

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.3 映射

1.3.1 基本概念

一群学生到某教室上课, 听这门课的所有学生组成集合 A , 该教室中所有座位组成集合 B 。学生们各挑一个空座位坐下, 这构成了 A 到 B 的一个对应法则, 它使得集合 A 中的每一个同学, 在集合 B 中有唯一确定的一个座位与他对应。我们抓住这一例子的主要特征, 抽象出下述概念:

定义 1.3.1 (映射). 设 A 和 B 为非空集合, 如果 A 到 B 有一个对应法则 f , 使得 A 中的每一个元素 a , 在 B 中都有唯一确定的一个元素 b 与它对应. 那么称 f 是 A 到 B 的一个映射, 记作

$$f: A \rightarrow B \quad a \mapsto b$$

A 称为 f 的**定义域 (Domain)**, B 称为 f 的**陪域 (Codomain)**. 如果 $f(a) = b$, 那么称 b 是 a 在 f 下的**像 (Image)**, a 是 b 在 f 下的**原像 (Preimage)**. f 的**值域 (像集)** 是 A 中元素的所有像的集合. 记作 $f(A)$ 或 $\text{Imf}(A)$, 即

注意值域与陪域的区别, 容易知 $f(A) \subseteq B$, 但二者不一定相等.

在开头的例子中, 我们得知所有上课的学生构成的集合与教室中所有座位构成的集合之间存在一个映射, 下面我们考虑若干特殊情况. 如果教室里的每一个座位都有学生坐着, 教室就坐满了, 自然地, 我们把这一映射称为**满射**; 如果不同的学生坐在不同的椅子上 (没有一个椅子上坐着多个学生), 自然地, 我们把这一映射称为**单射**, 其严格定义如下:

定义 1.3.2 (满射). 映射 f 称为**满射 (Surjection)**, 当且仅当对于陪域中的任意元素 b , 都在定义域中的元素 a , 使得 $f(a) = b$.

定义 1.3.3 (单射). 映射 f 称为**单射 (Injection)**, 当且仅当对于定义域中的任意两个不同元素 a, b , 它们的像不同.

定义 1.3.4 (双射). 映射 f 称为**双射 (Bijection)** 或**一一对应的 (One-to-One Correspondence)**, 当且仅当它既是单射又是满射.

设 A, B 为有限非空集合,

- (1) 存在单射 $f: A \rightarrow B$ 的充要条件是 $|A| \leq |B|$;
- (2) 存在满射 $f: A \rightarrow B$ 的充要条件是 $|A| \geq |B|$;
- (3) 存在双射 $f: A \rightarrow B$ 的充要条件是 $|A| = |B|$.

这提示我们, 在比较两个有限集的基数时, 可考虑通过建立集合间的映射完成解答.

1.3.2 映射的乘法与可逆映射

类比函数的复合, 我们可得到映射的乘法/合成原则:

定义 1.3.5 (映射的乘法/合成). 设 A, B, C 是非空集合, 若存在映射 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, 则称 g 与 f 的乘积 (合成) 是从 A 到 C 的映射, 记为 $gf : A \rightarrow C$, 定义为

$$(gf)(a) := g(f(a)), \forall a \in A$$

定义 1.3.6 (变换, 恒等变换). 一个集合到自身的映射称为变换. 若集合 A 上的变换满足

$$f(a) = a, \forall a \in A$$

则称 f 是 A 上的恒等变换, 记为 id_A .

我们可以把映射 $f : A \rightarrow B$ 理解为一对 $x \in A$ 进行某种操作的规则, 这条规则会得出 $f(x) \in B$, 有时候我们希望找到一个映射 g , 它能“撤销” f 的操作, 基于这一想法, 我们引出下述概念.

定义 1.3.7 (可逆映射). 设 A, B 是非空集合, 有映射 $f : A \rightarrow B$. 若存在 $g : B \rightarrow A$, 使得

$$gf = \text{id}_A \quad \text{且} \quad fg = \text{id}_B$$

则称 f 是可逆映射, 把 g 称为 f 的逆映射, 简称 f 的逆, 记为 f^{-1} .

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.3 映射

习 题

A 组

- 证明映射的乘法满足结合律而不满足交换律.
- 已知映射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$. 如果对任意 $x \in A$ 都有 $(gf)(x) = \text{id}_B$, 那么称 g 是 f 的左逆; 如果对任意 $y \in B$ 都有 $(fg)(y) = \text{id}_A$, 那么称 g 是 f 的右逆, g 是 f 的逆当且仅当 g 既是 f 的左逆又是 f 的右逆.
 - 证明映射 f 有左逆当且仅当它是单射;
 - 证明映射 f 有右逆当且仅当它是满射;
 - 证明映射 f 可逆当且仅当它是双射.
- 证明: 如果 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 都是双射, 那么 $gf: A \rightarrow C$ 也是双射, 且 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.
- 【2009 四川 16 改编】(多选) 设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合, 对于映射 $f: V \rightarrow V, a \in V$, 记 a 的象为 $f(a)$, 若映射 $f: V \rightarrow V$ 满足: 对任意 $a, b \in V$ 及任意实数 λ, μ 都有 $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$, 则称 f 为平面 M 上的线性变换, 则下列命题为真命题的是
 - 设 f 是平面 M 上的线性变换, 则 $f(0) = 0$
 - 对 $a \in V$, 设 $f(a) = 2a$, 则 f 是平面 M 上的线性变换
 - 若 e 是平面 M 上的单位向量, 对 $a \in V$, 设 $f(a) = a - e$, 则 f 是平面 M 上的线性变换
 - 设 f 是平面 M 上的线性变换, a, b 共线, 若 a, b 共线, 则 $f(a), f(b)$ 也共线
- 【2011 福建 15 改编】(多选) 设 V 是全体平面向量构成的集合, 若映射 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足: 对任意向量 $a = (x_1, y_1) \in V, b = (x_2, y_2) \in V$, 以及对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 均有 $f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$, 则称映射 f 具有性质 P, 则下列映射中具有性质 P 的是
 - $f_1: V \rightarrow \mathbb{R}, f_1(m) = x - y, m = (x, y) \in V$
 - $f_2: V \rightarrow \mathbb{R}, f_2(m) = x^2 + y, m = (x, y) \in V$
 - $f_3: V \rightarrow \mathbb{R}, f_3(m) = x + y + 1, m = (x, y) \in V$
 - $f_4: V \rightarrow \mathbb{R}, f_4 = |m - u|^2 + |m - v|^2$ 其中 u, v 是确定的常向量, $m = (x, y) \in V$

1.

2.

3.

4.

5.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.3 映射

B 组

1. 【2025 年北京西城区高三期末 21 (3)】已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_{2m}$ 为 $1, 2, \dots, 2m$ 的一个排列, 其中 m 为不小于 3 的正整数. 若存在 $k \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}$ 使得 $|a_k - a_{k+1}| = m$, 则称数列 A 具有性质 P . 在所有由 $1, 2, \dots, 2m$ 的排列组成的数列中, 记具有性质 P 的数列的个数为 S , 不具有性质 P 的数列的个数为 T , 证明: $S > T$.

2. 【2007 北京理 20】已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{Z} (k \geq 2)$, 由 A 中的元素构成两个集合:

$$S = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a + b \in A\}, T = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a - b \in A\}$$

其中 (a, b) 是有序数对, 设 $|S| = m, |T| = n$. 若对任意 $a \in A$ 有 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P .

(1) 检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对其中具有性质 P 的集合写出相应的集合 S 和 T ;

(2) 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明: $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$;

(3) 判断 m 和 n 的大小关系, 并给出证明.

1.

2.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.3 映射

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.3 映射