

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.2 集合

1.2.1 基本概念

定义 1.2.1 (集合). **集合**是不同对象的一个无序的聚集, 对象也称为集合的**元素**. 用 $a \in A$ 来表示 a 是集合 A 中的一个元素, 用 $a \notin A$ 来表示 a 不是集合 A 中的一个元素.

定义 1.2.2 (集合的基数). 对于集合 S , 若 S 中恰有 n 个不同的元素, 则称 S 是**有限集**, n 是 S 的**基数**, 记为 $|S|$ 或 $\text{card}(S)$. 如果一个集合不是有限集, 那么它就是**无限集**.

为表示某些集合, 我们可以列举出其所包含的全部元素, 当一个集合的元素较多, 或者它是无限集时, 可以只写出几个元素, 其他元素用省略号表示, 要注意, 写出的元素必须让人明白省略号表示了哪些元素, 例如小于 100 的正整数集合可以记为 $\{1, 2, \dots, 99\}$.

但是, 有相当一部分集合是不可列的, 其中一个是不等式 $x - 7 < 3$ 的解集. 解该不等式得到 $x < 10$, 无法用列举法表示 (无法以某一顺序列出所有小于 10 的实数), 我们可以换种方法, 抓住该集合中元素具有的共同特征: 它们是实数且小于 10, 于是可以把这个集合写成 $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$.

定义 1.2.3 (集合的描述法). 设 A 是一个集合, 我们把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为 $\{x \mid P(x)\}$, 这种表示集合的方法称为**描述法**.

集合也可以用**韦恩图**形象地表示. 在韦恩图中, **全集** U 包含了所考虑的全部对象, 用矩形框表示. 在矩形框内部, 一般用圆形表示集合, 用点表示集合中特定的元素. 韦恩图常用于直观表示集合之间的关系.

定义 1.2.4 (子集). 若 A, B 满足

$$\forall x \in A \implies x \in B$$

则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A \subseteq B$, 否则称 A 不是 B 的子集, 记作 $A \not\subseteq B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记作 $A \subsetneq B$

1.2.2 集合运算

定义 1.2.5 (集合的交、并、补、差运算). 对于集合 A, B 与全集 U , 由同时属于 A 与 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的**交集**, 记作

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由属于 A 或 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的**并集**, 记作

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

多个集合的交, 并运算可做如下简写:

$$A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i \quad A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

在全集 U 中, 不属于 A 的所有元素构成的集合称为 A 在 U 中的**补集**, 记作 $\complement_U A$.
由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的**差集**, 记作

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\} \quad \text{或} \quad A \setminus B$$

问题 1.1 解答下述问题:

(1) 证明集合的 $\cap, \cup$ 运算满足分配律, 即

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

(2) 证明**德摩根律** (De Morgan's laws): 设 U 是全集, 则集合 A, B 满足

$$\begin{aligned} \complement_U (A \cup B) &= \complement_U A \cap \complement_U B \\ \complement_U (A \cap B) &= \complement_U A \cup \complement_U B \end{aligned}$$

提示: 要证明集合 $A = B$, 一般考虑证明 “ $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ”.

定义 1.2.6 (笛卡尔积). 两个集合 X, Y 的笛卡尔积记作 $X \times Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

可将 $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ 个 } X}$ 简写为 X^n , 例如二维实平面可表示为 $\mathbb{R}^2$;

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.2 集合

习 题

A 组

- 【2013 上海学考 22】设全集 $U = \mathbb{R}$, 下列集合运算结果为 $\mathbb{R}$ 的是
 (A) $Z \cup \complement_U N$ (B) $N \cap \complement_U N$ (C) $\complement_U (\complement_U \emptyset)$ (D) $\complement_U \{0\}$
- 【1987 全国卷理 1】非空集合 S, T 满足 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$, 令 $X = S \cap T$, 则 $S \cup X =$
 (A) X (B) T (C) $\emptyset$ (D) S
- 【2005 全国 I 卷理 2】设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集, 满足 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下列命题正确的是
 (A) $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$ (B) $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
 (C) $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$ (D) $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$
- 【2024 深圳二模 3】对于集合 M, N , 下列命题正确的是
 (A) $M \cup \complement_{M \cup N} N = M \cup N$ (B) $\complement_{M \cup N} (M \cap N) = (\complement_{M \cup N} M) \cup (\complement_{M \cup N} N)$
 (C) $M \cap \complement_{M \cup N} N = M \cap N$ (D) $\complement_{M \cup N} (M \cap N) = (\complement_{M \cup N} M) \cap (\complement_{M \cup N} N)$
- 【2005 山东理 10】设集合 A, B 是全集 U 的两个子集, 则 $A \subsetneq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【2006 江苏 7】集合 A, B, C 满足 $A \cup B = B \cap C$, 则下列命题正确的是
 (A) $A \subseteq C$ (B) $C \subseteq A$ (C) $A \neq C$ (D) $A \neq \emptyset$
- 【2014 湖北 3】设 U 为全集, A, B 是集合, 则“存在集合 C 使得 $A \subseteq C, B \subseteq \complement_U C$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 【2007 广东理 8】设集合 S 至少含有两个元素, 定义 S 上的二元运算 “ $*$ ”, 即对任意 $a, b \in S$, 有序元素对 (a, b) 在 S 中有唯一确定的元素 $a * b$ 与之对应. 若对任意 $a, b \in S$, 有 $a * (b * a) = b$, 则对任意 $a, b \in S$, 下列等式中不恒成立的是

(A) $(a * b) * a = a$

(B) $[a * (b * a)] * (a * b) = a$

(C) $b * (b * b) = b$

(D) $(a * b) * [b * (a * b)] = b$

9. 设 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 集合 $A = \{1, 2, \dots, m\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$, 集合 C 是 A 的子集, 且 $B \cap C \neq \emptyset$, 讨论符合题意的 C 的个数.

10. (多选) 设 X 为全集, $A \subseteq X$, 定义 $f_A^S = \begin{cases} 1, & S \in A \\ 0, & S \notin A \end{cases}$, 对于 X 的真子集 A, B, C , 下列命题正确的是

(A) 若 $B \subseteq A$, 则 $f_B^S \leq f_A^S$

(B) 若 $B \cap A \neq \emptyset$, 则 $f_{B \cap A}^S \leq f_A^S + f_B^S$

(C) $f_{B \cup A}^S = f_A^S + f_B^S$

(D) $f_{A \cup B \cup C}^S = 1 - (1 - f_A^S)(1 - f_B^S)(1 - f_C^S)$

11. 【2011 福建文 12 改编】(多选) 在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, 被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 则下列命题正确的是

(A) $2011 \in [1], [7] = [92]$

(B) $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$

(C) 整数 a, b 属于同一“类”当且仅当 $a - b \in [0]$

(D) 对任意 $n \in \mathbb{Z}, n^2 \notin [2]$ 且 $n^2 \notin [3]$

12. 【2010 四川 16 改编】(多选) 设 S 是复数集 $\mathbb{C}$ 的非空子集, 若对任意 $x, y \in S$, 都有 $x + y, x - y, xy \in S$, 则称 S 为封闭集, 下列叙述正确的是

(A) 集合 $S = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是封闭集

(B) 若 S 为封闭集, 则一定有 $0 \in S$

(C) 封闭集一定是无限集

(D) 若 S 为封闭集, 则满足 $S \subseteq T \subseteq \mathbb{C}$ 的任意集合 T 也是封闭集

13. 【2006 四川理 16】若非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足:

(1) 对任意 $a, b \in G$, 有 $a \oplus b \in G$;

(2) 存在 $e \in G$, 使得对一切 $a \in G$, 都有 $a \oplus e = e \oplus a = a$,

则称 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”. 现给出下列集合和运算:

(1) $G = \{\text{非负整数}\}$, $\oplus$ 为整数加法

(2) $G = \{\text{偶数}\}$, $\oplus$ 为整数乘法

(3) $G = \{\text{平面向量}\}$, $\oplus$ 为平面向量加法

(4) $G = \{\text{二次三项式}\}$, $\oplus$ 为多项式加法

(5) $G = \{\text{虚数}\}$, $\oplus$ 为复数乘法

其中 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”的是 (Δ)

14. 【2025 “漫游数海”回归课本联赛 12】设 $a \in \mathbb{R}$, 若 $\{1, \sqrt{a}\} \subseteq \{1, 2, 4, a^2\}$, 求 a 所有可能的值.

15. 解答下述问题:

(1) 【2007 湖北 3】已知集合 $P = \{x \mid \log_2 x < 1\}$, $Q = \{x \mid |x - 2| < 1\}$, 求 $P - Q$;

(2) 【2004 湖北文 1】已知集合 $A = \{x \mid x = \sqrt{5k + 1}, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x \leq 6, x \in \mathbb{Q}\}$, 求 $A \cap B$.

- (3) 【2005 浙江 9】设 $f(n) = 2n + 1 (n \in \mathbb{N})$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. 记 $\hat{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in P\}$, $\hat{Q} = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in Q\}$, 求 $(\hat{P} \cap \mathbb{C}_{\mathbb{N}} \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \mathbb{C}_{\mathbb{N}} \hat{P})$;
- (4) 【2021 福建省质检 2】已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4x + m < 0\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, 求 $A \cup B$;
- (5) 【2026 新高考 I 卷 3】已知集合 $A = \left\{ \sin \frac{7\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{3}, \tan \frac{5\pi}{4} \right\}$, $B = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$, 求 $A \cap B$.
- (6) 【1990 全国卷理 9】已知集合 $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $M = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $N = \{(x, y) \mid y \neq x+1\}$, 求 $\mathbb{C}_I M \cap \mathbb{C}_I N$;
- (7) 【2004 安徽理 11】已知集合 $M = \{\vec{a} \mid \vec{a} = (1, 2) + \lambda(3, 4), \lambda \in \mathbb{R}\}$, $N = \{\vec{a} \mid \vec{a} = (-2, -2) + \lambda(4, 5), \lambda \in \mathbb{R}\}$, 求 $M \cap N$;

16. 解答下述问题:

- (1) 【2020 全国 III 卷 1】已知集合 $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}^*, y \geq x\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 8\}$, 求 $|A \cap B|$;
- (2) 【2018 全国 II 卷 2】已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$, 求 $|A|$;
- (3) 【2013 重庆 22 (1)】对正整数 n , 记

$$I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}, P_n = \left\{ \frac{m}{\sqrt{k}} \mid m \in I_n, k \in I_n \right\}$$

求 $|P_7|$;

- (4) 【2015 湖北文 10, 理 9】已知集合

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbb{Z}\}, B = \{(x, y) \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \mid (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$. 求 $|A \oplus B|$.

17. 解答下述问题:

- (1) 【2022 北京 9】已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6, S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合. 设集合 $T = \{Q \in S \mid PQ \leq 5\}$, 求 T 表示的区域的面积;
- (2) 【2012 重庆 10】设平面点集 $A = \{(x, y) \mid (y-x)(y-\frac{1}{x}) \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, 求 $A \cap B$ 所表示的平面图形的面积;
- (3) 【2013 浙江会考 39】设集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \mid [x]^2 + [y]^2 \leq 1\}$, 求 $A \cup B$ 所表示的平面区域的面积.

18. 【2016 上海学考 29】对于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 记集合 $D_{f>g} = \{x \mid f(x) > g(x)\}$. 设 $f_1(x) = x - 1$, $f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + a \cdot 3^x + 1$, $h(x) = 0$. 如果 $D_{f_1>h} \cup D_{f_2>h} = \mathbb{R}$, 求实数 a 的取值范围.

19. 【2010 湖北理 2】已知集合 $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \right\}$, $B = \{(x, y) \mid y = 3^x\}$, 求 $A \cap B$ 的子集的个数.

20. 【2023 北京第二次学考 28】已知数集 A 含有 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 个元素, 定义集合 $A^* = \{x+y \mid x, y \in A\}$.

- (1) 写出一个集合 A , 使得 $A = A^*$;

- (2) 当 $n=4$ 时, 是否存在集合 A , 使得 $A^* = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$? 若存在, 写出一个符合条件的集合 A ; 若不存在, 说明理由.

21. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 定义

$$S_f = \{x \in D \mid f(x) = f(-x)\}$$

- (1) 证明: $S_f \neq \emptyset$;
 (2) 证明: $f(x)$ 是偶函数当且仅当 $S_f = \mathbb{R}$;
 (3) 若 $f(x)$ 是奇函数, 证明: $x_0 \in S_f$ 当且仅当 x_0 是 $f(x)$ 的零点;
 (4) 若对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 当 $x < y$ 时, $f(x) \leq f(y)$, 判断是否成立: $\forall x \in S_f, f(x) = f(0)$;
 (5) 设 $f(x), g(x)$ 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, $h(x) = f(x)g(x)$. 判断下述命题是否成立:
 (a). $S_h \subseteq S_f \cap S_g$ (b). $S_f \cap S_g \subseteq S_h$ (c). $S_h \subseteq S_f \cup S_g$ (d). $S_f \cup S_g \subseteq S_h$

22. 给定正整数 n , 已知集合

$$M_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

对于 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in M_n$, 定义 $d(X, Y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

- (1) 已知 $X = (1, 0, 1, 0) \in M_4$, 求所有的 $Y \in M_4$, 使得 $d(X, Y) = 3$;
 (2) 已知 $X, Y, Z \in M_n$, 求证: $d(X, Y) + d(Y, Z) + d(Z, X)$ 为偶数.

23. 【2023 北京第一次学考 28】给定正整数 $k \geq 2$, 设集合

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, k\}$$

对于集合 M 的子集 A , 若 $|A| \geq 2$ 且 A 中任意两个不同元素 $(y_1, y_2, \dots, y_k), (z_1, z_2, \dots, z_k)$ 满足 $y_1 + y_2 + \dots + y_k = z_1 + z_2 + \dots + z_k$ 且 $y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_k + z_k$ 中有且只有一个为 2, 则称 A 具有性质 **P**.

- (1) 当 $k=2$ 时, 判断 $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$ 是否具有性质 **P**; (结论无需证明)
 (2) 当 $k=3$ 时, 写出一个具有性质 **P** 的集合 A ;
 (3) 当 $k=4$ 时, 求证: 若 A 中的元素个数为 4, 则 A 不具有性质 **P**
 (4) (选做) 对于正整数 $k \geq 4$, 若 A 具有性质 **P**, 则 $|A|$ 的最大值是多少?

1. A. $Z \cup \complement_U N = \mathbb{R}$, 故 A 选项正确. $N \cap \complement_U N = \emptyset$, 故 B 选项错误. $\complement_U (\complement_U \emptyset) = \complement_U U = \emptyset$, 故 C 选项错误. $\complement_U \{0\} = \{x | x \neq 0\}$, 故 D 选项错误.

2. D. 由 $X = S \cap T$ 可推出 $X \subseteq S$, 因此 $S \cup X = S$, 所以 D 正确.

注: 本节的 2 到 8 题基本均可使用韦恩图直观判断或用于辅助, 答案主要从集合运算的角度给出.

3. C. 者对 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$ 用德摩根律, 得 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$, 直接得到 C 正确.

4. B. 对 B 选项等式的左侧用德摩根律, 其结果与右侧相同, 直接得到 B 正确.

5. A. 充分性满足, 当 $A \subset B$ 时, 可以推出 $(\complement_U A) \cup B = U$. 必要性不满足, $(\complement_U A) \cup B = U$ 等价于 $A \subseteq B$. 这不等价于 $A \subset B$, 反例为 $A = B$, 答案为充分不必要条件.

6. A. 由 $A \subseteq A \cup B = B \cap C$, 得 $A \subseteq C$, 直接得到 A 正确.

7. C. 充分性满足, 采取反证法, 假设 $A \cap B \neq \emptyset$, 则存在 $x \in A$ 且 $x \in B$, 由 $A \subseteq C, B \subseteq \complement_U C$ 可知 $x \in C$ 且 $x \in \complement_U C$, 矛盾, 故 $A \cap B = \emptyset$. 必要性满足, 这是容易验证的. 于是答案为充要条件.

8. 由已知式交换 a, b , 得 $b * (a * b) = a$; 令 $a = b$, 得 $b * (b * b) = b$, 所以 C 正确. 又 $[a * (b * a)] * (a * b) = b * (a * b) = a$, 所以 B 正确; 而 $(a * b) * [b * (a * b)] = (a * b) * a$, 题设不能推出它等于 a . 例如取任意指数为 2 的非平凡阿贝尔群作运算, 有 $a * (b * a) = b$, 但 $(a * b) * a = b$, 一般不等于 a , 故不恒成立的是 A.

9. 当 $m \leq n$ 时有 $2^m - 1$ 个, 当 $m > n$ 时有 $2^m - 2^{m-n}$ 个. 若 $m \leq n$, 则 $B \cap A = A$, 所以 $B \cap C \neq \emptyset$ 等价于 $C \neq \emptyset$. A 的子集共有 2^m 个, 其中空集不符合条件, 故符合条件的 C 有 $2^m - 1$ 个.

若 $m > n$, 则 $B \cap A = \{1, 2, \dots, n\}$. 不符合条件的 C 必须不含这 n 个元素, 只能从 $\{n+1, \dots, m\}$ 中任取, 故有 2^{m-n} 个. 于是符合条件的 C 有 $2^m - 2^{m-n}$ 个.

10. ABD. 若 $B \subseteq A$, 当 $S \notin B$ 时, 有 $f_B^S = 0 \leq f_A^S$, 当 $S \in B$ 时一定有 $S \in A$, 此时 $f_B^S = f_A^S = 1$, A 正确. 若 $S \notin B \cap A$ 时, 不等式一定满足. 若 $S \in B \cap A, f_{B \cap A}^S = 1 < 2 = f_A^S + f_B^S$, B 正确. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 当 $x \in A \cap B$ 时, $f_{A \cup B}^S = 1 \neq 2 = f_A^S + f_B^S$, C 错误. 对于 D, $f_{A \cup B \cup C}^S = 1$ 当且仅当 $f_A^S = 1$ 或 $f_B^S = 1$ 或 $f_C^S = 1$, 即 $1 - (1 - f_A^S)(1 - f_B^S)(1 - f_C^S) = 1, f_{A \cup B \cup C}^S = 0$ 当且仅当 $f_A^S = f_B^S = f_C^S = 0$, 即 $1 - (1 - f_A^S)(1 - f_B^S)(1 - f_C^S) = 0$, 故 D 正确.

11. ABCD. $2011 = 5 \cdot 402 + 1$, 于是 $2011 \in [1, 7, 92]$ 除以 5 的余数都为 2, 于是 $[7] = [92] = [2]$, A 正确. 每个整数的余数只能为 0, 1, 2, 3, 4, 显然有 $\mathbb{Z} \subseteq [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$, 反向的包含关系是显然的, 于是可得出 B 正确. a, b 属于同一类等价于它们模 5 同余, 即 $5 | (a - b)$, 可得 $a - b \in [0]$, 故 C 正确. 设 $x = 5k + p (p = 0, 1, 2, 3, 4)$, 则 $x^2 \equiv (5k + p)^2 \equiv p^2 \pmod{5}$ 而 p^2 模 5 只能为 0, 1, 4, 所以 D 正确.

12. AB. 可以验证复数集关于加、减、乘均封闭, 故 A 正确. 任取封闭集中的 x , 封闭集关于减法封闭, 于是 $x - x = 0 \in S$, 故 B 正确. 取集合 $\{0\}$, 它是有限封闭集, 于是 C 错误; 设 $S = \mathbb{Q}$, 可以证明 S 是封闭集, 取 $T = S \cup \{\sqrt{2}\}$, 而 $1 + \sqrt{2} \notin T$, 故 T 不是封闭集, D 错误.

13. 选 (1) (3). 该代数系统满足封闭性且存在单位元.

(1) 封闭性满足, 单位元为 0, 正确.

(2) 封闭性满足但不存在单位元, 错误.

(3) 封闭性满足, 单位元为零向量 $\mathbf{0}$, 正确.

(4) 封闭性不满足, $x^2 + x + 1 + (-x^2 - x - 1) = 0$ 不属于该集合, 错误.

(5) 封闭性不满足, $i \times i = -1$ 不属于该集合, 错误.

14. $a = 0$ 或 $a = 4$ 或 $a = 16$. 分类讨论 $\sqrt{a}$ 与 $2, 4, a^2$ 相等的情况, 可得 $a = 0$ 或 $a = 4$ 或 $a = 16$.

15. (1) $(0, 1]$.

(2) $\{1, 4, 6\}$. 列出集合 A 中小于 6 的元素: $1, \sqrt{6}, \sqrt{11}, 4, \sqrt{21}, \sqrt{26}, \sqrt{31}, \sqrt{36}$, 后略.

(3) $\{0, 3\}$.

(4) $\{1, 2, 3, 4\}$. 由于 $y = x^2 - 4x + m$ 关于 $x = 2$ 对称, 由题意知 $1, 2 \in B$, 根据对称性有 $3 \in B$, 而 $4 \notin B$, 所以 $0 \notin B$, 集合 B 的解集可视为某区间与 $\mathbb{Z}$ 的交集, 综上 $B = \{1, 2, 3\}$, 于是 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

(5) $\{(2, 3)\}$. 化简集合 M 的描述: $y = x + 1$ 且 $x \neq 2$. 由德摩根律, $\complement_I M \cap \complement_I N = \complement_I (M \cup N)$, 可知 $M \cup N = I \setminus \{(2, 3)\}$, 于是所求集合为 $\{(2, 3)\}$.

(6) $\{(-2, -2)\}$. 将此题涉及的所有向量的始点均记为原点, 集合 M, N 中向量的终点分别在某直线上运动, 这两条直线的交点即是属于 $M \cap N$ 的向量的终点, 设 $x \in M, x = (1 + 3\lambda_1, 2 + 4\lambda_1), y \in N, y = (-2 + 4\lambda_2, -2 + 5\lambda_2)$, 由 $x = y$ 解得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$, 可得 $M \cap N = \{(-2, -2)\}$.

16. (1) 4. A 中包含 $\{(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$.

(2) 9.

(3) 46. 当 $k = 1$ 时, 得到 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. 当 $k = 4$ 时, 得到 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$. 这两种情形合并后共有 11 个有理数.

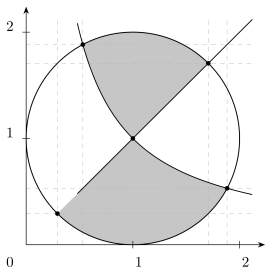
当 $k = 2, 3, 5, 6, 7$ 时, 约分后得到的 5 组数, 它们的分母分别含有 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$. 组内的数各不相同, 组间的数也不可能出现相等的情况, 而每种 k 给出 7 个不同的数.

因此 $|P_7| = 11 + 5 \times 7 = 46$.

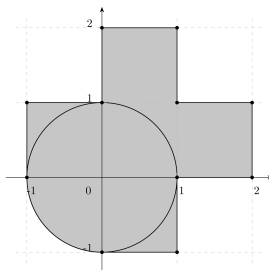
(4) 45. $A = \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$. 集合 B 是正方形 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 内的整数点集合. 可以按下述方式构造集合 $A \oplus B$: 将 B 中的每个元素分别向上、向下、向左、向右平移一个单位, 所有平移结果的并集等于横向的 7×5 矩形与纵向的 5×7 矩形的并. 计数得 $|A \oplus B| = 45$.

17. (1) π . 设 P 在底面 ABC 的射影为 O , 所求区域为底面内以 O 为圆心、半径为 1 的圆盘. 面积为 π .

(2) $\pi/2$. 做出示意图, 阴影部分为 $A \cap B$ 表示的区域, 面积为 $\frac{\pi}{2}$



第 17 题 (2) 图示



第 17 题 (3) 图示

(3) $5 + \pi/4$. 由 $[x]^2 + [y]^2 \leq 1$, 可知 $([x], [y])$ 只能是 $(0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$. 而集合 $G = \{(x, y) \mid [x] = p, [y] = q\}$ 等价于 $\{(x, y) \mid p \leq x < p+1, q \leq y < q+1\}$, 其表示区域为一个边长为 1 的正方形. 所以 B 是五个互不重叠的单位方格, 面积为 5. 作出 $A \cup B$ 表示的区域如上:

可得 $A \cup B$ 的面积为 $5 + \frac{\pi}{4}$.

新答案 (来源: 1.25 曲线的方程和平面点集.md): $5 + \frac{\pi}{4}$

【解题思路】因为 $[x], [y]$ 的取值范围是整数, 所以在集合 B 中, $([x], [y])$ 表示的点只可能为 $(-1, 0), (0, 0), (1, 0), (0, 1), (0, -1)$.

而对任意整数 m, n , 满足 $([x], [y]) = (m, n)$ 的点 (x, y) 是点 (m, n) 右上角的边长为 1 的正方形.

如图所示, $A \cup B$ 所表示的区域的面积是 5 个正方形的面积加上四分之一圆的面积, 面积为 $5 + \frac{\pi}{4}$.

18. $a > -4/9$. 可知 $D_{f_1} > h = (1, +\infty)$, 由 $D_{f_1} > h \cup D_{f_2} > h = \mathbb{R}$ 可以得到 $(-\infty, 1] \subseteq D_{f_2} > h$, 所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^x + a \cdot 3^x + 1 > 0$ 对于 $x \leq 1$ 恒成立 (*). 设 $3^x = t$, 于是原恒等式变为 $at^2 + t + 1 > 0$, 其解集必须包括 $(0, 3]$. 当 $a \geq 0$ 时显然成立, 当 $a < 0$ 时, 将左式视为二次函数 $y = f(x)$, 其对应图象的对称轴 $x = d$ 满足 $d > 0$, 而 $f(0) = 1 > 0$, $(0, 3]$ 属于解集当且仅当 $f(3) \geq 0$, 解得 $-\frac{4}{9} < a < 0$, 综合可得 $a > -\frac{4}{9}$.

思路二: 从 (*) 处开始, 即 $-a < \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 对于 $x \leq 1$ 恒成立. 令 $T(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

由于 $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 所以当 $x \leq 1$ 时,

$$T(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

当且仅当 $x = 1$ 时等号成立. 因此 $T(x)_{\min} = \frac{4}{9}$, 从而 $-a < \frac{4}{9}$, 即 $a > -\frac{4}{9}$.

19. 4. 画图可知 $A \cap B$ 有两个元素, 其子集个数为 $2^2 = 4$.

20. (1) 取 $A = \{0\}$. 此时任取 $x, y \in A$, 都有 $x + y = 0$, 所以 $A^* = \{0\} = A$.

(2) 设集合 A 中的最大元为 p , 最小元为 q , 则 $p + p$ 一定是 A^* 中的最大元, $q + q$ 一定是 A^* 中的最小元. 由题意, $p = 5, q = 1$.

若 $A = \{1, 5\}, A^* = \{2, 6, 10\}$, 不符题意, 于是一定存在 $x \in A, 1 < x < 5$, 此时 $6 < 5 + x < 10$ 且 $5 + x \in A^*$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$, 于是分别验证三个集合: $\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}$, 均不满足题意. 因此不存在这样的集合 A .

21. (1) 因为 $0 = -0$, 所以 $f(0) = f(-0)$, 从而 $0 \in S_f$, 故 $S_f \neq \emptyset$.

(2) 若 f 是偶函数, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) = f(-x)$, 所以 $S_f = \mathbb{R}$.

反过来, 若 $S_f = \mathbb{R}$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) = f(-x)$, 这正是偶函数的定义.

因此 f 为偶函数当且仅当 $S_f = \mathbb{R}$.

(3) 若 $x_0 \in S_f$, 因为 f 为奇函数, 所以 $f(-x_0) = -f(x_0)$. 于是 $f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0)$, 可得 $f(x_0) = 0$.

反过来, 若 $f(x_0) = 0$, 则 $f(-x_0) = -f(x_0) = 0 = f(x_0)$, 所以 $x_0 \in S_f$.

因此 $x_0 \in S_f$ 当且仅当 x_0 是零点.

(4) 设 f 单调不减, 且 $x \in S_f$.

若 $x > 0$, 则 $-x < 0 < x$, 所以 $f(-x) \leq f(0) \leq f(x)$. 又因为 $f(-x) = f(x)$, 所以三者相等, 特别有 $f(x) = f(0)$.

若 $x < 0$, 则 $x < 0 < -x$, 所以 $f(x) \leq f(0) \leq f(-x)$. 同样利用 $f(x) = f(-x)$, 得到 $f(x) = f(0)$.

$x = 0$ 时结论显然成立. 因此命题成立.

(5) 若 $x \in S_f \cap S_g$, 则 $f(x) = f(-x)$ 且 $g(x) = g(-x)$. 两式相乘得 $h(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = h(-x)$, 所以 $x \in S_h$. 因此 $S_f \cap S_g \subseteq S_h$, 命题 b 正确.

命题 a 不成立. 取 $f(x) = x, g(x) = 0$, 则 $h(x) = 0$, 所以 $S_h = \mathbb{R}$, 但 $S_f = \{0\}$, 故 $S_h \not\subseteq S_f \cap S_g$.

命题 c 不成立. 取 $f(x) = g(x) = x$, 则 $h(x) = x^2$, 所以 $S_h = \mathbb{R}$, 而 $S_f = S_g = \{0\}$, 故 $S_h \not\subseteq S_f \cup S_g$.

命题 d 不成立. 仍取 $f(x) = g(x) = x$, 则 $S_f \cup S_g = \{0\}$, 而 $S_h = \mathbb{R}$; 为否定 d, 应取 $f(x) = x, g(x) = 1$, 此时 $S_f \cup S_g = \mathbb{R}$, 但 $S_h = S_f = \{0\}$.

因此四个命题中只有 b 正确.

22. (1) 所有可能的 Y 为 $(1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0)$.

(2) 对每个坐标 i , 因为 x_i, y_i, z_i 都只能取 0 或 1, 通过枚举可以验证, 三数 $|x_i - y_i|, |y_i - z_i|, |z_i - x_i|$ 中为 1 的个数只能是 0 或 2. 当三个数相同时, 三个差均为 0; 当其中一个与另外两个不同, 恰有两个差为 1. 因此对每个坐标都有 $|x_i - y_i| + |y_i - z_i| + |z_i - x_i| \equiv 0 \pmod{2}$.

对 $i = 1, 2, \dots, n$ 求和, 得到 $d(X, Y) + d(Y, Z) + d(Z, X) \equiv 0 \pmod{2}$. 所以该和为偶数.

或注意到 $|x_i - y_i|$ 在此种情况下等价于 $(x_i + y_i)$ 模 2, 于是

$$|x_i - y_i| + |y_i - z_i| + |z_i - x_i| \equiv 2(x_i + y_i + z_i) \equiv 0 \pmod{2}$$

23. (1) 不具有性质 P.

(2) $A = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

(3) 任取集合 A 中的两个不同元素 $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)$, 假设它们都满足 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = r$, 其中 $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

当 $r=0$ 时, A 中有 1 个元素 $(0,0,0,0)$, 不具有性质 P . 当 $r=4$ 时, A 中有 1 个元素 $(1,1,1,1)$, 不具有性质 P .

当 $r=1$ 时, A 中有 4 个元素 $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$, 取元素 $(1,0,0,0), (0,1,0,0)$ 发现不符题意, 故集合 A 不具有性质 P .

当 $r=2$ 时, A 中有 6 个元素 $(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)$, 取元素 $(1,0,1,0), (0,1,0,1)$ 发现不符题意, 故集合 A 不具有性质 P .

当 $r=3$ 时, A 中有 4 个元素 $(1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1)$, 取 $(1,1,1,0), (1,1,0,1)$ 发现不符题意, 故集合 A 不具有性质 P .

综上, A 不具有性质 P .

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.2 集合

B 组

1. 设甲: $A \subseteq B$; 乙: 对任意集合 C , 有 $(B \cap C) \cup A = B \cap (C \cup A)$, 则

- (A) 甲是乙的充分不必要条件 (B) 甲是乙的必要不充分条件
(C) 甲是乙的充要条件 (D) 甲是乙既不充分也不必要条件

2. 【2013 广东理 8】已知集合

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } x < y < z, y < z < x, z < x < y \text{ 三个条件中恰有一个成立}\}$$

若 $(x, y, z), (z, w, x) \in S$, 则下列命题正确的是

- (A) $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \notin S$ (B) $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \in S$
(C) $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \in S$ (D) $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \notin S$

3. 【2020 浙江 10】已知集合 $S, T \subseteq \mathbb{N}^*$, S, T 中至少有两个元素, 且满足: (1) 对任意 $x, y \in S$, 若 $x \neq y$, 则 $xy \in T$; (2) 对任意 $x, y \in T$, 若 $x < y$, 则 $\frac{y}{x} \in S$, 则下列命题正确的是

- (A) 若 $|S| = 4$, 则 $|S \cup T| = 7$ (B) 若 $|S| = 4$, 则 $|S \cup T| = 6$
(C) 若 $|S| = 3$, 则 $|S \cup T| = 4$ (D) 若 $|S| = 3$, 则 $|S \cup T| = 5$

附加练习

(1) 若 S 中恰有 2 个元素,

- i. 若 $1 \in S$, 证明: $S \cap T \neq \emptyset$, 并求 $S \cup T$ 的元素个数的所有可能值.
ii. 若 $1 \notin S$, 求 $S \cup T$ 的元素个数的所有可能值.

(2) 若 S 中恰有 3 个元素 $a, b, c (a < b < c)$.

- i. 若 $1 \in S$, 证明 a, b, c 成公比为 b 的等比数列;
ii. 若 $1 \notin S$, 证明 a, b, c 成公比为 a 的等比数列;
iii. 求 $S \cup T$ 的元素个数的所有可能值.

(3) 若 S 中恰有 4 个元素 $a, b, c, d (a < b < c < d)$, 由条件 (1) 知 $ab, ac, ad, bc, bd, cd \in S$, 由条件 (2) 知 $\frac{cd}{ab}, \frac{d}{a}, \frac{d}{b}, \frac{d}{c}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{b}{a} \in S$.

- i. 若 $1 \notin S$, 证明 a, b, c, d 成公比为 a 的等比数列;
ii. 是否可能有 $1 \in S$?
iii. 求 $S \cup T$ 的元素个数.

4. 【2010 福建文 15 改编】(多选) 在平面直角坐标系 xOy 中, 定义点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 的运算:

- (1) 加法运算: $A + B = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

(2) 数乘运算: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda A = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.

对于集合 $S \subseteq \mathbb{R}^2$, 若对任意 $P, Q \in S$ 与满足 $0 \leq \theta \leq 1$ 的 θ 都有 $\theta P + (1 - \theta)Q \in S$, 那么称集合 S 为凸集. 特别地, 定义空集 $\varnothing$ 是凸集. 则下列集合中是凸集的有

- (A) $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$ (B) $\{(x, y) \mid \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1\}$
 (C) $\{(x, y) \mid y \geq x - \frac{3}{x}, x > 0\}$ (D) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2|x| \leq 0\}$

5. 【2006 上海理 16 改编】(多选) 设空间中存在两个相交平面 α, β . 对于平面上任意一点 M , 定义 $d_M = (p, q)$, 其中 p, q 分别是 M 到平面 α, β 的距离. 现给定常数 $x, y > 0$, 对于空间中的某个平面 γ , 记集合 $A_\gamma = \{M \in \gamma \mid d_M = (x, y)\}$, A_γ 中可能有 (Δ) 个元素.

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 无穷多

6. 【2009 北京文 8 加强】【2024 “fiddie” 第二次模考 11】(多选) 在正方形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 中, 设 D 是正方形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 内部的点构成的集合, $P_0 \in D$, 则集合

$$S = \{P \mid P \in D, |PP_0| \leq |PA_i|, i = 1, 2, 3, 4\}$$

表示的平面区域可能是

- (A) 四边形区域 (B) 五边形区域 (C) 六边形区域 (D) 八边形区域

7. 【2004 北京理 8 改编】(多选) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P, \\ -x, & x \in M, \end{cases}$ 其中 P, M 为实数集 $\mathbb{R}$ 的两个非空子集. 设 $f(P) = \{y \mid y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$, 则下列叙述正确的是

- (A) 若 $P \cap M = \varnothing$, 则 $f(P) \cap f(M) = \varnothing$ (B) 若 $P \cap M \neq \varnothing$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \varnothing$
 (C) 若 $P \cup M = \mathbb{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbb{R}$ (D) 若 $P \cup M \neq \mathbb{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbb{R}$

8. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_5$ 是从小到大排序的正整数, 已知 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 且元素和是 10, $A \cup B$ 的元素和是 224, 求集合 A .

9. 【2015 浙江 6】设 A, B 是有限集, 定义 $d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B|$, 证明或反驳: 对任意有限集 A, B, C , $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

10. 【2019 上海春考 12】已知集合 $A = [t, t+1] \cup [t+4, t+9]$, $0 \notin A$, 且存在正数 λ , 使得对任意 $a \in A$ 都有 $\frac{\lambda}{a} \in A$, 求 t 的值.

11. 【2016 浙江学考 25】已知函数 $f(x) = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}$ (a, b 为实常数且 $a < b$). 设集合 $M = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$, $N = \{(x, y) \mid y = \lambda(x - \frac{a+b}{2})^2, \lambda \in \mathbb{R}\}$, 若 $M \cap N = \varnothing$, 求 λ 的取值范围.

12. 【2007 湖南文 10, 理 10】设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $S_1, S_2, \dots, S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足对任意的 $S_i = \{a_i, b_i\}$, $S_j = \{a_j, b_j\}$ ($i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$), 都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\}$, 求 k 的最大值.

13. 【2024 上海春考 12 改编】已知集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{2, 4, 8, 16\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ 满足 $\{a_i + a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{b_i + b_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$, 求集合 B .

14. 【2026 深圳一模 14】已知 $a_1, a_2, \dots, a_8 \in \mathbb{N}^*$. 记

$$S = \{a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_7} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_7 \leq 8\} \quad \text{其中 } i_1, i_2, \dots, i_7 \in \mathbb{N}^*$$

若 $S = \{82, 83, 84, 85, 86, 87, 89\}$, 求这 8 个正整数中的最大数与最小数的和.

15. 【2010 湖南文 15】规定 $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ 的子集 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\}$ 为 E 的第 k 个子集, 其中 $k = 2^{i_1-1} + 2^{i_2-1} + 2^{i_3-1} + \dots + 2^{i_n-1}$. $\{a_1, a_3\}$ 是 E 的第几个子集? E 的第 211 个子集是什么?

16. 设集合 $X = \{1, 2, \dots, 2n+1\}, n \in \mathbb{N}^*, A \subseteq X$ 且满足: $\forall x, y \in A, x+y \notin A$, 求 $|A|$ 的最大值. (用含 n 的式子表示)

17. 【2011 广东 8 改编】设 S, T 是整数集 $\mathbb{Z}$ 的非空子集, 如果 $\forall a, b \in S$, 有 $ab \in S$, 那么称 S 关于乘法封闭. 设 T, V 是 $\mathbb{Z}$ 的两个不相交的非空子集, 满足 $T \cup V = \mathbb{Z}$, 且 $\forall a, b, c \in T$ 有 $abc \in T, \forall x, y, z \in V$ 有 $xyz \in V$. 证明: T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的.

18. 【2016 清华大学自主招生 30 改编】有 n 项的数列 $\{a_n\}$ 满足

(1) 对任意的 $i, j (1 \leq i < j \leq n), a_i < a_j$;

(2) 对任意的 $i, j, k (1 \leq i < j < k \leq n), a_i + a_j, a_j + a_k, a_k + a_i$ 三者中至少有一个是 $\{a_n\}$ 中的项.

求 n 的最大值.

19. 【2026 海淀期末 21 节选】已知有穷数列 $T: t_1, t_2, \dots, t_m (m \geq 2)$, 用 $\varphi(T)$ 表示数列 T 中所有的项构成的集合, 定义变换 F, F 将数列 T 变换成数列 $F(T): |t_1 - t_2|, |t_2 - t_3|, \dots, |t_{n-1} - t_n|$. 对有穷数列 $A_1: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$, 令数列 $A_{k+1} = F(A_k) (k = 1, 2, \dots, n-1)$, 若

$$\varphi(A_1) \cup \varphi(A_2) \cup \dots \cup \varphi(A_n) = \left\{1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

则称 A_1 为 n 阶完美数列.

(1) 写出所有的 2 阶完美数列;

(2) 若数列 A_1 为 3 阶完美数列, 求集合 $\varphi(A_1) \cap \{1, 2, 3\}$ 的元素个数.

20. 【2024 海淀期末 21 (2)】给定奇数 $m (m \geq 3)$, 设 A 是由 $m \times m$ 个实数组成的 m 行 m 列的数表, 且 A 中所有数不全相同, 记 A 中第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij} \in \{-1, 1\}, r(i)$ 为 A 的第 i 行各数之和, $c(j)$ 为 A 的第 j 列各数之和, 设集合

$$H = \{(i, j) \mid a_{ij} \cdot r(i) < 0 \text{ 或 } a_{ij} \cdot c(j) < 0, i, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$$

记 $H(A)$ 为集合 H 所含元素的个数. 若 $r(1), r(2), \dots, r(m)$ 中恰有 s 个正数, $c(1), c(2), \dots, c(m)$ 中恰有 t 个正数, 求证: $H(A) \geq mt + ms - 2ts$.

21. 【2026 济南二模 19】已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 满足: 对任意 $a_i, a_j \in A$, 存在 $a_m \in A$ 使得 $|a_i - a_j| = |a_m - a_1|$.

(1) 若 $A = \{1, 2, x\}, x \in \mathbb{N}^*$, 求 x ;

(2) 证明: 对任意 $a_i, a_j \in A$, 都有 $(a_i - a_1)(a_j - a_1) \geq 0$;

(3) 若 $a_1 = a (a \neq 0), a_2 = 2a$, 且 $a_2 < a_3 < \dots < a_n$, 求数集 A 中所有元素的和. (用含 a, n 的式子表示)

22. 【2025 北京第一次学考 25】已知正整数 $n \geq 4$, 集合 $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$. 若存在 M 的非空子集 A , 满足 $2 \leq |A| \leq n-2$ 且 A 中所有元素之积与 $\complement_M A$ 中所有元素之和相等, 则称 M 为“积和集合”.

(1) 若 $M = \{-1, 2, 3, 7\}$, 判断 M 是否为“积和集合”; (结论无需证明)

(2) 若 $M = \{1, 2, 4, a\}$ 是“积和集合”, 写出 a 的所有可能取值;

(3) 若 $M = \{-2, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$, 判断 M 是否为“积和集合”, 并说明理由.

23. 【2012 上海理 23】已知数集 $X = \{-1, x_1, x_2, \dots, x_n\} (0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, n \geq 2)$, 向量集 $Y = \{a \mid a = (s, t), s, t \in X\}$, 若对任意 $a_1 \in Y$, 存在 $a_2 \in Y$, 使得 $a_1 \cdot a_2 = 0$, 则称 X 具有性质 P .

(1) 若 $x > 2$, 且 $\{-1, 1, 2, x\}$ 具有性质 P , 求 x 的值;

(2) 若 X 具有性质 P , 求证: $1 \in X$, 且当 $x_n > 1$ 时, $x_1 = 1$;

(3) 若 X 具有性质 P , 且 $x_1 = 1, x_2 = q$ (q 为常数), 求有穷数列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的通项公式.

24. 【2009 北京理 20】已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P : 对任意 i, j ($1 \leq i \leq j \leq n$), $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A .

(1) 分别判断数集 $\{1, 3, 4\}$ 与 $\{1, 2, 3, 6\}$ 是否具有性质 P ;

(2) 证明: $a_1 = 1$, 且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$;

(3) 证明: 当 $n = 5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.

25. 【2013 江苏 23】设数列 $\{a_n\}$:

1, -2, -2, 3, 3, 3, -4, -4, -4, -4, $\dots, \overbrace{(-1)^{k-1}k, \dots, (-1)^{k-1}k}^{k \text{ 个}}, \dots$
 即当 $\frac{(k-1)k}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2} (k \in \mathbb{N}^*)$ 时, $a_n = (-1)^{k-1}k$. 记 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n (n \in \mathbb{N}^*)$.
 对于 $l \in \mathbb{N}^*$, 定义集合

$$P_l = \{n \mid S_n \text{ 是 } a_n \text{ 的整数倍}, 1 \leq n \leq l\}$$

求 $|P_{11}|, |P_{2000}|$.

26. 【2003 全国卷 22】设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^t + 2^s \mid s, t \in \mathbb{Z}, 0 \leq s < t\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大、左小右大的原则写成如下的三角形数表:

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 5 & & 6 & \\ & 9 & & 10 & & 12 \\ \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

(1) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数;

(2) 求 a_{100} ;

(3) 设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t, \text{ 且 } r, s, t \in \mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 已知 $b_k = 1160$, 求 k .

27. 【2026 北京第一次学考 25】已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, A 中恰有 s 个元素是奇数, 若 $\frac{s}{2}$ 是偶数, 则称 A 为“分偶集合”.

(1) 判断 $\{-1, 2, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 6, 7, 9, 16\}$ 是否为“分偶集合”; (结论无需证明);

(2) 若对任意整数 $a, \{2, 3, 5, 6, 7, a^2, (a+b)^2\}$ 均为分偶集合, 写出 b 的三个取值;

(3) 设 $n=30, A \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid -29 \leq x \leq 30\}$, 若 A 中任意两个元素之和不等于 1, 且 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{30} a_i$ 是偶数, 判断 A 是否可能为“分偶集合”, 并说明理由.

28. 【2016 江苏 20】 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 有限集 $T \in \mathbb{N}^*$. 若 $T = \emptyset$, 定义 $S_T = 0$; 若 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, 定义 $S_T = a_{t_1} + a_{t_2} + \dots + a_{t_k}$. 当 $T = \{2, 4\}$ 时, $S_T = 30$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求证: 对任意正整数 k , 若 $T \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, 则 $S_T < a_{k+1}$;

(3) 设 $C \subseteq \mathbb{N}^*, D \subseteq \mathbb{N}^*, S_C \geq S_D$, 求证: $S_C + S_{C \cap D} \geq 2S_D$.

29. 对集合 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 的每一个子集, 定义其“交替和”如下: 按照递减的次序重新排列该子集, 然后从最大数开始交替地减、加后续的数. 例如集合 $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ 的“交替和”是 $9 - 6 + 4 - 2 + 1 = 6$, 集合 $\{5\}$ 的“交替和”是 5, 规定空集的“交替和”为 0. 记 A 所有子集“交替和”的和为 S_n , 求

$$(a). S_3 \quad (b). S_n \quad (c). \sum_{k=1}^n S_k$$

30. 【2026 “fiddie” 模拟考 19】 设集合 $S = \{2^t + 2^s \mid 0 \leq s < t \text{ 且 } s, t \in \mathbb{Z}\}$. 例如 3, 6, 9, 12, 18, 24 属于 S , 若 $T \subseteq S$, 且 T 的所有元素从小到大排列后成等差数列, 则称 T 是 S 的一个等差子集.

(1) 是否存在奇数 $x, y, z \in S (x < y < z)$, 使得 $\{x, y, z\}$ 是 S 的等差子集? 并说明理由;

(2) 证明: S 的含 4 个元素的等差子集有无穷多个;

(3) 证明: S 不存在含 5 个元素的等差子集.

31. 【2025 北京 21】 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$, 从 M 中选出 n 个不同的元素组成序列: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 若该序列的相邻项 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) (1 \leq i \leq n-1)$ 满足

$$\begin{cases} |x_{i+1} - x_i| = 3 \\ |y_{i+1} - y_i| = 4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} |x_{i+1} - x_i| = 4 \\ |y_{i+1} - y_i| = 3 \end{cases}$$

则将该列称为 K 列.

(1) (A) 对于第 1 项为 (3, 3) 的 K 列, 写出它的第 2 项;

(2) (B) 设 Γ 为 K 列, 且 Γ 中的项 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 满足: 当 i 为奇数时, $x_i \in \{1, 2, 7, 8\}$; i 为偶数时, $x_i \in \{3, 4, 5, 6\}$, 判断 (3, 2), (4, 4) 能否同时为 Γ 中的项, 并说明理由.

(3) (C) 证明: 由 M 中全部元素组成的序列不是 K 列.

32. 【2010 北京理 20】 集合 $S_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, n\} (n \geq 2)$, 对于 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$, 定义 A 与 B 的差为 $A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|)$; A 与 B 之间的距离为 $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$.

- (1) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, 有 $A - B \in S_n$, 且 $d(A - C, B - C) = d(A, B)$;
- (2) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, $d(A, B), d(A, C), d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数;
- (3) 设 $P \subseteq S_n$, P 中有 m ($m \geq 2$) 个元素, 记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\bar{d}(P)$. 证明:

$$\bar{d}(P) \leq \frac{mn}{2(m-1)}.$$

33. 【2018 北京理 20】 设 n 为正整数, 集合

$$A = \{\alpha \mid \alpha = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n\}$$

对于集合 A 中的任意元素 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 记

$$M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[(x_1 + y_1 - |x_1 - y_1|) + (x_2 + y_2 - |x_2 - y_2|) + \dots + (x_n + y_n - |x_n - y_n|)]$$

- (1) 当 $n = 3$ 时, 若 $\alpha = (1, 1, 0)$, $\beta = (0, 1, 1)$, 求 $M(\alpha, \alpha)$ 和 $M(\alpha, \beta)$ 的值;
- (2) 当 $n = 4$ 时, 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意元素 α, β , 当 α, β 相同时, $M(\alpha, \beta)$ 是奇数; 当 α, β 不同时, $M(\alpha, \beta)$ 是偶数. 求集合 B 中元素个数的最大值;
- (3) 给定不小于 2 的 n , 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意两个不同的元素 α, β , $M(\alpha, \beta) = 0$. 写出一个集合 B , 使其元素个数最多, 并说明理由.

1. **C.** 由分配律, 有 $B \cap (C \cup A) = (B \cap C) \cup (B \cap A)$. 充分性满足, 由 $A \subseteq B$ 有 $(B \cap C) \cup (B \cap A) = (B \cap C) \cup A$, 所以命题乙成立. 必要性满足, 可知 $A \subseteq (B \cap C) \cup A = B \cap (C \cup A) \subseteq B$.
2. **B.** 方法一: 令 $w=1, x=2, y=3, z=4$, 则 $(2, 3, 4), (4, 1, 2) \in S$. 可以判断 $(y, z, w) = (3, 4, 1) \in S$, $(x, y, w) = (2, 3, 1) \in S$. 故选 B.

方法二: 由条件, ① $x < y < z$, ② $y < z < x$, ③ $z < x < y$ 必有一个成立; ④ $z < w < x$, ⑤ $w < x < z$, ⑥ $x < z < w$ 中必有一个成立.

经过简单分析可知只能有下面四种情况:

(1) ①⑤同时成立; (2) ①⑥同时成立; (3) ②④同时成立; (4) ③④同时成立. 这四种情况都能推出 B 选项的结果.

证明: 因为 $(x, y, z) \in S$, 所以① $x < y < z$, ② $y < z < x$, ③ $z < x < y$ 必有一个成立; 因为 $(z, w, x) \in S$, 所以④ $z < w < x$, ⑤ $w < x < z$, ⑥ $x < z < w$ 必有一个成立.

(1) 若①成立, 则⑤或⑥成立, 从而 $w < x < y < z$ 或 $x < y < z < w$.

当 $w < x < y < z$ 时, 因为 $y < z < w$, $z < w < y$, $w < y < z$ 中恰好只有 $w < y < z$ 成立, 所以 $(y, z, w) \in S$. 因为 $x < y < w$, $y < w < x$, $w < x < y$ 中恰好只有 $w < x < y$ 成立, 所以 $(x, y, w) \in S$.

当 $x < y < z < w$ 时, 因为 $y < z < w$, $z < w < y$, $w < y < z$ 中恰好只有 $y < z < w$ 成立, 所以 $(y, z, w) \in S$. 因为 $x < y < w$, $y < w < x$, $w < x < y$ 中恰好只有 $x < y < w$ 成立, 所以 $(x, y, w) \in S$.

(2) 若②成立, 则④成立, 从而 $y < z < w < x$. 因为 $y < z < w$, $z < w < y$, $w < y < z$ 中恰好只有 $y < z < w$ 成立, 所以 $(y, z, w) \in S$. 因为 $x < y < w$, $y < w < x$, $w < x < y$ 中恰好只有 $y < w < x$ 成立, 所以 $(x, y, w) \in S$.

(3) 若③成立, 则④成立, 从而 $z < w < x < y$. 因为 $y < z < w$, $z < w < y$, $w < y < z$ 中恰好只有 $z < w < y$ 成立, 所以 $(y, z, w) \in S$. 因为 $x < y < w$, $y < w < x$, $w < x < y$ 中恰好只有 $w < x < y$ 成立, 所以 $(x, y, w) \in S$.

综上所述, $(y, z, w) \in S$ 且 $(x, y, w) \in S$.

3. 附加练习解答如下:

(1.1) 设 $S = \{1, a\} (a > 1)$, 则 $a \in T, S \cap T \neq \emptyset$, 若 $|T| = 3$, 设 $T = \{p, q, r\} (p < q < r)$, 则 $\frac{r}{p}, \frac{r}{q} \in S$, 这两个数不相同且不等于 1, 而 S 中只有 $a \neq 1$, 矛盾, 当 $|T| > 3$ 时显然也不成立, 故 $|T| = 2$, 可得 $T = \{a, a^2\}$ 或 $T = \{1, a\}$, 于是 $|S \cup T| = 2$ 或 3.

(1.2) 设 $S = \{a, b\} (1 < a < b)$, 则 $ab \in T$. 若 $|T| = 2$, 设 $T = \{ab, x\}$, 可得 $x = a$ 或 b 或 a^2b 或 ab^2 , 于是 $|S \cup T| = 3$ 或 4.

若 $|T| = 3$, 设 $T = \{x, y, z\}, ab \in T$, 可知 $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{z}{y} \in S$, 而 $\frac{y}{x} < \frac{z}{x}, \frac{z}{y} < \frac{z}{x}$, 则一定有 $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$, 故 x, y, z 成等比数列, 公比是 a . 由于 $\frac{z}{x} = a^2 \in S$, 故 $b = a^2, S = \{a, a^2\}$. 由上述讨论可知 $T = \{a, a^2, a^3\}$ 或 $\{a^2, a^3, a^4\}$ 或 $\{a^3, a^4, a^5\}$, 故 $|S \cup T| = 3$ 或 4 或 5.

综上, $|S \cup T| = 3$ 或 4 或 5.

(2.1) 已知 $a=1$, 设 $S=\{1,b,c\}$, 可知 $b,c,bc \in T$, 又因为 $\frac{c}{b} \in S$, 且 $\frac{c}{b} \neq c, \frac{c}{b} \neq 1$, 于是 $\frac{c}{b}=b$, 可得 $c=b^2$, 于是 a,b,c 成公比为 b 的等比数列。

(2.2) 设 $S=\{a,b,c\}(1 < a < b < c)$, 可知 $ab < ac < bc \in T$, 于是 $\frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{b}{a} \in S$, 由于 $\frac{b}{a} < b < c$, 故 $\frac{b}{a}=a$, 可得 $b=a^2$ 。

已知 $\frac{c}{a} \neq c$, 假设 $\frac{c}{a}=a$, 则 $c=a^2=b$, 矛盾, 故 $\frac{c}{a}=b$, 可得 $c=a^3$, 于是 a,b,c 成公比为 a 的等比数列。

(2.3) 若 $1 \in S$, 由问题 (2.2) 的结论可设 $S=\{1,b,b^2\}$, 此时 $b,b^2,b^3 \in T$ 。

若存在 $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2,3\}$ 满足 $b^k \in T$, 则有 $\frac{b^k}{b^3}, \frac{b^k}{b^2}, \frac{b^k}{b} \in S$, 而 $\frac{b^k}{b} > b^2$, 矛盾, 故 $T=\{b,b^2,b^3\}$, 该情况下 $|S \cup T|=4$

若 $1 \notin S$, 由问题 (2.3) 的结论可设 $S=\{a,a^2,a^3\}(a > 1)$, 则 $a^3,a^4,a^5 \in T$, 讨论得 T 可为 $\{a^3,a^4,a^5\}$ 或 $\{a^3,a^4,a^5,a^6\}$ 或 $\{a^2,a^3,a^4,a^5\}$, 在该情况下, $|S \cup T|=5$ 或 6 。

综上, $|S \cup T|=4$ 或 5 或 6 。

(3.1) 设 $S=\{a,b,c,d\}(1 < a < b < c < d)$ 。由题设: $\frac{cd}{ab}, \frac{d}{b}, \frac{d}{c}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{b}{a} \in S$, 由 $\frac{b}{a} < \frac{c}{a} < \frac{d}{a}$ 与 $a > 1$ 可得 $\frac{b}{a} < b, c, d$, 因此 $\frac{b}{a}=a$, 于是 $b=a^2$ 。

因为 $\frac{c}{b} < \frac{c}{a} < \frac{d}{a} < \frac{cd}{ab}$ 且这些元素都属于 S , 所以 $\frac{c}{b}=a$, 可得 $c=a^3$, 此时有 $d, \frac{d}{a}, \frac{d}{a^2}, \frac{d}{a^3}, a, a^2 \in S=\{a, a^2, a^3, d\}$, 可得 $d=a^4$, 于是 a, b, c, d 成公比为 a 的等比数列。

(3.2) 不可能。假设 $S=\{1,b,c,d\}$, 则 $\frac{cd}{b}, d, \frac{d}{b}, \frac{d}{c}, \frac{c}{b}, c, b \in S$, 而 $\frac{cd}{b} > d$, 矛盾。

(3.3) 由问题 (3.1) (3.2) 的结论, 可知 $S=\{a, a^2, a^3, a^4\}$, 此时 $a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 \in T$, T 中也不可能存在其他元素 (已有 5 个元素, 彼此作商至少得到 4 个结果), 故 $T=\{a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$, 于是 $|S \cap T|=7$

4. **AB.** 原题意指: 若对 S 中的任意两个不同的点, 其连线段上的所有点均属于集合 S , 则 S 是凸集, 依次画出四个选项表示的区域, 据该定义判断即可。
5. **ACD.** 到平面 α 的距离为 $|x|$ 的点构成平行于 α 的两个平面, 它们位于平面 α 的两侧, 同理, 到平面 β 的距离为 $|y|$ 的点构成平行于 β 的两个平面, 它们位于平面 β 的两侧, 同时满足上述两个条件的点构成这两组平面的四条平行交线, 记为集合 L , 可知 $A_\gamma = L \cap \gamma$, 其元素个数可能为 0 (与这四条直线无交点), 4 (与这四条直线各有一个交点) 或无穷多个 (包含这四条直线中的至少一条)。
6. **ABC.** 对于条件 $|PP_0| \leq |PA_i|$, 当 $|PP_0| = |PA_i|$ 时, 满足条件的点构成线段 P_0A_i 的垂直平分线, 它将平面划分为两部分, 满足 $|PP_0| \leq |PA_i|$ 的所有点构成靠近 P_0 侧的这一部分, 记为 S_i , 要判断 $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ 构成区域的形状, 只需依次作出 $P_0A_1, P_0A_2, P_0A_3, P_0A_4$ 的垂直平分线, 它们与正方形边界围成的图形就是我们要求的区域, 通过作图反复尝试, 可知该区域可能为四边形区域, 五边形区域, 六边形区域。
7. **A 错.** 例如 $P=\{1\}, M=\{-1\}$ 时, $P \cap M = \emptyset$, 但 $f(P) = f(M) = \{1\}$. 由于 f 是函数, 若 $P \cap M \neq \emptyset$, 交集集中的元素只能是 0; 于是 $0 \in (f(P) \cap f(M))$, **B 正确.** **C 错,** 例如 $P=(0, +\infty), M=(-\infty, 0]$ 时虽有 $P \cup M = \mathbb{R}$, 但 $f(P) \cup f(M) = [0, +\infty)$. **D 正确:** 若 $P \cup M \neq \mathbb{R}$, 取 $x \notin$

$P \cup M$. 若 x 在像并集中, 则必须有 $-x \in M$; 若 $-x$ 不在像并集中, 则矛盾, 若 $-x \in P$, 再考察 $-x$ 可知函数定义要求相应的另一侧也出现, 最终仍与 $x \notin P \cup M$ 矛盾. 因此选 B、D.

8. $A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$. 由 $a_1 \leq a_1^2 < a_2^2, a_1 < a_2$ 且 $a_1 \in A \cap B$ 可知, $a_1 = a_1^2$, 于是 $a_1 = 1, a_4 = 9$. $A \cup B$ 的元素和为 224, $A \cap B$ 的元素和为 10, 故 $a_1, a_2, \dots, a_5, a_1^2, a_2^2, \dots, a_5^2$ 这 10 个元素的和为 234, 于是 $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 142$. 下确定 a_5 的值, 可知 $10 \leq a_5 \leq 11$, 当 $a_5 = 11$ 时, $a_2 + a_3 + a_2^2 + a_3^2 = 10$, 不存在满足条件的 a_2, a_3 , 于是 $a_5 = 10$, 有 $a_2 + a_3 + a_2^2 + a_3^2 = 32$, 同上进行讨论, 可得 $a_2 = 3, a_3 = 4$. 故 $A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$.

9. 对任意有限集 E , 记 $\mathbf{1}_E(x)$ 为其示性函数. 对任意元素 x , 有 $\mathbf{1}_{A \triangle B}(x) = |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x)|$. 可知

$$d(A, B) = \sum_x |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x)|$$

由三角不等式: $|\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_C(x)| \leq |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x)| + |\mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_C(x)|$. 对所有可能的 x 求和, 得到 $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. 所以题述命题成立.

10. **1 或 -3**. 对 A 中的每个元素 a 变换为 λ/a 后, 新元素仍形成两段区间, 并且每个新区间内的元素由同一区间元素变换得到, 记区间 A, B 变换得到区间 A^*, B^* . 若 $A = A^*, B = B^*$, 则 $\lambda/(t+1) = t, \lambda(t+4) = t+9$, 解得 $t = -3$, 此时 $A = [-3, -2], B = [1, 6]$. 若 $A = B^*, B = A^*$, 则 $t = \lambda/(t+9), t+1 = \lambda/(t+4)$, 解得 $t = 1$, 此时 $A = [1, 2], B = [5, 10]$.

11. $0 \leq \lambda < 64/(b-a)^3$. 因为 $M \cap N = \emptyset$, 所以函数 $y = f(x)$ 与 $y = \lambda \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ 的图象无公共点, 即方程

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \lambda \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

无实数解, 两边同乘 $(x-a)(x-b)$, 即方程

$$a-b = \lambda(x-a)(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (x \neq a \text{ 且 } x \neq b) \quad (*)$$

无实数解.

(i) 当 $\lambda = 0$ 时 $(*)$ 无解, 显然符合题意.

(ii) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 令 $y = (x-a)(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$, 变形得

$$y = \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4} \right] \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

设 $t = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ 得 $y = t \left[t - \frac{(a-b)^2}{4} \right] = \left[t - \frac{(a-b)^2}{8} \right]^2 - \frac{(a-b)^4}{64}$.

于是当 $t = \frac{(a-b)^2}{8}$, 即 $x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(a-b)$ 时, 有 $y_{\min} = -\frac{(a-b)^4}{64}$.

要使 $(*)$ 无实数解, 只要 $\frac{a-b}{\lambda} < -\frac{(a-b)^4}{64}$, 解得 $0 < \lambda < \frac{64}{(b-a)^3}$.

综上可得 $0 \leq \lambda < \frac{64}{(b-a)^3}$.

12. **11**. 不妨设 $a_i < b_i$, 题目条件转化为: 对任意 $S_i, S_j (i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j)$ 都有 $\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_j}{b_j}$. 相当于求由 $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 2/3, 2/5, 3/4, 3/5, 4/5, 5/6$ 共 11 个.

13. $\{2, 4, 6, 8\}$ 或 $\{-1, 7, 11, 13\}$. 计算 A 中两两元素之和, 其构成集合 $\{6, 10, 12, 18, 20, 24\}$.

对于集合 B , 不妨设 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$, 可知

$$b_1 + b_2 < b_1 + b_3 < b_2 + b_3 < b_2 + b_4 < b_3 + b_4$$

其中 $b_1 + b_3 < b_1 + b_4 < b_2 + b_4$, 现讨论 $b_1 + b_4$ 与 $b_2 + b_3$ 的大小关系.

若 $b_1 + b_4 < b_2 + b_3$, 则唯一确定了所有两两元素之和的值, 在此条件下求得 $B = \{-1, 7, 11, 13\}$

若 $b_1 + b_4 > b_2 + b_3$, 同理可得 $B = \{2, 4, 6, 8\}$

14. **23.** 满足 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_7 \leq 8$ 的正整数组 $(i_1, \cdots, i_7)$ 最多只有 8 组, 即从 $1, 2, \cdots, 8$ 中去掉某一个数后从小到大排列得到的数组. 而 S 是 7 元集, 故在所有 $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_7}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_7 \leq 8$) 中, 恰有两个数相同.

设 $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_8$. 改写 S 为

$$S = \{n - a_i \mid 1 \leq i \leq 8\}.$$

不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_7$, 且 $a_8 \in \{a_1, \cdots, a_7\}$, 则 S 中元素从小到大排列后是

$$n - a_7 < n - a_6 < \cdots < n - a_1,$$

因此, $n - a_7 = 82, n - a_6 = 83, \cdots, n - a_2 = 87, n - a_1 = 89$.

设 $a_1 = a$, 则 $a_2 = a + 2, a_3 = a + 3, \cdots, a_7 = a + 7$. 于是 $n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_7) + a_8 = 7a + 27 + a_8$. 所以 $n - a_7 = 6a + 20 + a_8 = 82$, 得 $6a + a_8 = 62$.

由 $a_1 \leq a_8 \leq a_7$, 即 $a \leq a_8 \leq a + 7$, 得 $7a \leq 62$ 且 $7a + 7 \geq 62$. 又因为 $a \in \mathbb{N}^*$, 所以 $a = 8$, 所以 $a_8 = 14$.

因此 $a_1, \cdots, a_8$ 是 8, 10, 11, 12, 13, 14, 14, 15, 其中的最小数是 8, 最大数是 $a_7 = a + 7 = 15$, 最小数与最大数之和是 23.

15. **5.** $\{a_1, a_2, a_5, a_7, a_8\}$. $\{a_1, a_3\}$ 的编号为 $2^{1-1} + 2^{3-1} = 1 + 4 = 5$. 又 $211 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0$. 可知第 211 个子集为 $\{a_1, a_2, a_5, a_7, a_8\}$.

16. **$n+1$.** 方法一: 构造集合 $A = \{n+1, n+2, \cdots, 2n+1\}$, 这是符合题意的, 因为其中任意两个元素之和都大于 $2n+1$. 此时 $|A| = n+1$.

下面证明任何满足 $|A| \geq n+2$ 的集合 A 都不符合题意. 可以证明, 若任意满足 $|A| = k$ 的集合 A 都不符合题意, 则任意满足 $|A| > k$ 的集合 A 也不符合题意. 下证明, 任何满足 $|A| = n+2$ 的集合 A 都不符合题意.

使用数学归纳法, 当 $n=1$ 时, 全集为 $\{1, 2, 3\}$. 此时 $|A| = 3$, 只能有 $A = \{1, 2, 3\}$. 由于 $1+2=3$, 所以 A 不符合题意.

假设当 $n=k$ 时, 任意满足 $|A| = k+2$ 的集合 $A \subseteq \{1, 2, \cdots, 2k+1\}$ 都不符合题意.

当 $n=k+1$ 时, 设集合 $A \subseteq \{1, 2, \cdots, 2k+3\}$ 满足 $|A| = k+3$ 且符合题意, 此时集合 A 中最多有 $k-1$ 个元素属于 $\{1, 2, \cdots, 2k+1\}$, 故 $2k+2, 2k+3 \in A$. 将集合 $\{1, 2, \cdots, 2k+2\}$ 分成 $k+1$ 对:

$$\{1, 2k+2\}, \{2, 2k+1\}, \cdots, \{k+1, k+2\}.$$

每一对中的两个元素之和均为 $2k+3$, 它们不能同时出现在集合 A 中, 故集合 A 中的元素最多有 $(k+1)+1=k+2$ 个, 与 $|A|=k+3$ 矛盾. 故对于任意满足 $|A|=k+3$ 的集合 $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k+3\}$ 都不符合题意.

根据数学归纳法, 原命题得证.

法二: 构造集合 $A = \{1, 3, 5, \dots, 2n+1\}$. 这是符合题意的, 因为其中任意两个元素之和为偶数, 一定不属于 A . 此时 $|A|=n+1$.

下面证明任意符合题意的集合都满足 $|A| \leq n+1$.

设 A 中共有 $k(k \leq n+1)$ 个奇数 $a_1 > a_2 > \dots > a_k$, 则偶数 $a_1 - a_2 < a_1 - a_3 < \dots < a_1 - a_k$, 这 $(k-1)$ 个偶数互不相同且一定属于 A , 假设其中一个偶数 $a_1 - a_i (2 \leq i \leq k) \in A$, 则 $a_i + (a_1 - a_i) = a_1 \in A$, 这与题设矛盾, 故这 k 个偶数均不属于 A , 于是 $|A| \leq k + [n - (k-1)] = n+1$.

17.

18. 讨论 $\{a_n\}$ 中的正数和负数的个数.

由条件 (1), $\{a_n\}$ 各项互不相同. 如果 $\{a_n\}$ 中至少有 8 项, 那么 $\{a_n\}$ 中要么至少有 4 个正数, 要么至少有 4 个负数.

不妨设 $\{a_n\}$ 中至少有 4 个正数. 记 $\{a_n\}$ 中的 4 个最大的正数从小到大排列为 $0 < x < y < z < w$.

由条件 (2), $y+z, z+w, w+y$ 中至少有一个是 $\{a_n\}$ 中的项. 但是 $z+w, w+y$ 都大于 w , 所以只能有 $y+z$ 是 $\{a_n\}$ 中的项, 而且 $y+z=w$.

再由条件 (2), $x+z, z+w, w+x$ 中至少有一个是 $\{a_n\}$ 中的项. 但是 $z+w, w+x$ 都大于 w , 所以只能有 $x+z$ 是 $\{a_n\}$ 中的项. 但是 $z < x+z < y+z=w$. 根据前面的假设, x, y, z, w 是 $\{a_n\}$ 中最大的四项, 从而 $\{a_n\}$ 中没有数位于区间 (z, w) 之间. 所以 $x+z$ 不可能是 $\{a_n\}$ 中的项, 矛盾.

综上, $\{a_n\}$ 不可能有 8 项.

另外可以举出含有 7 项的满足两个条件的数列: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. 故 n 的最大值为 7.

19.

20.

21. (1) 由题设, $A = \{1, 2, x\}$ 的任意两元素之差的绝对值都必须等于某个 $|a_m - a_1|$, 设前者构成的集合为 $B = \{1, |x-1|, |x-2|\}$, 后者构成的集合为 C . 必须有 $B \subseteq C$.

如果 $x_1 = 1$, 那么 $C = \{0, 1, |x-1|\}$, 可得 $x = 3$;

如果 $x_1 = 2$, 那么 $C = \{0, 1, |x-2|\}$, 没有满足条件的 x ;

如果 $x_1 = x$, 那么 $C = \{0, |x-1|, |x-2|\}$, 可得 $x = 3$.

综上, $x = 3$.

(2) 用反证法, 假设存在 $a_i, a_j \in A$ 使得 $(a_i - a_1)(a_j - a_1) < 0$. 不妨设 $a_i < a_1 < a_j$, 记 A 中的最小元为 u , 最大元为 v , 一定有 $u \leq a_i < a_j \leq v$.

对任意 $a_m \in A$,

$$|a_m - a_1| \leq \max\{|a_u - a_1|, |a_v - a_1|\} < |(u - a_1) - (v - a_1)| = |u - v|$$

于是对任意 $a_m \in A, |a_u - a_v| \neq |a_m - a_1|$, 矛盾, 因此 $(a_i - a_1)(a_j - a_1) \geq 0$.

(3) 当 $a > 0$ 时, 有 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$. 首先确定 $a_3 - a_2$ 的值, 可知

$$a_3 - a_2 < a_3 - a_1 < a_4 - a_1 < \cdots < a_n - a_1$$

这里的 $n-1$ 个元素互不相同, 并且它们均属于集合 $\{|a_2 - a_1|, |a_3 - a_1|, \dots, |a_n - a_1|\}$, 于是它们按从小到大的顺序对应相等, 即有 $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$. 再确定 $a_4 - a_3$ 的值, 可知

$$a_4 - a_3 < a_4 - a_2 < a_4 - a_1 < a_5 - a_1 < \cdots < a_n - a_1$$

这里的 $n-1$ 个元素互不相同, 并且它们均属于集合 $\{|a_2 - a_1|, |a_3 - a_1|, \dots, |a_n - a_1|\}$, 同上可得 $a_4 - a_3 = a_2 - a_1$, 依次类推, 可以证明对任意 $2 \leq i \leq n, a_i - a_{i-1} = a_2 - a_1$, 于是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 成等差数列, 其通项公式为 $a_n = na$, 元素和为 $\frac{an(n+1)}{2}$

当 $a < 0$ 时, 有 $a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_1$, 同理可证 $a_2, a_3, \dots, a_n, a_1$ 成等差数列, 其首项为 $a_2 = 2a$, 末项为 $a_1 = a$, 元素和为 $\frac{3an}{2}$.

注: 如果考虑数学归纳法, 则只能用于证明 $a > 0$ 的情况。

用数学归纳法证明命题: 当 $a > 0$ 时, a_n 的通项公式为 $a_n = na$. 当 $n=2$ 时, $a_1 = a, a_2 = 2a$, 命题成立. 假设当 $n=k$ 时, $a_k = ka$, 当 $n=k+1$ 时, 集合 $A = \{a, 2a, \dots, ka, a_{k+1}\}$, 下证明 $a_{k+1} = (k+1)a$. 当且仅当 $a_{k+1} - a_k = a = a_2 - a_1$. 用反证法, 假设 $a_{k+1} - a_k \neq a_2 - a_1$, 那么

$$a_{k+1} - a_k \in \{a_3 - a_1, a_4 - a_1, \dots, a_k - a_1\}$$

即 $a_{k+1} - a_k \geq 2a$, 于是 $a_{k+1} \geq (k+2)a, a_{k+1} - a_2 \geq ka$, 而

$$a_1 - a_1 < a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \cdots < a_k - a_1 < a_{k+1} - a_2 < a_{k+1} - a_1$$

于是不存在 $a_m \in A$ 使得 $|a_{k+1} - a_2| = |a_m - a_1|$, 矛盾. 因此 $a_{k+1} - a_k = a_2 - a_1$, 即 $a_{k+1} = (k+1)a$. 由数学归纳法, 命题得证.

观察此方法, 从 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 为等差数列可推出 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为等差数列, 据此改进反证法。

用反证法, 假设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 不是以 $a_2 - a_1$ 为公差的等差数列, 则存在 $2 \leq i \leq n-1$ 使得 $a_{i+1} - a_i \neq a_2 - a_1$, 取所有满足该条件的 i 中的最小值记为 x , 于是

$$a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_{x-1} - a_{x-2} = a_2 - a_1, \quad a_x - a_{x-1} \neq a_2 - a_1$$

由于 $a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \cdots$, 于是 $a_x - a_{x-1} > a_2 - a_1$, 可推出

$$a_x - a_2 = (a_x - a_{x-1}) + (a_{x-1} - a_2) > a_{x-1} - a_1, \quad a_x - a_2 < a_x - a_1$$

故不存在 $a_m \in A$ 使得 $|a_{k+1} - a_2| = |a_m - a_1|$, 矛盾. 因此 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 成等差数列.

教评: 上课时询问了学生下述问题:

问题 1: 本题第 (2) 问为什么考虑反证法? (使用反证法的动机是什么?)

题目要求证明对任意 $a_i, a_j \in A$ 都有 $(a_i - a_1)(a_j - a_1) \geq 0$. 直接证明所需要分析的范围过大, 反证法通过假设存在一个反例来推导出矛盾, 将难以利用的待证命题转化为可以直接上手使用的具体的假设。

学生不清楚使用反证法的动机, 一方面是学生在此前的学习中对此接触较少, 遇到需使用反证法 (正面难以解答) 的习题时产生了畏惧. 实际上反证法就是一种寻常的证明方式, 并非什么高级的技巧。

数学思维训练的最关键一步在于如何正确利用和吸收外部帮助,对高中学生而言,具体体现在理解并学习参考答案这一步,这里也往往伴随着诸多严重的问题,学生首先不能对参考答案的每一步都给出一个(或多个)足以说服自己的动机,他们要么认为这些步骤是凭空出现的,从而泄气,要么是草草了事,自认为完全搞懂了,实则一问三不知。

教师的职责是引导学生去思考这些步骤的动机,对于不理解的,学生要在教师的鼓励下积极提出自己的疑惑,而非给学生灌输现成的答案。

问题 2: 对于哪些问题可以考虑使用反证法? 确定反证法后的下一步是什么? 如何最大可能地暴露矛盾?

一个经典的使用反证法的习题是: 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。一个数是有理数, 那么它可以写作 $\frac{p}{q}$ 的形式, 其中 p 和 q 是互质的整数。但我们很难用如此简洁的方式去描述无理数的特征, 从无理数入手难而从有理数入手易, 于是反设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 推导出矛盾。这一个例子说明, 当待证命题较为宽泛而其否命题较为具体时, 反证法是一个不错的选择。

确定反证法的下一步就是尝试最大限度地暴露矛盾。对于本题第 (2) 问, 虽然存在 $a_i < a_1 < a_j$, 但 $|a_i - a_j|$ 仍可能等于 $|a_m - a_1|$, 如何找到一组 a_p, a_q , 使得 $|a_p - a_q|$ 不等于任何 $|a_m - a_1|$? 我们尝试将它们的差推到最大值, 即取集合中的最大元与最小元。再以本节 B 组习题第 8 题【2026 “fiddie” 模拟考 19 (3)】为例, 要证明 S 不存在含 5 个元素的等差子集。

22. (1) 设 $A = \{2, 3\}, \mathbb{C}_M A = \{-1, 7\}$, 则 A 中元素之积等于 $\mathbb{C}_M A$ 中元素之和, 故 M 为“积和集合”。

所以本题答案为: 是 (答题时无需写过程)

(2) 分情况讨论。

若 $A = \{1, 2\}, \mathbb{C}_M A = \{4, a\}$, 则 $a = -2$ 。

若 $A = \{1, 4\}, \mathbb{C}_M A = \{2, a\}$, 则 $a = 2$, 但与互异性矛盾。

若 $A = \{1, a\}, \mathbb{C}_M A = \{2, 4\}$, 则 $a = 6$ 。

若 $A = \{2, 4\}, \mathbb{C}_M A = \{1, a\}$, 则 $a = 7$ 。

若 $A = \{2, a\}, \mathbb{C}_M A = \{1, 4\}$, 则 $2a = 5$, 与 a 是整数矛盾。

若 $A = \{4, a\}, \mathbb{C}_M A = \{1, 2\}$, 则 $4a = 3$, 与 a 是整数矛盾。

因此 a 的所有可能取值是 $-2, 6, 7$ 。(答题时无需写上述分析过程)

(3) 若 M 是积和集合, 则存在 M 的非空真子集 A , 使得 A 中所有元素的乘积等于 $\mathbb{C}_M A$ 中所有元素的和。设 A 中所有元素的乘积为 $P, \mathbb{C}_M A$ 中所有元素的和为 S 。由题意, $P = S$ 。

若 $-2 \in A$, 则 $P < 0, S > 0$, 矛盾。故 $-2 \in \mathbb{C}_M A$ 。

若 $|A| \geq 4$, 则 $P \geq 1 \times 3 \times 5 \times 7 = 105$ 。而 M 中所有元素和为 $-2 + 1 + 3 + \cdots + 19 = 98$, 所以 $S < 98 < P$, 矛盾。下讨论 $|A| = 2, |A| = 3$ 两种情况。

若 $|A| = 2$, 则 P 一定是奇数, 而 S 一定是偶数, 矛盾。

若 $|A| = 3$, 当 $1 \notin A$ 时, $P \geq 3 \times 5 \times 7 = 105$, 同上可推出矛盾, 故 $1 \in A$ 。设 $A = \{1, x, y\}$, 则 $P = xy, S = 98 - 1 - x - y = 97 - x - y$ 。

由 $P=S$ 得 $xy=97-x-y$, 即 $xy+x+y=97$. 这一方程可以改写为 $(x+1)(y+1)=98$, 又 $x+1, y+1$ 均为偶数, 所以 $(y+1)(z+1)$ 是 4 的倍数, 而 98 不是 4 的倍数, 矛盾.

综上, M 不是“积和集合”.

23. (1) 取向量 $(2, x) \in Y$. 设它的一个垂直向量为 (u, v) , 其满足 $2u + xv = 0$. u, v 不可能均为正数或均为负数

若 $u = -1$, 则 $xv = 2$, 而 $xv \geq x > 2$, 不可能使等式成立. 若 $v = -1$, 则 $2u = x$. 只可能有 $u = 2$, 此时 $x = 4$, 检验 $X = \{-1, 1, 2, 4\}$ 是符合题意的, 所以 $x = 4$.

(2) 取向量 $(-1, -1) \in Y$. 由题意, 设它的一个垂直向量为 (u, v) , 其满足 $(-1)u + (-1)v = 0$, 即 $u + v = 0$. u, v 不可能均为正数, 不妨设 $u = -1$, 则 $v = 1$, 于是 $1 \in X$.

假设当 $x_n > 1$ 时, $x_1 < 1$, 取向量 $(x_1, x_n) \in A$, 由题意, 设它的一个垂直向量为 (u, v) , 其满足 $ux_1 + vx_n = 0$. u, v 不可能均为正数或均为负数

若 $u = -1$, 则 $vx_n = x_1$, 而 $vx_n \geq x_1 x_n > x_1$, 矛盾; 若 $v = -1$, 则 $ux_1 = x_n$, 而 $ux_1 \leq x_1 x_n < x_n$, 矛盾.

于是当 $x_n > 1$ 时, 必有 $x_1 \geq 1$.

(3) 猜测有穷数列 $\{x_n\}$ 的通项公式只可能为 $x_n = q^{n-1} (q > 1)$, 采用数学归纳法证明:

当 $n = 2$ 时, 命题显然成立. 当 $n = 3$ 时, 假设 $X = \{-1, 1, q, x\}$, 取向量 $(q, x) \in X$, 设它的一个垂直向量为 (u, v) , 其满足 $uq + vx = 0$. u, v 不可能均为正数或均为负数

当 $u = -1$ 时, $vx = q$, 而 $vx \geq x > q$, 不符题意. 当 $v = -1$ 时, $uq = x$, u 只可能为 q , 于是 $x = q^2$, 命题成立.

假设当 $n = k$ 时命题成立. 当 $n = k + 1$ 时, 考虑向量 (q, x_{k+1}) , 设它的一个垂直向量为 (u, v) , 其满足 $uq + vx_{k+1} = 0$. u, v 不可能均为正数或均为负数

当 $u = -1$ 时, $vx_{k+1} = q$, 而 $vx_{k+1} \geq x_{k+1} > q$, 不符题意. 当 $v = -1$ 时, $uq = x_{k+1}$, 当 u 取 $x_1 = 1, x_2 = q, \dots, x_{k-1} = q^{k-2}$ 时均不满足该等式, 于是 u 只可能为 $x_k = q^{k-1}$. 故 $x_{k+1} = q^k$. 由此完成了证明.

评: 本题与【2009 北京 20】非常相似, 只是改变了问题呈现的背景, 条件复杂了、隐蔽了, 如果将向量的数量积为 0 关系: 对任意向量 $a_{i,j} = (x_i, x_j)$ 必存在向量 $(-1, x_k)$ 或 $(x_m, -1)$ 使 $x_i = x_k x_j$ 或 $x_j = x_m x_i$ 成立, 也就是对任意的 i, j ($1 \leq i, j \leq n$), 都有 $\frac{x_i}{x_j}$ 与 $\frac{x_j}{x_i}$ 两数中至少有一个属于 X . 这个中间结论与北京卷的条件“对任意的 i, j ($1 \leq i \leq j \leq n$), $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A ”何其相像!

解答高考试题或抽象度高的新颖题时, 一定要学会“退”, 退到最简单又不失本质的特殊问题上. 我们寻求一个问题的解答没有成功的原因最可能是, 有一个比手头问题更简单、更容易的问题没有完全解决或完全没有解决.

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): (1) 选取 $\vec{a}_1 = (x, 2)$, Y 中与 $\vec{a}_1$ 垂直的元素必有形式 $(-1, b)$.

……2 分

所以 $x = 2b$, 从而 $x = 4$.

……4 分

(2) 证明: 取 $\vec{a_1} = (x_1, x_1) \in Y$. 设 $\vec{a_2} = (s, t) \in Y$ 满足 $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = 0$.

由 $(s+t)x_1 = 0$ 得 $s+t=0$, 所以 s, t 异号.

因为 -1 是 X 中唯一的负数, 则 s, t 之中一为 -1 , 另一为 1 , 故 $1 \in X$.

……7 分

假设 $x_k = 1$, 其中 $1 < k < n$, 则 $0 < x_1 < 1 < x_n$.

选取 $\vec{a_1} = (x_1, x_n) \in Y$, 并设 $\vec{a_2} = (s, t) \in Y$ 满足 $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = 0$, 即 $sx_1 + tx_n = 0$,

则 s, t 异号, 从而 s, t 之中恰有一个为 -1 .

若 $s = -1$, 则 $x_1 = tx_n > t \geq x_1$, 矛盾. 若 $t = -1$, 则 $x_n = sx_1 < s \leq x_n$, 矛盾. 所以 $x_1 = 1$.

……10 分

(3) 解法一: 设 $\vec{a_1} = (s_1, t_1)$, $\vec{a_2} = (s_2, t_2)$, 则 $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = 0$ 等价于 $\frac{s_1}{t_1} = -\frac{t_2}{s_2}$.

记 $B = \left\{ \frac{s}{t} \mid s \in X, t \in X, |s| > |t| \right\}$, 则数集 X 具有性质 P 当且仅当数集 B 关于原点对称.

……14 分

注意到 -1 是 X 中的唯一负数, $B \cap (-\infty, 0) = \{-x_2, -x_3, \dots, -x_n\}$ 具有 $n-1$ 个数, 所以 $B \cap (0, +\infty)$ 也只有 $n-1$ 个数.

由于 $\frac{x_n}{x_{n-1}} < \frac{x_n}{x_{n-2}} < \dots < \frac{x_n}{x_2} < \frac{x_n}{x_1}$, 已有 $n-1$ 个数, 对以下三角数阵

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{x_n}{x_{n-1}} & < & \frac{x_n}{x_{n-2}} & < & \dots & < & \frac{x_n}{x_2} & < & \frac{x_n}{x_1} \\ \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & < & \frac{x_{n-1}}{x_{n-3}} & < & \dots & < & \frac{x_{n-1}}{x_2} & < & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ & & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & < & \dots & < & \frac{x_{n-2}}{x_2} & < & \frac{x_{n-2}}{x_1} \\ & & & & \dots & & \frac{x_2}{x_1} \end{array}$$

注意到 $\frac{x_n}{x_1} > \frac{x_{n-1}}{x_1} > \dots > \frac{x_2}{x_1}$, 则 $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \dots = \frac{x_2}{x_1}$, 从而数列的通项为 $x_k = x_1 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{k-1} = q^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

……18 分

解法二: 猜测 $x_i = q^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

……12 分

记 $A_k = \{-1, 1, x_2, \dots, x_k\}$, $k = 2, 3, \dots, n$.

先证明: 若 A_{k+1} 具有性质 P , 则 A_k 也具有性质 P .

任取 $\vec{a_1} = (s, t)$, $s, t \in A_k$, 当 s, t 中出现 -1 时, 显然有 $\vec{a_2}$ 满足 $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = 0$.

当 $s \neq -1$ 且 $t \neq -1$ 时, 则 $s, t \geq 1$.

因为 A_{k+1} 具有性质 P , 所以有 $\vec{a_2} = (s_1, t_1)$, $s_1, t_1 \in A_{k+1}$, 使得 $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = 0$, 从而 s_1 和 t_1 中有一个是 -1 , 不妨设 $s_1 = -1$.

假设 $t_1 \in A_{k+1}$ 且 $t_1 \notin A_k$, 则 $t_1 = x_{k+1}$. 由 $(s, t) \cdot (-1, x_{k+1}) = 0$, 得 $s = tx_{k+1} \geq x_{k+1}$, 与 $s \in A_k$ 矛盾.

所以 $t_1 \in A_k$. 从而 A_k 也具有性质 P .

……15 分

现用数学归纳法证明: $x_i = q^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

当 $n = 2$ 时, 结论显然成立;

假设 $n = k$ 时, $A_k = \{-1, 1, x_2, \dots, x_k\}$ 有性质 P , 则 $x_i = q^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$;

当 $n = k+1$ 时, 若 $A_{k+1} = \{-1, 1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ 有性质 P , 则 $A_k = \{-1, 1, x_2, \dots, x_k\}$ 也有性质 P ,

所以 $A_{k+1} = \{-1, 1, q, \dots, q^{k-1}, x_{k+1}\}$.

取 $\vec{a_1} = (x_{k+1}, q)$, 并设 $\vec{a_2} = (s, t)$ 满足 $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = 0$, 由此可得 $s = -1$ 或 $t = -1$.

若 $t = -1$, 则 $x_{k+1} = \frac{q}{s} \leq q$, 不可能;

所以 $s = -1$, $x_{k+1} = qt = q^j \leq q^k$ 且 $x_{k+1} > q^{k-1}$, 所以 $x_{k+1} = q^k$.

综上所述, $x_i = q^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

……18 分

24. (1) 集合 $\{1, 3, 4\}$ 不具有性质 P . 集合 $\{1, 2, 3, 6\}$ 具有性质 P .

(2) 取 $i = j = n$. 因为 $a_n^2 > a_n$, 所以 $a_n^2 \notin A$; 题设的两个数中至少一个属于 A , 因此只能有 $\frac{a_n}{a_n} = 1 \in A$, 即 $a_1 = 1$.

当 $j = n$ 时, 对任意 $i > 1$, 因为 $a_i a_n > a_n$, 于是 $a_i a_n \notin A$, 所以 $\frac{a_n}{a_i} \in A$. 于是可以找到这 n 个互不相等的属于 A 的数, 按递增排列

$$\frac{a_n}{a_n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \dots < \frac{a_n}{a_2} < \frac{a_n}{a_1}$$

于是有 $\frac{a_n}{a_n} = a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_2, \dots, \frac{a_n}{a_2} = a_{n-1}, \frac{a_n}{a_1} = a_n$ (若要严谨证明, 可参考本节习题第 37 题

(3) 的证明思路)

因此

$$\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n \iff \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$$

(3) 当 $n = 5$ 时, 由上一问有 $a_1 a_5 = a_5$, 所以 $a_1 = 1$; 还有 $a_2 a_4 = a_3^2 = a_5, a_2, a_3, a_4$ 成等比数列, 设 $a_2 = x, a_3 = xq (x > 1, q > 1)$, 则 $a_4 = xq^2, a_5 = x^2 q^2$.

考察 a_2, a_3 . 若 $a_2 a_3 \in A$, 由于 $a_2 a_3 = x^2 q$, 而 $a_3 < x^2 q < x_5$, 只可能有 $x^2 q = a_4 = xq^2$, 即 $x = q$. 于是 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, q, q^2, q^3, q^4), a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 成等比数列.

若 $a_2 a_3 \notin A$, 则 $\frac{a_3}{a_2} \in A$. 而 $\frac{a_3}{a_2} = q, a_1 < q < a_3$, 只可能有 $a_2 = q$, 同上可证 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.

25. 通过逐个讨论可以求出 $|P_{11}|$, 此处直接介绍一般方法. 考虑连续 k 个 $(-1)^{k-1}k$, 记它们对应原数列中的 $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_{t+k}$. 可知, $a_{t+1} \mid S_{t+1}$ 当且仅当对任意 $1 \leq p \leq k$, 有 $a_{t+p} \mid S_{t+p}$, 于是这 k 个数要么同时属于 P_l 或同时不属于 P_l .

记 T_k 表示数列中 k 个 $(-1)^{k-1}k$ 的和. 可以证明, 当 k 为偶数时, $\sum_{i=1}^k T_i = (-1)^k k^2 = -\frac{k(k+1)}{2}$,

此时 $k+1 \mid \sum_{i=1}^k T_i$, 当 k 为奇数时, $\sum_{i=1}^k T_i = (-1)^k k^2 = \frac{k(k+1)}{2}$, 此时 $k+1 \nmid \sum_{i=1}^k T_i$, 由此推出所有的奇数都属于 P_l , 所有的偶数都不属于 P_l

故 $|P_{11}| = 5$. 再计算得 $|a_{2000}| = 63$, 且前 2000 项中末尾的 47 项均为 63, 于是 $|P_{2000}| = (1 + 3 + 5 + \dots + 61) + 47 = 1008$

26. (1) 可知, 第 r 行的数从左到右分别为 $2^r + 2^s$, 其中 $s = 0, 1, \dots, r-1$. 于是第四行的数从左到右分别为 17, 18, 20, 24. 第五行的数从左到右分别为 33, 34, 36, 40, 48.

(2) $a_{100} = 2^{14} + 2^8 = 16384 + 256 = 16640$.

(3) 受前述问题启发, 将 1160 写成三个不同的二次幂之和: $1160 = 1024 + 128 + 8 = 2^{10} + 2^7 + 2^3$. 它位于最大指数为 10 的那一组.

最大指数小于 10 的项数为 $\sum_{t=2}^9 C_t^2 = C_{10}^3 = 120$. 在最大指数为 10 的组中, 按中间指数从小到大排列. 中间指数小于 7 时, 项数为 $C_7^2 = 21$. 中间指数等于 7 时, 较小指数依次为 0, 1, 2, 3, $\dots$, 6. 目标项的较小指数为 3, 所以在它之前有 3 项. 因此 $k = 120 + 21 + 3 + 1 = 145$.

27. (1) 集合 $\{-1, 2, 5, 7\}$ 不是“分偶集合”. 集合 $\{2, 3, 5, 6, 7, 9, 16\}$ 是“分偶集合”.

(2) 因为 3, 5, 7 是奇数且不是平方数, 要使得 $\{2, 3, 5, 6, 7, a^2, (a+b)^2\}$ 为“分偶集合”, 必须 a^2 与 $(a+b)^2$ 中有且只有一个奇数, 即 a 与 $a+b$ 有且只有一个奇数.

而当 b 为奇数时, 若 a 为偶数, 则 $a+b$ 为奇数; 若 a 为奇数, 则 $a+b$ 为偶数, 因此 a 与 $a+b$ 有且只有一个奇数.

因此本题的答案中, b 可以是任意的奇数.

(3) 我们要证明 A 不可能是“分偶集合”. 采用反证法, 假设 A 是“分偶集合”, 则 A 恰有 s 个元素是奇数, 且 $\frac{s}{2}$ 是偶数, 所以 $s = 4m (m \in \mathbb{N}^*)$.

把集合 $\{x \in \mathbb{Z} \mid -29 \leq x \leq 30\}$ 写成 30 个二元集的并: $\{-29, 30\}, \{-28, 29\}, \{-27, 28\}, \dots, \{-1, 2\}, \{0, 1\}$.

因为 A 中任意两个元素之和均不等于 1, 且 A 是 30 元集, 所以在这 30 个二元集中, 每个二元集有且只有一个元素属于 A .

然后再把这 30 个二元集分成两组:

甲组: $\{-29, 30\}, \{-26, 27\}, \{-25, 26\}, \{-22, 23\}, \{-21, 22\}, \dots, \{-2, 3\}, \{-1, 2\}$. 这里共 15 个集合, 每个元素要么是形如 $4k-1$ 的奇数, 要么是形如 $4k-2$ 的偶数. 设 A 的元素中有 p 个偶数和 $15-p$ 个奇数位于甲组.

乙组: $\{-28, 29\}, \{-27, 28\}, \{-24, 25\}, \{-23, 24\}, \dots, \{-3, 4\}, \{0, 1\}$. 这里共 15 个集合, 每个元素要么是形如 $4k+1$ 的奇数, 要么是形如 $4k$ 的偶数. 设 A 的元素中有 q 个偶数和 $15-q$ 个奇数位于乙组.

于是, $s = (15 - p) + (15 - q)$, 即 $p + q = 30 - 4m$. 现在,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{30} a_i &= \sum_{a_i \text{形如} 4k-1} a_i + \sum_{a_i \text{形如} 4k-2} a_i + \sum_{a_i \text{形如} 4k} a_i + \sum_{a_i \text{形如} 4k+1} a_i \\ &\equiv \left[-2p + (-1)(15 - p) + q \cdot 0 + (15 - q) \cdot 1 \right] (\text{mod } 4) \\ &\equiv (-p - q) (\text{mod } 4) \\ &\equiv (30 - 4m) (\text{mod } 4) \\ &\equiv 30 (\text{mod } 4).\end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{30} a_i \equiv 15 (\text{mod } 2)$, 即 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{30} a_i$ 与 15 同奇偶.

然而由题干, $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{30} a_i$ 是偶数, 但 15 是奇数, 矛盾.

综上, A 不可能为“分偶集合”.

新答案 (来源: 4.3 多个量词的问题 (2) 数列.md): 首先证明一个“基本事实”:

一个等差数列中, 若有连续三项成等比数列, 则这个数列的公差 $d_0 = 0$.

事实上, 设这个数列中的连续三项 $a - d_0$, a , $a + d_0$ 成等比数列, 则

$$a^2 = (a - d_0)(a + d_0),$$

由此得 $d_0 = 0$.

(1) () 当 $n = 4$ 时, 由于数列的公差 $d \neq 0$, 故由“基本事实”推知, 删去的项只可能为 a_2 或 a_3 .

若删去 a_2 , 则由 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 得 $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$.

因 $d \neq 0$, 故由上式得 $a_1 = -4d$, 即 $\frac{a_1}{d} = -4$, 此时数列为 $-4d, -3d, -2d, -d$, 满足题设.

若删去 a_3 , 则由 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 得 $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$.

因 $d \neq 0$, 故由上式得 $a_1 = d$, 即 $\frac{a_1}{d} = 1$. 此时数列为 $d, 2d, 3d, 4d$, 满足题设.

综上所述, $\frac{a_1}{d}$ 的值为 -4 或 1 .

() 若 $n \geq 6$, 则从满足题设的数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中删去一项后得到的数列, 必有原数列中的连续三项, 从而这三项既成等差数列又成等比数列, 故由“基本事实”知, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的公差必为 0, 这与题设矛盾. 所以满足题设的数列的项数 $n \leq 5$. 又因题设 $n \geq 4$, 故 $n = 4$ 或 5 .

当 $n = 4$ 时, 由 () 中的讨论知存在满足题设的数列.

当 $n = 5$ 时, 若存在满足题设的数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , 则由“基本事实”知, 删去的项只能是 a_3 ,

从而 a_1, a_2, a_4, a_5 成等比数列, 故

$$(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d),$$

及

$$(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 4d).$$

分别化简上述两个等式, 得 $a_1d = d^2$ 及 $a_1d = -5d^2$, 故 $d = 0$, 矛盾. 因此, 不存在满足题设的项数为 5 的等差数列.

综上可知, n 只能为 4.

(2) 假设对于某个正整数 n , 存在一个公差为 d' 的 n 项等差数列 $b_1, b_1 + d', \dots, b_1 + (n-1)d'$ ($b_1d' \neq 0$), 其中三项 $b_1 + m_1d', b_1 + m_2d', b_1 + m_3d'$ 成等比数列, 这里 $0 \leq m_1 < m_2 < m_3 \leq n-1$. 则有

$$(b_1 + m_2d')^2 = (b_1 + m_1d')(b_1 + m_3d'),$$

化简得

$$(m_1 + m_3 - 2m_2)b_1d' = (m_2^2 - m_1m_3)(d')^2.$$

(*)

由 $b_1d' \neq 0$ 知, $m_1 + m_3 - 2m_2$ 与 $m_2^2 - m_1m_3$ 或同时为零, 或均不为零.

若 $m_1 + m_3 - 2m_2 = 0$, 且 $m_2^2 - m_1m_3 = 0$, 则有 $\left(\frac{m_1 + m_3}{2}\right)^2 - m_1m_3 = 0$,

即 $(m_1 - m_3)^2 = 0$, 得 $m_1 = m_3$, 从而 $m_1 = m_2 = m_3$, 矛盾.

因此, $m_1 + m_3 - 2m_2$ 与 $m_2^2 - m_1m_3$ 都不为零, 故由 (*) 得

$$\frac{b_1}{d'} = \frac{m_2^2 - m_1m_3}{m_1 + m_3 - 2m_2}.$$

因为 m_1, m_2, m_3 均为非负整数, 所以上式右边为有理数, 从而 $\frac{b_1}{d'}$ 是一个有理数.

于是, 对于任意的正整数 $n \geq 4$, 只要取 $\frac{b_1}{d'}$ 为无理数, 则相应的数列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 就是满足要求的数列. 例如, 取 $b_1 = 1$, $d' = \sqrt{2}$, 那么, n 项数列 $1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + (n-1)\sqrt{2}$ 满足要求.

【解题思路】 第 (2) 问在解答时也可以先给出数列 $1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + (n-1)\sqrt{2}$ (只要公差为无理数均可), 然后再证明其中任意三项都不构成等比数列 (最终会得出 $\sqrt{2}$ 等于一个有理数的形式, 就导出矛盾).

新答案 (来源: 1.29 数列综合.md):

【解题思路】 设 $a_n = a + nd$, $b_n = b + nc$. 则 $k \in M$ 当且仅当 $a + kd = b + kc$, 即 $a - b = k(c - d)$. 这是个一次方程, 这个关于 k 的方程只可能有 0 个或 1 个正整数解. 特别地, 对 $a_n = 2n - 1$, $b_n = 3n - 2$, 此时 $M = \{1\}$. 故 正确.

考虑 $a_n = 2^n$, $b_n = (-2)^n$, 则 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是等比数列, 但是 $M = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{\text{全体偶数}\}$, 故 错误.

设 $a_n = a + nd$, $b_n = q^n$ (不妨设 $b_1 = q$). 则 $k \in M$ 当且仅当 $a + kd = q^k$.

设 $f(x) = |q|^x - dx - a$, $g(x) = |q|^x + dx + a$.

(i) 若 $q > 0$, 则 $a + kd = q^k$ 当且仅当 $f(k) = 0$. 求导可知 $f(x)$ 最多只有两段单调区间, 从而最多只有 2 个零点, 即 M 的元素个数不超过 2.

(ii) 若 $q < 0$, 则当 k 为奇数时, $a + kd = q^k$ 等价于 $a + kd = -|q|^k$, 等价于 $g(k) = 0$.

当 k 为偶数时, $a + kd = q^k$ 等价于 $f(k) = 0$.

注意到, 通过讨论 q, d 的取值可发现, $f(x)$ 和 $g(x)$ 必有一个在 $\mathbb{R}$ 上为单调函数, 另一个在 $\mathbb{R}$ 上有两段单调区间. 于是, $f(x), g(x)$ 的零点个数之和不超过 3.

特别地, 取 $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, 则 $b_1 = -\frac{1}{2}, b_3 = -\frac{1}{8}, b_4 = \frac{1}{16}$. 再取 $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{16}(n-1)$, 则 $a_1 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{8}, a_4 = \frac{1}{16}$, 所以 $M = \{1, 3, 4\}$. 所以 正确.

设 $c_n = a_n - b_n$, 则 $\{c_n\}$ 是递增数列, $M = \{n | c_n = 0\}$. 取一个连续函数 $f(x)$ 满足 $f(n) = c_n$, 使得 $f(x)$ 是单调递增函数 (构造方法: 连接 (n, c_n) 和 $(n+1, c_{n+1})$ 的折线). 由零点存在定理, $f(x)$ 最多只有一个零点, M 最多只有 1 个元素. 故 正确.

新答案 (来源: 061-080 极值零点数列与切割函数图像.md):

(1) 显然构成公比为 2^d 的等比数列, 过程略.

(2) 假设存在 a_1, d 满足题意.

a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列且均为正数因此

$\ln a_1, 2\ln(a_1 + d), 3\ln(a_1 + 2d), 4\ln(a_1 + 3d)$ 依次构成等差数列, 设其公差为 d_1 .

令 $b = \ln a_1$, 则 $n\ln[a_1 + (n-1)d] = b + (n-1)d_1$ ($n = 1, 2, 3, 4$)

即方程 $\ln[a_1 + (x-1)d] = \frac{b-d_1}{x} + d_1$ 至少存在四个解 $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$

令 $\varphi(x) = \ln[a_1 + (x-1)d] - \frac{b-d_1}{x} - d_1$ ($1 \leq x \leq 4$), 则 $\varphi(x)$ 至少有 4 个零点.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{a_1 + (x-1)d} + \frac{b-d_1}{x^2} = \frac{dx^2 + (b-d_1)[a_1 + (x-1)d]}{x^2[a_1 + (x-1)d]}$$

显然 $x \geq 1$ 时 $x^2[a_1 + (x-1)d] > 0$.

令 $g(x) = dx^2 + (b-d_1)[a_1 + (x-1)d]$, $g(x)$ 是二次函数至多有 2 个变号零点, 进而 $\varphi(x)$ 至多有 3 个单调区间, 即 $\varphi(x)$ 至多有 3 个零点, 矛盾.

综上不存在 a_1, d 满足题意.

(3) 问与 (2) 问做法如出一辙:

假设存在 a_1, d 以及正整数 n, k 满足题意.

$a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列且均为正数因此

$n\ln a_1, (n+k)\ln(a_1 + d), (n+2k)\ln(a_1 + 2d), (n+3k)\ln(a_1 + 3d)$ 依次构成等差数列, 设其公差为 d_2 .

令 $b = n\ln a_1$, 则 $[n + (i-1)k]\ln[a_1 + (i-1)d] = b + (i-1)d_2$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

即方程 $\ln(a_1 + dx) = \frac{b+d_2x}{n+kx}$ 至少存在四个解 $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$

令 $\phi(x) = \ln(a_1 + dx) - \frac{b+d_2x}{n+kx}$ ($0 \leq x \leq 3$), 则 $\phi(x)$ 至少有 4 个零点.

$$\phi'(x) = \frac{d}{a_1 + dx} + \frac{bk - d_2n}{(n+kx)^2} = \frac{d(n+kx)^2 + (bk - d_2n)(a_1 + dx)}{(n+kx)^2(a_1 + dx)}$$

显然 $x \geq 0$ 时 $(n+kx)^2(a_1 + dx) > 0$

令 $h(x) = d(n+kx)^2 + (bk - d_2n)(a_1 + dx)$, $h(x)$ 是二次函数至多有 2 个变号零点, 进而 $\phi(x)$ 至多有 3 个单调区间, 即 $\phi(x)$ 至多有 3 个零点, 矛盾.

综上, 不存在 a_1, d 以及正整数 n, k 满足题意.

28.

29.

30. (1) 不存在奇数 $x, y, z \in S$ 使得 $\{x, y, z\}$ 是 S 的等差子集. 证明如下:

当 $t > s \geq 1$ 时, $2^t + 2^s$ 是偶数, 所以 S 中的三个奇数形如 $x = 2^a + 1, y = 2^b + 1, z = 2^c + 1$ ($1 \leq a < b < c, a, b, c \in \mathbb{Z}$).

因为 $c > b$, 所以 $c \geq b + 1$, 从而 $2^c - 2^{b+1} \geq 0$. 因此 $(2^a + 1) + (2^c + 1) - 2(2^b + 1) = 2^a + 2^c - 2^{b+1} \geq 2^a > 0$, 即 $x + z > 2y$, 故 x, y, z 不构成等差数列, $\{x, y, z\}$ 不可能是 S 的等差子集.

(2) 设集合 $T_m = \{3 \cdot 2^m, 6 \cdot 2^m, 9 \cdot 2^m, 12 \cdot 2^m\}, m \in \mathbb{N}^*$. $3 \cdot 2^m = 2^{m+1} + 2^m \in S, 6 \cdot 2^m = 2^{m+2} + 2^{m+1} \in S, 9 \cdot 2^m = 2^{m+3} + 2^m \in S, 12 \cdot 2^m = 2^{m+3} + 2^{m+2} \in S$, 故 $T_m \subseteq S$, 且 T_m 中元素从小到大排列后成公差为 $3 \cdot 2^m$ 的等差数列.

故 S 的含 4 个元素的等差子集有 $T_1, T_2, \dots, T_m, \dots$, 这里有无穷多个.

(3) 假设 $T = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\} (b_1 < b_2 < \dots < b_5)$ 是 S 的等差子集, 设其公差 $d \in \mathbb{N}^*$.

若 T 中元素均为偶数, 则 $b_i = 2^{t_i} + 2^{s_i}, t_i > s_i \geq 1, t_i, s_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, 2, 3, 4, 5$. 于是 $\frac{b_i}{2} = 2^{t_i-1} + 2^{s_i-1} \in S$, 且 $\frac{b_1}{2}, \dots, \frac{b_5}{2}$ 成公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列. 不断将 T 中所有元素除以 2, 直至得到的子集中至少有一个奇数. 因此可不妨设原子集中至少有一个奇数.

若 d 为偶数, 则 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 同奇偶. 若全为奇数, 则奇数 b_1, b_2, b_3 成等差数列, 与 (1) 矛盾; 若全为偶数, 与子集中至少有一个奇数矛盾. 故 d 为奇数.

若 b_1 为奇数, 则 $b_3 = b_1 + 2d, b_5 = b_1 + 4d$ 均为奇数, 且 b_1, b_3, b_5 成等差数列, 与 (1) 矛盾. 故 b_1 为偶数, 则 b_3, b_5 为偶数, $b_2 = b_1 + d, b_4 = b_1 + 3d$ 为奇数.

因为 $b_2, b_4 \in S$, 所以 $b_2 = 2^p + 1, b_4 = 2^q + 1$, 其中 $1 \leq p < q, p, q \in \mathbb{Z}$.

于是 $2d = (2^q + 1) - (2^p + 1) = 2^p(2^{q-p} - 1)$. 若 $p \geq 2$, 则 2^p 是 4 的倍数, 从而 $2d$ 是 4 的倍数, d 为偶数, 矛盾. 故 $p = 1$, 所以 $b_2 = 3$. 但 3 是 S 中的最小元素, 而 $b_1 = b_2 - d < 3$, 这与 $b_1 \in S$ 矛盾. 综上, S 不存在含有 5 个元素的等差子集.

评: 本题以正整数的二进制表示为背景, 并以考生熟悉的等差数列为知识素材, 考查集合、等差数列的概念与性质、数列的递推关系; 考查学生的逻辑思维、运算求解、自主探究和创新应用等能力, 同时重点考查学生应用所学知识分析问题、解决问题的能力; 考查数列递推的基本思想与方法, 同时重点考查从特殊到一般、转化与化归、分类讨论等数学思想与方法. 本题是一道综合性很强、能检验考生数学思维的高质量的题目.

本题的命题灵感来源是【2003 全国旧课程卷 22】(收录在本书的 1.1 节习题), 该题的数列是 OEIS 数列 A018900. 该题研究的是满足下面条件的正整数 N 构成的集合: 将 N 表示成二进制后, 只有两位数是 1, 其余位均为 0. 与 2003 年高考题不一样的是, 本题在命题时仅采用 2003 年高考题中出现的集合, 并没有考虑研究由这个集合里面的正整数构成的数表, 而是转为研究这个集合里面最多有多少个数字能构成等差数列. “等差子列”、“等比子列”的长度问题同样也是非常著名的第一类“加性组合”的问题. 这种问题在往年高考也经常考查, 例如【2008 江苏 19】, 【2024 北京 15】, 【2015 江苏 20】等.

命制此题的灵感来自 Erdős-Turan 的等差数列猜想: 对于正整数数列 $\{n\}$ 的任意子列 $\{A_n\}$, 若其所有元素的倒数和发散, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n} = \infty$, 则 $\{A_n\}$ 含有任意长度的等差子列.

在 2004 年, Ben Green 和陶哲轩宣布证明了上述猜想的弱化版本——“存在任意长度的素数等差数列”, 并于同年 4 月 9 日将论文提交至《美国数学年鉴》, 该论文于 2005 年 9 月 12 日被接受. 2004 年已知最长的等差素数列包含 23 个素数. 本题研究集合 $S = \{2^s + 2^t \mid 0 \leq s < t, \text{且 } s, t \in \mathbb{Z}\}$ 的等差子列, 并设计了一个中学生能用中学数学知识解决的问题.

第 (1) 问将新定义的包装去除之后, 就会发现 S 中元素 $2^t + 2^s (0 \leq s < t)$ 在 $s \geq 1$ 时一定是偶数, 故奇数必须满足 $s = 0$, 需要学生对集合元素结构的初步分析能力. 因此, 本题转化为: 当 $a < b < c$ 时, $2^a + 1, 2^b + 1, 2^c + 1$ 是否成等差数列, 即 $2^a, 2^b, 2^c$ 是否成等差数列. 这是中学生比较熟悉的问题,

第 (2) 问需要学生证明等差子集有无穷多个, 首先可以用数列递推的思想方法, 注意到 S 中元素具有乘以 2 的封闭性, 也就是说, 将一个 4 元等差子集的所有元素都乘以 2 之后, 可以得到新的 4 元等差子集. 从等差 (比) 数列构造另一个等差 (比) 数列的结论在教材中也有提及. 题干已经提示了 $3, 6, 9, 12, 18, 24 \in S$, 于是可以从初始的等差子集 $\{3, 6, 9, 12\}$ 出发, 乘以 2 后得到 $\{6, 12, 18, 24\}$, 一直下去按上述递推的方式即可得到无穷多个等差子集.

这个构造转化思想和数列递推的思想与 **【2024 新高考 I 卷 19 (2)】** 不谋而合, 这样的设问能有效考查学生面对新问题时的逻辑思维能力, 能有效区分学生分析问题、解决问题的能力水平. 这一问并不复杂, 体现了由特殊到一般的数学思维, 同时也为后续证明不存在元素个数为 5 的等差子集提供了方法上的对比.

第 (3) 问是本题的核心, 要求证明不存在 5 元等差子集. 证明过程需要综合运用多个层面的推理: 首先, 解决第 (2) 问的思路是对一个等差子集不断乘以 2 就可以得到新的等差子集, 受这个启发“反向操作”, 先通过除以 2 将问题化归为至少含有一个奇数项的情形, 再分析公差奇偶性并结合第 (1) 问排除全奇数和首项为奇数的情形, 最后利用奇数项在 S 中的唯一表示导出矛盾. 这一过程不仅考查了对集合性质的深入理解, 还要求考生具备较强的逻辑分类与构造性推理能力.

整体来看, 本题的三问层层递进, 逐步深入, 使得每个学生都能有所收获, 都能获得相应的分数. 前两问为最后一问提供了必要的铺垫和方法示范, 体现了数学问题设计中“引导—深化—综合”的常见结构, 对培养学生对数学的兴趣, 激发学生的探究精神, 引导学生开展科学研究有很好的引领作用. 试题以离散数学中的简单表示为载体, 考查学生从基本定义出发进行推理和构造的能力, 具有较强的灵活性和选拔功能. 通过解答试题展现数学探究的过程, 实现对分析、推理、判断等关键能力的考查, 引导学生用规范的数学语言、新定义、新符号表达推理与论证过程.

本题设计新颖, 极具探索性、创新性, 作为试卷的最后一题, 难度合理, 考查学生利用新情境、新问题的创新能力, 也考查学生的情感、态度和价值观. 试题引导学生面对问题要“多思考, 少运算”, 体现了对数学基础知识与数学核心素养的有机整合, 具有很好的区分和选拔功能, 能够有效地助力选拔创新人才. 试题情境、形式的创新, 着力于“反套路、反刷题”, 既使试题规避重题模式, 又引导中学教学破除题海, 消除套路, 重视培养学生思维能力, 真正注重能力和素养的培养.

数列题, 特别是以等差等比数列为背景的数列题作为高考中的难题, 通常没有“秒杀大招”来解决. 对数列知识的研究和复习, 要关注以下几点:

1. 熟练掌握等差、等比数列中的一些基本问题, 如通项公式与求和公式的各种形式、结构特点; 等差、等比数列的常见性质; 判断数列是等差、等比数列的方法, 常见数列求和的方法等.
2. 理解和掌握等差、等比数列通项与求和公式推导中蕴含的基本方法, 如累加 (乘) 等.
3. 体会“从特殊到一般”的思想在解决数列问题中的作用.
4. 用函数的观点认识和理解等差、等比等一些特殊的数列.
5. 把一些特殊的数列, 如 $a_n = 2n - 1$ 作为平时学习中研究的对象, 挖掘其背后所蕴含的特征, 例如
 - (1) 数列 $\{2n - 1\}$ 的前 n 项和为完全平方数 n^2 ;
 - (2) 正整数均有二进制表示, 即表示成数列 $\{2^{n-1}\}$ 的某些项之和;
 - (3) 正整数也可以表示成 Fibonacci 数列的某些非相邻项之和, 这个结论叫 Zeckendorf 定理.
6. 在数列的学习过程中, 一定要意识到数感在学习过程中所起到的作用. 证明数列的存在性问题时, 有时会用到构造性证明的方法 (例如【2008 江苏 19 (2)】), 如何将符合要求的数列构造出来, 是需要学生在平时学习中不断积累各种例子的.

31.

32.

33.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.2 集合

C 组

1. 证明集合的笛卡尔积对集合的交、并运算满足分配律, 即对任意集合 A, B, C 有

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C), & A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C). \\ (A \times B) \cap (A \times C) &= A \times (B \cap C), & (A \times B) \cup (A \times C) &= A \times (B \cup C). \end{aligned}$$

2. 是否存在正整数 n 使得集合 $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ 可以划分成两个无公共元素的非空子集, 使得一个子集的所有元素的积等于另一个子集的所有元素的积.

3. 【2025STEP2 第 8 题】设有限集合 $S \subseteq \mathbb{Z}$. 对于 S 的两个子集 A, B , 定义如下性质:

性质 1: $A \cap B = \emptyset, A \cup B = S$.

性质 2: A 中所有元素的和等于 B 中所有元素的和.

性质 3: A 中所有元素的平方和等于 B 中所有元素的平方和.

若 A, B 同时满足性质 1, 2, 3, 则称 A, B 是 S 的一个平衡划分.

- (1) 写出 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的一个平衡划分 A, B , 其中 A, B 各有 4 个元素.

- (2) 设实数 $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ 满足

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m b_k, \quad \sum_{k=1}^m a_k^2 = \sum_{k=1}^m b_k^2.$$

证明: 对任意实数 c , 都有

$$\sum_{k=1}^m a_k^3 + \sum_{k=1}^m (c + b_k)^3 = \sum_{k=1}^m b_k^3 + \sum_{k=1}^m (c + a_k)^3.$$

- (3) 求 $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$ 的一个平衡划分 A, B , 使得 A, B 各有 8 个元素, 且满足 A 中所有元素的立方和等于 B 中所有元素的立方和.

- (4) 已知 $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ 的一个平衡划分分为 $\{1, 3, 4, 5, 9, 11\}, \{2, 6, 7, 8, 10\}$. 设 $S = \{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \dots, (n+11)^2\}$, 其中 n 是正整数. 求 S 的一对子集 A, B 使得性质 1, 2 成立.

4. 【2026 “神算杯一摸” (B 卷) (网络联考) 19】设正整数 $n \geq 3$, 集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq n\}$, 集合 $S \in \mathbb{N}$ 满足: 对任意 $a \in A$, 总存在两两不相等的 $s_1, s_2, \dots, s_k \in S (k \geq 3)$, 使得 $\sum_{i=1}^k s_i = a$, 记 $|S| = m$.

- (1) 证明: $\{0, 1, 2\} \subseteq S$;

- (2) 若 $m = 5$, 求 n 的最大值;

- (3) 证明: m 的最小值为 $\lceil \log_2(\frac{n}{3}) \rceil + 3$.

5. 已知正整数 $n \geq 4$, 有序数组 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足 $x_i \in \{0, 1\} (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i = m$, 并称 α 是 n 元 m 阶 0-1 数组, 设 $\beta(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是另一个 n 元 m 阶 0-1 数组, 若 α 和 β 满足 $\alpha \neq \beta$, 且 $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = m$, 则称 α 与 β 孪生.

(1) 若 $n = 4, \alpha = (1, 0, 0, 1)$, 写出 2 个不同的 β , 使得 α 与 β 孪生;

(2) 证明: 若 α 与 β 孪生, 则 m 是偶数;

(3) 设 $\gamma(z_1, z_2, \dots, z_n)$ 是 n 元 m 阶 0-1 数组, 证明: 若 α 与 β 孪生, 则存在 γ 与 α, β 都孪生, 且对任意与 α, β 都孪生的 γ , $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)(y_i + z_i)(z_i + x_i) \leq 2n$

1.

2.

3. (1) $A = \{2, 3, 5, 8\}$ 和 $B = \{1, 4, 6, 7\}$ 是 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的一个平衡划分. 因为它们中元素的和与平方和均分别为 18 与 102.

分析过程如下 (不用写出): 因为 $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$, $1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2 = 204$, 由平衡划分的定义, A, B 的所有元素之和都为 18, 所有元素的平方和都为 102.

进行穷举. 假设 $8 \in A$, 分析 A 中另外三个元素, 它们的平方和是 38, 和是 10, 那么 $6, 7 \notin A$. 而 $5^2 + 2^2 + 3^2 = 38$, 所以可以写 $A = \{2, 3, 5, 8\}$, $B = \{1, 4, 6, 7\}$.

(2) 展开待证式中的立方式

$$\begin{aligned} a_k^3 + (c + b_k)^3 &= a_k^3 + b_k^3 + c^3 + 3c^2b_k + 3cb_k^2, \\ b_k^3 + (c + a_k)^3 &= a_k^3 + b_k^3 + c^3 + 3c^2a_k + 3ca_k^2, \end{aligned}$$

两边对 $k = 1, 2, \dots, m$ 求和, 并由条件

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m b_k, \quad \sum_{k=1}^m a_k^2 = \sum_{k=1}^m b_k^2.$$

即可完成证明.

(3) 取 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (8, 5, 3, 2)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 4, 6, 7)$, 并取

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, c + b_1, c + b_2, c + b_3, c + b_4\}, \\ B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, c + a_1, c + a_2, c + a_3, c + a_4\}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} A &= \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}, \\ B &= \{1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16\}. \end{aligned}$$

易知性质 1 成立.

由 (1) 得

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m b_k, \quad \sum_{k=1}^m a_k^2 = \sum_{k=1}^m b_k^2.$$

由 (2), 取 $c = 8$ 得

$$\sum_{k=1}^m a_k^3 + \sum_{k=1}^m (c + b_k)^3 = \sum_{k=1}^m b_k^3 + \sum_{k=1}^m (c + a_k)^3.$$

所以性质④成立.

因为 A 中元素的和以及 B 中元素的和都是 $\sum_{k=1}^4 (a_k + b_k + c)$, 所以性质②成立.

因为当 $\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m b_k$ 时,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m a_k^2 + \sum_{k=1}^m (b_k + c)^2 \\
&= \sum_{k=1}^m (a_k^2 + b_k^2 + c^2 + 2cb_k) \\
&= \sum_{k=1}^m (a_k^2 + b_k^2 + c^2 + 2ca_k) \\
&= \sum_{k=1}^m b_k^2 + \sum_{k=1}^m (a_k + c)^2,
\end{aligned}$$

所以 A 中元素的平方和以及 B 中元素的平方和相等. 所以性质③成立.

综上, 如上构造的 A, B 是 S 的一个平衡划分, 并且满足性质④.

分析: 这里还要求立方和相同, 考虑用 (2) 的结论. 注意 (2) 中的 c 是任取的. 要构造集合 A, B 满足第三问新给出的条件, 观察到 (2) 中结论的等号两边都是 $2m$ 个数字相加, 所以可以尝试取 $m=4$. 这样就需要取 c 以及合适的 $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4$, 然后取

$$\begin{aligned}
A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, c + b_1, c + b_2, c + b_3, c + b_4\}, \\
B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, c + a_1, c + a_2, c + a_3, c + a_4\},
\end{aligned}$$

使得 A, B 满足性质 1. 在 (1) 中已经构造了 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的平衡划分, 自然可以取 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (8, 5, 3, 2)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 4, 6, 7)$, 然后取 $c = 8$, 这样就能构造满足性质 1 的两个集合:

$$\begin{aligned}
A &= \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}, \\
B &= \{1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16\}.
\end{aligned}$$

接下来尝试验证结论成立即可。

(4) 补 0 元素, 则 $\{1, 3, 4, 5, 9, 11\}, \{0, 2, 6, 7, 8, 10\}$ 是集合 $\{0, 1, 2, \dots, 11\}$ 的一个平衡划分.

由 (3) 中的证明过程, 取 $m=6$, $(a_1, \dots, a_6) = (1, 3, 4, 5, 9, 11)$, $(b_1, \dots, b_6) = (0, 2, 6, 7, 8, 10)$, $c=n$,

则

$$\sum_{k=1}^6 a_k^2 + \sum_{k=1}^6 (n + b_k)^2 = \sum_{k=1}^6 b_k^2 + \sum_{k=1}^6 (n + a_k)^2.$$

取 $A = \{(n+1)^2, (n+3)^2, (n+4)^2, (n+5)^2, (n+9)^2, (n+11)^2\}$,

$B = \{n^2, (n+2)^2, (n+6)^2, (n+7)^2, (n+8)^2, (n+10)^2\}$.

则 A, B 满足性质①.

因为 $\sum_{k=1}^6 a_k^2 = \sum_{k=1}^6 b_k^2$, 所以

$$\sum_{k=1}^6 (n + b_k)^2 = \sum_{k=1}^6 (n + a_k)^2.$$

即 A, B 满足性质②. $\square$

思考题

考虑集合 $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, 则 I_n 的元素之和为 $\frac{n(n+1)}{2}$. 如果 I_n 存在平衡划分, 则 $\frac{n(n+1)}{2}$ 是偶数, 从而 $n(n+1)$ 是 4 的倍数, 即 n 形如 $4k$ 或 $4k-1$, $k \in \mathbf{N}^*$.

显然, $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{1, 2, 3, 4\}$ 都不存在平衡划分.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 的一个平衡划分是 $\{1, 2, 4, 7\}$, $\{3, 5, 6\}$.

对于哪些正整数 n , 集合 I_n 存在平衡划分? 若存在, 如何给出一个平衡划分?

根据前面的观察, 当 $n = 7, 8, 11, 16$ 时集合 I_n 存在平衡划分. 更一般的, 可以自行思考. 思考这个问题应该有助于提升构造集合 (数列) 的经验.

4.

5.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.2 集合