}| \not\leq |(0, 1)|$ 。综合这两个方面，我们得出结论 $|\mathbb{N}| < |(0, 1)|$ ，即 $\aleph_0 < c$ 。

至此，康托尔已经构想出一个比较基数大小的方法。他顺水推舟，又提出了一个非常重要，而且在他看来是一个非常关键的论断：

如果 $A \leq B$ 并且 $B \leq A$, 那么 $A = B$.

一样的, 如果我们将此应用于超限基数, 这一论断并不显而易见. 让我们仔细思考一下康托尔提出的问题: 如果集合 A 的全部点与集合 B 的部分点之间存在一一对应关系 (即 $A \leq B$), 并且在集合 B 的全部点与集合 A 的部分点之间同样也存在一一对应关系 (即 $B \leq A$), 那么我们就得出结论, 在集合 A 的全部点与集合 B 的全部点之间必然存在一一对应的关系 (即 $A = B$). 但是从哪里得出这最后的对应关系呢? 稍加思考, 我们就会发现这个论断的确具有深远的意义.

康托尔确信这个命题是正确的, 或许这表明了他对自己开创的集合论的“合理性”始终抱有坚定信念, 然而他从未对这以命题给出令人满意的证明. 幸运的是, 这个定理由数学家施罗德和伯恩斯坦各自独立地证明了, 我们今天称之为“施罗德-伯恩斯坦定理”, 它是研究超限基数的一个非常有用的工具.

尽管这一定理的证明超出了本书范围, 不过我们可以领略一下它的威力. 我们在前面证明了无理数集是不可数的, 即无理数集的基数大于 $\aleph_0$. 但我们并没有精准地确定这个基数, 现在我们可以应用施罗德-伯恩斯坦定理来解决这一问题.

证明. 已知无理数集 I 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个子集, 因此 $I \leq c$. 另一方面, 对于实数与无理数之间的一个对应关系, 我们定义如下:

如果 $x = M.b_1b_2b_3b_4 \dots b_n \dots$ 是一个小数形式的实数, M 是这个小数的整数部分, 那么, 我们可以定义与 x 相对应的实数为

$$y = M.10b_211b_3000b_41111b_500000b_6111111 \dots$$

也就是说, 我们在第一位小数后面插入 1 个 0, 在第二位小数后面插入 2 个 1, 在第三位小数后面插入 3 个 0, 等等, 依此类推. 例如, 与实数

$$x = 18.1234567 \dots$$

相对应的是

$$y = 18.1021130004111150000061111117 \dots$$

而与实数 $x = -7.25 = -7.25000 \dots$ 相对应的则是

$$y = -7.2051100000111110000000111111 \dots$$

无论我们选择哪个实数 x , 与之相对应的都有一个既不终止, 也不循环的小数展开式, 因为我们在这个小数展开式中会得到越来越长的连续 0 或连续 1 的数组. 因此, 每一个实数 x 都与一个无理数 y 相对应.

并且, 这种对应是“一一”的. 因为, 如果我们已知一个根据上述规律得出的 y 值, 比如 $5.304114000711111000002 \dots$, 我们就能够从中“分解”出一个且只有一个可能与之对应的 x 值, 就本例而言, $x = 5.344712 \dots$. 我们应该注意到, 并不是每一个无理数最终都能够与一个实

数对应. 如无理数

$$y = \sqrt{2} = 1.414159 \dots$$

在其小数展开式中就没有这种形式的 0 和 1 数组能够与任何实数 x 相对应.

在全部实数与部分无理数之间的这种一一对应关系表明 $c \leq I$. 但是, 我们已经讲过, $I \leq c$, 因而, 根据施罗德-伯恩斯坦定理, 我们可以断定, 无理数集的基数是 c , 与全部实数集的基数相同 $\square$

由康托尔提出, 并由施罗德和伯恩斯坦证明的这个定理成功解决了有关超限基数的一大难题, 但康托尔的奇妙问题层出不穷. 另一个问题是, 是否存在大于 c 的基数. 康托尔感觉这个问题的答案应该是肯定的, 并认为他知道如何得到一个更丰富的点集.

在康托尔看来, 要发现一个比一维区间 $(0, 1)$ 更大的基数, 关键是要在一个由 x 轴上的区间 $(0, 1)$ 与 y 轴上的区间 $(0, 1)$ 所构成的二维正方形中去寻觅. 在 1874 年 1 月写给戴德金的信中, 康托尔问道, 区间和正方形这两个集合是否存在一一对应关系? 他近乎肯定地认为, 在二维正方形与一维线段之间不可能存在这种对应关系, 因为前者似乎显然具有更多的点. 尽管构造一个证明可能十分困难, 但康托尔却认为证明也许是“几乎多余”的.

有趣的是, 这个几乎多余的证明却从未能够作出. 康托尔尽管尽了最大努力, 但始终未能证明在区间与正方形之间不可能存在一一对应的关系. 然后, 到了 1877 年, 他发现他原来的直觉是完全错误的. 这种一一对应的关系确实存在!

结论 4 (结论 2 的代数形式) $\aleph_0 + 1 = \aleph_0, \overbrace{\aleph_0 \times \cdots \times \aleph_0}^{\text{有限个 } \aleph_0} = \aleph_0, \overbrace{\aleph_1 \times \cdots \times \aleph_1}^{\text{有限个 } \aleph_1} = \aleph_1$, 后者表明任意一条线段上的点与任意一条直线、一个平面、一个空间内的点的个数相同.

那么, 我们到哪里寻找大于 c 的超限基数呢? 康托尔可以很容易地证明, 一个更大的正方形, 甚至整个平面中的全部点, 都具有与单位区间 $(0, 1)$ 相同的基数, 即使进入三维立方体中, 也不能使基数增加. 这样看来, c 似乎是最高一级的超限基数.

但情况并非如此. 1891 年, 康托尔成功证明了存在更大的超限基数, 而且是令人难以置信的大量存在. 他的这项研究结果, 我们今天通常称为康托尔定理. 虽然他一生中证明了诸多重要定理, 但看着这个定理的名称, 我们就能想到它所得到的高度评价. 这个定理像蕴含论的任何定理一样简单.

1.4.3 伟大的定理

定义 1.4.6 (幂集). 给定集合 A , A 的所有子集的集合称为 A 的幂集, 记作 $\mathcal{P}(A)$.

例如, 已知 $A = \{a, b, c\}$, 有 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. 显然, 若集合满足 $|A| = n$, 那么 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

但如果 A 是一个无穷集合又将如何呢? 无穷集合的幂集的基数是否同样大于该集合本身的基数呢? 康托尔定理给出了肯定的答案.

定理 1.4.7 (康托尔定理). 对任意集合 S , 其幂集 $\mathcal{P}(S)$ 的基数一定严格大于 S 的基数, 即

$$|S| < |\mathcal{P}(S)|$$

证明. 证明 $A \leq \mathcal{P}(A)$ 是容易的. 对每一个 $a \in A$, 令 $f(a) = \{a\}$, 可知 $f(a) \in \mathcal{P}(A)$. 于是, f 是从 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的映射, 并且可以证明该映射是单射, 于是集合 A 的全部元素可以与 $\mathcal{P}(A)$ 的子集建立一一对应关系, 从而:

$$A \leq \mathcal{P}(A).$$

下证明 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 之间不存在一一对应.

考虑反证法, 假设存在一个从 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的一一对应:

$$F: A \longrightarrow \mathcal{P}(A).$$

因为它是一一对应, 所以它既是单射, 又是满射.

利用这个对应关系构造集合 $B = \{a \in A \mid a \notin F(a)\}$ 即, B 由所有“不属于其对应子集”的元素组成, 可知 $B \in \mathcal{P}(A)$.

而 F 是满射, 因此 $\mathcal{P}(A)$ 中的每一个元素都必须是某个 $a \in A$ 的像, 即存在某个 $y \in A$, 使得 $F(y) = B$.

现在考察 y 是否属于 B .

根据集合 B 的定义, $y \in B$ 当且仅当 $y \notin F(y)$, 但 $F(y) = B$, 所以, 我们得到

$$y \in B \iff y \notin B.$$

这是矛盾的. 因此最初假设错误, 不存在从 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的一一对应, 而我们已经证明了 $A \leq \mathcal{P}(A)$, 按照基数严格小于的定义, 有

$$A < \mathcal{P}(A).$$

□

我们有必要思考康托尔定理更深一层的含义, 这一定理表明, 无论我们最初选定什么样的集合, 其幂集一定具有更大的基数. 这样, 为了找到我们寻觅已久的、基数大于 $\mathfrak{c}$ 的集合, 我们不用管平面的正方形或三维空间的立方体, 而把目光转向 $\mathcal{P}[(0, 1)]$, 即区间 $(0, 1)$ 内的点的所有子集的集合, 我们还可以构造 $\mathcal{P}[(0, 1)]$ 的幂集, 即 $(0, 1)$ 的所有子集的集合的所有子集的集合, 尽管这个集合的描述复杂得令人难以置信.

根据上述证明, 可得

$$\mathcal{P}[(0, 1)] < \mathcal{P}[\mathcal{P}[(0, 1)]].$$

精灵既然跳出了魔瓶, 康托尔的脚步就不会停止了, 康托尔将这一过程无限重复下去, 由此生成了一个越来越长的不等式链:

$$\aleph_0 < \mathfrak{c} < \mathcal{P}[(0, 1)] < \mathcal{P}[\mathcal{P}[(0, 1)]] < \mathcal{P}[\mathcal{P}[\mathcal{P}[(0, 1)]]] < \dots$$

几乎没有喘息的时间, 乔治·康托尔不仅打开大门迎接了第一个超限基数 ($\aleph_0$), 发现了更大的无穷基数 (c), 而且给出了一个不断生成更大超限数的不等式链. 这是一个没有结尾的故事.

毫不夸张地说, 这个定理, 以及康托尔所有关于无穷的深奥理论, 都引起了广泛的反对. 的确, 他推动数学进入一个未知领域, 在那里, 数学开始并入哲学和玄学的王国. 事实上, 康托尔本身就来自自己创立的超限理论中发现了一种宗教意义, 认为自己“准确地记录、转述和传送新发现的超限数理论, 是上帝的使者”. 他写道: “我毫不怀疑超限数的正确性, 因为我得到了上帝的帮助, 而且我曾用了十多年的时间研究超限数的多样性; 每一年, 甚至每一天, 我在这一学科中都有新的发现.”

康托尔声称他的数学乃是上帝的信息, 无怪那些对他激进的无穷论持反对意见的人可以对人不对事地进行反驳, 除此以外, 他的数学理论本身也招致各种诽谤、嘲讽和责难, 其中抱有最大恶意攻击来自坚持有限主义立场的克罗内克, 他是德国数学界很有影响的人物, 并在颇具声望的柏林大学拥有终身教职. 克罗内克不承认无穷集合可以作为完成的数学实体来研究, 称康托尔为骗子. 他出于对无穷集合与康托尔的厌恶, 多次驳回了康托尔发往柏林的教职申请, 严重阻碍了康托的职业发展. 除此以外, 康托尔在与对手的相互攻击中明显表现出一种偏执倾向, 在这个过程中, 他既攻击敌人又得罪朋友, 也就更难有机会在柏林大学谋职.

康托尔由于生活的失意和对最神秘的无穷概念的拼命钻研, 多次受到精神病的折磨. 他第一次发病是在 1884 年, 当时他正在狂热地研究一个称为“连续统假设”的定理. 一些人认为, 除了克罗内克及其他人的迫害以外, 康托尔对这个问题年复一年地刻苦钻研也是造成他精神崩溃的重要因素.

这一假设说起来非常简单, 它断定: 在 $\aleph_0$ 与 c 之间不存在其余超限基数. 对康托尔来说, 证明这个问题, 就像让一个刚刚发明了望远镜的天文学家证明宇宙中无穷远和更无穷远的两个星系之间空无一物一样.

在 1884 年, 即康托尔精神疾病首次发作的那一年, 他对此作出了极大的努力. 同年 8 月, 康托尔认为自己已获成功, 便写信给同事, 声称已经证明了一个问题. 然而, 他在三个月后的信中不仅撤回了此前的证明, 而且又声称他已证伪连续统假设, 但随即又发现其中存在逻辑错误. 此后的三十年间, 康托尔无数次回到这个问题上, 每当他以为接近答案时, 随即而来的往往是逻辑漏洞与病情复发. 1899 年, 爱子鲁道夫的意外离世又给康托尔一次沉重打击. 1902 年, 康托尔再次住进了哈雷的精神病院, 此后还分别于 1904 年、1907 年和 1911 年多次接受住院治疗. 长期不稳定的精神状态早已让他失去了教学资格. 第一次世界大战爆发后, 欧洲陷入动荡, 战争导致的物资短缺让本就缺乏积蓄和经济来源的康托尔长期处于营养不良状态. 1918 年 1 月 6 日, 康托尔因心力衰竭在疗养院中去世.

回顾康托尔的生活和工作, 人们不禁将他与其同时代的美术大师梵高相比. 康托尔的父亲笃信宗教, 而凡高的父亲则是一位荷兰牧师. 他们两人都深爱艺术, 热衷文学, 喜欢写诗. 梵高像康托尔一样, 也有着古怪而反常的个性, 他最后甚至疏远了像高更这样的朋友. 他们对自己的工作都有一种极强烈的献身精神. 当然, 他们两人都患有精神疾病, 因此住院治疗, 而且这给他们造成了沉重的思想负担, 因他们时刻担心疾病的再次发作.

最重要的是, 梵高和康托尔都是革命者. 梵高在短暂而辉煌的生涯中, 使美术超越了印象

主义的范畴, 同样, 康托尔也推动数学沿着意义深远的新方向发展. 无论人们对这位伟大而坎坷的数学家作何评价, 我们都不禁佩服他以一种绝对原创的方法探索无穷性质的这种勇气.

尽管面对生活和工作中的重重困境, 但康托尔却从未对他工作的价值丧失信心. 在谈到争议很大的有关无穷的观点时, 他写道:

“我认为是唯一正确的这种观点, 只有极少数人赞同. 虽然我可能是历史上如此明确坚持这种观点的第一人, 但看看由它推导而出的所有合理的结论, 我确信我将不是最后一人!”

的确, 他不是最后一人. 虽然多少代的数学家都曾探索过古老的几何、代数和数论的问题, 但康托尔却开创了全新的意想不到的境界. 因为他既提出又回答了前人不曾想到的问题, 所以, 将他的著作称为自古希腊以来第一部真正具有独创性的数学, 也许是最恰当不过的了.

尽管数学界对康托尔理论的围攻在几十年间从未停止过, 但一些有远见的数学家也看到了康托尔集合论中蕴涵的智慧之光. 康托尔集合论最忠实的信徒和最强有力的捍卫者是德国大数学家, 被誉为现代数学之父的希尔伯特 (D. Hilbert). 他在论文中宣称: “没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园中驱逐出去”. 并赞扬康托尔的超限数理论为“数学思想最惊人的产物, 在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一.” 1900 年, 希尔伯特在巴黎国际数学家大会上提出了决定整个 20 世纪数学发展的 23 个前沿问题, 它们统称为“希尔伯特问题”. 在这 23 个极为重要和影响深远的问题中, 排在第一位的正是康托尔连续统假设.

真理的光辉终究会大放异彩. 在许多数学家的努力下, 康托尔的集合论思想逐渐被越来越多的人所接受, 并终于成为数学发展道路上的一座里程碑. 现在, 集合论已经成为整个数学的理论基石.

不仅如此, 康托尔的遗赠将会在新的世纪里, 使数学界分为三个立场鲜明的阵营, 数学长达 3000 多年的英雄时代即将结束, 共同体时代将取而代之.

(未完待续)

附：希尔伯特的 23 个问题

1. Cantor's problem of the cardinal number of the continuum. (康托尔连续统假设)
实数的基数 (连续统的势) 是否就是第二个超限基数 $\aleph_1$?
2. The compatibility of the arithmetical axioms. (算术公理的无矛盾性)
证明算术公理系统是自治 (无矛盾) 的.
3. The equality of the volumes of two tetrahedra of equal bases and equal altitudes. (等底等高的四面体体积相等问题)
两个等底等高的四面体是否体积一定相等?
4. Problem of the straight line as the shortest distance between two points. (两点间直线距离为最短的问题)
构造所有满足“两点间直线距离最短”的度量几何.
5. Lie's concept of a continuous group of transformations without the assumption of the differentiability (李群的连续变换群概念不需要定义群的函数的可微性假设)
拓扑群成为李群的条件?
6. Mathematical treatment of the axioms of physics. (物理公理的数学处理)
将物理学的公理 (特别是概率论和力学) 数学化.
7. Irrationality and transcendence of certain numbers. (某些数的无理性和超越性)
若 α 是代数数且不为 0 或 1, β 是无理代数数, 问 α^β 是超越数吗?
8. Problems of prime numbers (The "Riemann Hypothesis"). (素数分布问题)
9. Proof of the most general law of reciprocity in any number field. (一般互反律的证明)
在任意数域中推广二次互反律.
10. Determination of the solvability of a Diophantine equation. (丢番图方程可解性的判定)
能否找到一种算法判定任意给定的整系数多项式方程是否有整数解?
11. Quadratic forms with any algebraic numerical coefficients. (系数为任意代数数的二次型理论)
12. Extensions of Kronecker's theorem on Abelian fields to any algebraic realm of rationality. (阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广)

13. **Impossibility of the solution of the general equation of 7th degree by means of functions of only two arguments.** (用二元函数解一般七次方程的不可能性)

一般七次方程能否仅用二元连续函数的复合求解?

14. **Proof of the finiteness of certain complete systems of functions.** (证明某些完全函数系的有限性)

特定环(如不变式环)是否有限生成?

15. **Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus.** (舒伯特计数演算的严格基础)

为舒伯特的枚举几何建立严格的代数几何基础.

16. **Problem of the topology of algebraic curves and surfaces.** (代数曲线与曲面的拓扑研究)

研究实代数曲线和曲面的连通分支数、相对位置等拓扑性质.

17. **Expression of definite forms by squares.** (正定形式的平方和表示)

实系数有理函数是否总可以写成有理函数的平方和?

18. **Building up of space from congruent polyhedra.** (由全等多面体构造空间问题)

是否存在非等距的具有等体积基本域的空间群?

19. **Are the solutions of regular problems in the calculus of variations always necessarily analytic?** (正则变分问题的解是否一定解析)

20. **The general problem of boundary values. (Boundary value problems in PD)**
(一般边值问题)

研究具有给定边界条件的偏微分方程解的存在性.

21. **Proof of the existence of linear differential equations having a prescribed monodromy group.** (具有给定单值群的线性微分方程的存在性证明)

证明存在具有指定奇点和指定单值群的线性微分方程.

22. **Uniformization of analytic relations by means of automorphic functions.** (通过自守函数使解析关系单值化)

23. **Further development of the methods of the calculus of variations.** (变分法的进一步发展)

参考文献

参考文献

- [1] 邓汉姆. 天才引导的历程: 数学中的伟大定理 [M]. 李繁荣, 李莉萍, 译. 北京: 机械工业出版社, 2013.
- [2] 阿米尔·艾克塞尔: 神秘的阿列夫 [M]. 左平, 译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 2011.