

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.1 逻辑

1.1.1 命题逻辑初步

在数学里, 逻辑是指研究某个形式语言的有效推论. 逻辑使得我们描述问题时可以严谨、无歧义, 引导我们通过推理获得事物的本质.

然而, 数学推理无法建立在浮沙之上, 如果我们希望构建一个严密的推理体系, 我们必须从自然语言中识别出那一类“意义确定、不随人的主观意愿而改变”的语句. 这类语句最核心的特征在于: 它们所陈述的内容, 要么是事实, 要么与事实相悖, 二者必居其一.

于是我们称一个能判断真假的陈述句为**命题**

命题表述的陈述或真或假, 但不可兼具, 这时也称命题取真或取假, 一般用“T”表示真, 用“F”表示假. 称真值可以变化的命题为命题变元, 用小写字母 p, q, r 等表示.

问题 1.1 判断下列句子是否为命题.

- (1) 今天是星期五.
- (2) 你会说英语吗?
- (3) $3 - x = 5$.
- (4) 任一大于 2 的偶数一定可以表示为两个素数之和.
- (5) “我现在说的是假话.”

为保持逻辑的清晰, 对于较为复杂的表述, 需要将简单的命题复合成复杂命题, 这需要用下述**命题连结词**.

定义 1.1.1 (命题连结词). 命题连结词共五种, 依次为:

- (1) 否定, 若 p 为命题, 则 p 的否定“非 p ”也为命题, 记为 $\neg p$. p 与 $\neg p$ 的真值相反.
- (2) 合取, 若 p, q 为命题, 则“ p 且 q ”也为命题, 记为 $p \wedge q$. $p \wedge q$ 为真当且仅当 p, q 全为真.
- (3) 析取, 若 p, q 为命题, 则“ p 或 q ”也为命题, 记为 $p \vee q$. “ $p \vee q$ 为假”当且仅当“ p, q 全为假”.
- (4) 蕴涵, 若 p, q 为命题, 则 p 与 q 的蕴涵式“若 p 则 q ” (“ p 蕴涵 q ”) 也为命题, 记为 $p \rightarrow q$. “ $p \rightarrow q$ 为假”当且仅当“ p 为真, q 为假”.
- (5) 双蕴涵, 若 p, q 为命题, 则 p 与 q 的蕴涵式“ p 等价于 q ” (“ p 双蕴涵 q ”) 也为命题, 记为 $p \leftrightarrow q$. “ $p \leftrightarrow q$ 为真”当且仅当“ p, q 同时为真或同时为假”.

为描述复杂的事物关系, 有时需要将多个命题变元组合起来.

定义 1.1.2 (命题表达式). 由命题变元、逻辑联结词以及用于确定运算优先顺序的括号, 按照一定的逻辑规则组合而成的符号串, 称为**命题表达式**, 进行逻辑运算时, 命题连结词的优先级自高到低分别为: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

对于一个命题表达式, 若无论其中出现的命题变元如何取值, 表达式总取真, 则称此表达式为**永真式**; 若无论其中出现的命题变元如何取值, 表达式总取假, 则称此表达式为**永假式**; 上述情况以外的称为**可能式**.

问题 1.2 解答下述问题

(1) 记命题:

p : 你可以从校园网访问因特网

q : 你主修计算机科学

r : 你是新生

将“如果你主修计算机科学或不是新生, 你就可以从校园网访问因特网.”翻译为命题表达式.

(2)

儿子: “爸爸, 我要玩游戏.”

父亲: “你不做完作业就不能玩游戏.”

记命题:

p : 你做完了作业, q : 你可以玩游戏.

将“你不做完作业就不能玩游戏”翻译为命题表达式. 并思考: 按照父亲的逻辑, 儿子做完作业后是不是就可以玩游戏了?

从上述思考题可以发现, 命题的表示方法不唯一. 若在所有情况下命题 p, q 均具有相同的真值, 则称 p 与 q 逻辑等价, 记为 $p \Leftrightarrow q$, 此处仅列举三个常用的等值式:

德摩根律: $(\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg(A \vee B), (\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \wedge B)$

蕴涵等值: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

假言易位: $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

1.1.2 谓词

在语法上, 句子被划分成两部分: 主语以及剩下的谓语. 谓语告诉我们主语的部分信息.

问题 1.3 请指出下方两个句子的主语与谓语.

(1) 月球是地球的卫星.

(2) 为了抵抗海浪, 克努特大帝把脚弄湿了.

习惯了用 x 这样的符号来表示为质量的数学家可能会说上述两个句子的谓语分别是

(1) x 是地球的卫星.

(2) 为了抵抗海浪, x 把脚弄湿了.

这种描述方法的好处在于, 它写出了主语在句子中的位置, 我们只需要把 x 替换为合适的主语, 就能得到原话. 由此产生了如下的数学定义

定义 1.1.3 (谓词). 一个谓词是一句有关符号 x 的话. 当我们把 x 替换为元素 $a \in Y$ 时, 如果得到的陈述非真即假, 我们就说该谓词“对于集合 Y 是有效的”, 记得到的陈述的真值为 $P(a)$.

如果句子中的变量多于一个, 如“实数 $x > y$ ”, 那么它是一个二元谓词, 记作 $Q(x, y)$, 同理可扩展到多元情况.

已知对集合 S 有效的谓词 $P(x)$, 想知道它是否对 S 中的所有元素均为真, 或是 S 中是否存在部分元素使得 $P(x)$ 为真, 可以写出下述命题:

“对所有 $x \in S, P(x)$ 为真.”

“对某些 $x \in S, P(x)$ 为真.”

可以使用**全称量词** $\forall$ 和**存在量词** $\exists$ 来简化这两个命题的表述, 分别对应为¹

$$\forall x \in S : P(x)$$

$$\exists x \in S : P(x)$$

如果同时出现多个量词, 一定要注意它们的顺序.

问题 1.4 记 $P(x, y)$ 是谓词 “ $x + y = 0$ ”, 判断下述命题的真值:

$$(a). \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : P(x, y) \quad (b). \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : P(x, y)$$

1.1.3 涉及量词的等价式

在前面的几节中, 我们发现考察不同公式之间的等价式很有用, 本小节将研究一部分涉及量词的等价式.

我们用公式 $\neg \exists x P(x)$ 来陈述“人无完人”, 其中 $P(x)$ 表示“ x 是完美的”, 论域是所有人类. 但表达相同思想的另一种方式是: 每个人都算不上完美, 用公式写出是 $\forall x \neg P(x)$. 这两个公式是等价的. 类似的推理表明, $\neg \forall x P(x)$ 等价于 $\exists x \neg P(x)$. 说 $\neg \forall x P(x)$ 意味着并非对所有 x 值 $P(x)$ 都为真. 这等价于说至少有一个 x 值使 $P(x)$ 为假, 而这正是 $\exists x \neg P(x)$ 的意思.

于是, 我们得到下面两条涉及否定和量词的律:

定理 1.1.4.

$$\neg \exists x P(x) \text{ 等价于 } \forall x \neg P(x). \quad \neg \forall x P(x) \text{ 等价于 } \exists x \neg P(x).$$

1.1.4 原命题, 逆命题, 否命题与逆否命题

我们把形式为“若 p , 则 q ”的命题称为**原命题**, 并且可以通过交换条件与结论, 或对他们进行否定来构造出另外三个相关命题.

定义 1.1.5 (否命题、逆命题、逆否命题). 设原命题为“若 p , 则 q ”, 则

- (1) **否命题**为“若 $\neg p$, 则 $\neg q$ ”;
- (2) **逆命题**为“若 q , 则 p ”;
- (3) **逆否命题**为“若 $\neg q$, 则 $\neg p$ ”.

¹在日常生活中, “某些官员是廉洁的”这种命题是有弦外之音的, 但在数学中并非如此, $\exists x \in S : P(x)$ 这句陈述并未暗示确实存在一个 $x \in S$, 使得 $P(x)$ 为假.

问题 1.5 证明：原命题与逆否命题等价，逆命题与否命题等价。

1.1.5 常用的数学证明方法

直接证明法 此处不谈，这是常用的证明方法。

构造证明法 一般用于存在性问题证明，有时需要相当的洞察力，要求对问题结构有着深刻的理解。

反证法 看下面一个情景：母亲和小孩一起玩游戏。

母亲（充满爱意地）：“你是我最喜欢的小兔子。”

孩子（反驳）：“我不是一只兔子！”

母亲²：“你当然是一只小兔子！”

孩子（抗议）：“但是我没有毛茸茸的小尾巴！”

它们所做的事情就是反证的一个简单例子。

假如我是一只小兔子
那么我就会有一个毛茸茸的小尾巴
但是我没有一个毛茸茸的小尾巴
所以我不是一只小兔子

反证法的核心逻辑基于排中律（一个命题要么为真，要么为假，不存在中间状态）。参考上述例子，我们可确定其基本流程：

- (1) 假设要证明的结论不成立（原命题的否定为真）；
 - (2) 从假设出发经过正确的逻辑推导，得到一个与已知条件，公理，定义或基本事实相矛盾的结果；
 - (3) 既然推导无误，只可能“初始假设”错误，从而证明了原命题为真。
- 如果
直接证明时感觉待证命题过于宽泛，而其否命题是具体的；
结论中含有“不”、“至少（多）”、“唯一”、“无限”、“不存在”等词语
时，可以优先考虑反证法。

数学归纳法 将在第二章详细介绍。

²现实中，很多大人都喜欢和小孩子进行这种毫无意义的，傻乎乎的，却很可爱的对话。

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.1 逻辑

习题

A 组

1. 【2010 湖南适应性训练 2】下列命题中, (Δ) 是真命题.

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2$

(B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 < x^2$

(C) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 < x$

(D) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \cdot x = y$

2. 【2013 山东文 8 理 7】给定两个命题 p, q . 若 $\neg p$ 是 q 的必要而不充分条件, 则 p 是 $\neg q$ 的

(A) 充分不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

3. 【2025 北京 7】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 则“ $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$ ”是“对任意 $M \in \mathbb{R}$, 存在 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$ ”的

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

4. 【2023 武汉四调 7】阅读下段文字: “已知 $\sqrt{2}$ 为无理数, 若 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 为有理数, 则存在无理数 $a = b = \sqrt{2}$, 使得 a^b 为有理数, 若 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 为无理数, 则取无理数 $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$, 此时 $a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ 为有理数.” 依据这段文字可以证明的结论是

(A) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 是有理数

(B) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 是无理数

(C) 存在无理数 a, b 使得 a^b 为有理数

(D) 对任意无理数 a, b , 都有 a^b 为无理数

5. 【2007 湖北文 10 改编】(多选) 已知 p 是 r 的充分不必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件. 现有下列命题, 其中是真命题的有

(A) p 是 q 的充分不必要条件

(B) r 是 q 的必要不充分条件

(C) $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件

(D) r 是 s 的充分不必要条件

6. 【2016 北京 8】袋中装有偶数个球, 其中红球、黑球各占一半. 甲、乙、丙是三个空盒. 每次从袋中任意取出两个球, 将其中的一个球放入甲盒, 如果这个球是红球, 就将另一个球放入乙盒, 否则就放入丙盒. 重复上述过程, 直到袋中所有球都被放入盒中, 则

(A) 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球

(B) 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

(C) 乙盒中红球不多于与丙盒中红球

(D) 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

7. 【2016 浙江 4】写出命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*,$ 使得 $n \geq x^2$ ” 的否定形式.

8. 【2011 安徽 7】写出命题“所有能被 2 整除的整数都是偶数”的否定形式；
9. 【2016 全国 II 卷文 16 理 15】有三张卡片，分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲、乙、丙三人各取走一张卡片，甲看了乙的卡片后说：“我与乙的卡片上相同的数字不是 2”，乙看了丙的卡片后说：“我与丙的卡片上相同的数字不是 1”，丙说：“我的卡片上的数字之和不是 5”，求甲的卡片上的数字和.
10. 【2018-2019 年命题标准样题】甲、乙、丙、丁参加一比赛，赛前甲、乙、丙分别作出预测. 甲说：乙会获得奖牌；乙说：丙会获得金牌；丙说：丁不会获得银牌. 比赛结果有 3 人分别获得金牌、银牌和铜牌，另外 1 人没获得奖牌. 如果甲、乙、丙中有一人获得了金牌，而且只有获得金牌的那个人预测正确，则获得金牌的是？
11. 【2024 “圆梦杯（六）”（网络联考）14】现有 9 张卡片，其上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 若抽走 3 张卡片后，剩余 6 张卡片中的任意 3 个数字之和都不是 16，求抽走的 3 张卡片上的数字之和.
12. 【2018 新题型测试卷】10 名象棋选手进行单循环赛（即每两名选手比赛一场）. 规定两人对局胜者得 2 分，平局各得 1 分，负者得 0 分，并按总得分由高到低进行排序. 比赛结束后，10 名选手的得分各不相同，且第二名的得分是最后五名选手得分之和的 $\frac{4}{5}$ ，求第二名选手的得分.

1. D.
2. A. “ $\neg p$ 是 q 的必要条件”表示 $q \Rightarrow \neg p$, 取该式的逆否命题得到 $p \Rightarrow \neg q$. 而 $\neg p$ 不是 q 的充分条件, 所以 $\neg p \not\Rightarrow q$ 其逆否命题为 $\neg q \not\Rightarrow p$ 因此 p 是 $\neg q$ 的充分不必要条件, 故选 A.
3. A.
4. C. 题述文本的意思是, 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 存在无理数 b 使得 a^b 为有理数, 这符合选项 C 的叙述.
5. AC. 将条件翻译为蕴含关系: $p \Rightarrow r, r \not\Rightarrow p, q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$. 于是有 $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$. 因此 p 是 q 的充分条件. 又由于 $r \not\Rightarrow p$, 可取满足 r 且不满足 p 的情形; 由 $r \Rightarrow s \Rightarrow q$, 此时 q 成立而 p 不成立, 所以 $q \not\Rightarrow p$. 故 p 不是 q 的必要条件, 选项 A 正确.
由 $r \Rightarrow s \Rightarrow q \Rightarrow r$ 可知 r, s, q 等价, 于是 r, q, s 两两互为对方的充要条件, 选项 B, D 错误.
由选项 A 正确, 其逆否命题 “ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件” 同样成立, 选项 C 正确.
6. B. 设红球为 R , 黑球为 B , 将每次取出的两个球按 “先放入甲盒的球, 后放入乙盒或丙盒的球” 分类. 设四类球对的个数分别为 $x = RR, y = RB, z = BR, w = BB$, 其中第一字母表示放入甲盒的球, 第二字母表示放入乙盒或丙盒的球.
袋中红、黑球各占一半, 所以红球总数等于黑球总数, 即 $x + y + z = y + z + w$. 因而 $x = w$. 乙盒中的红球恰来自 RR 型球对, 其红球数为 x ; 丙盒中的黑球恰来自 BB 型球对, 其黑球数为 w . 故 乙盒中红球数 = 丙盒中黑球数 正确选项为 B.
7. $\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}^* n < x^2$.
8. 存在一个能被 2 整除但不是偶数的整数。
9. 4. 丙说 “我的卡片上的数字之和不是 5”, 所以丙不能拿 $\{2, 3\}$, 只能拿 $\{1, 2\}$ 或 $\{1, 3\}$. 乙说 “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 所以乙与丙不能同时持有含有公共数字 1 的两张卡片, 即乙、丙不能分别拿 $\{1, 2\}$ 与 $\{1, 3\}$.
若丙拿 $\{1, 2\}$, 则乙拿 $\{2, 3\}$, 甲拿 $\{1, 3\}$. 此时甲与乙的公共数字为 3, 不是 2, 甲的陈述成立.
若丙拿 $\{1, 3\}$, 则乙拿 $\{2, 3\}$, 甲拿 $\{1, 2\}$; 此时甲与乙的公共数字为 2, 甲的陈述 “不是 2” 不成立, 矛盾. 因此甲的卡片为 $\{1, 3\}$, 其数字和为 4.
10. 甲. 若甲获得金牌, 由甲预测正确可知乙获得奖牌, 如此推导下去, 最终不会产生矛盾, 结果为 (不唯一): 甲获得金牌, 乙获得银牌, 丙获得铜牌, 丁没获得奖牌. 若乙获得金牌, 则乙预测正确, 丙获得金牌, 矛盾. 若丙获得金牌, 则乙的预测 “丙获得金牌” 为真, 但乙不是金牌获得者, 矛盾. 所以获得金牌的是甲.
11. 24. 三个剩余数字的和为 16 的三元组共有
 $\{1, 6, 9\}, \{1, 7, 8\}, \{2, 5, 9\}, \{2, 6, 8\}, \{3, 4, 9\}, \{3, 5, 8\}, \{3, 6, 7\}, \{4, 5, 7\}$
抽走的三张卡片必须与每一个上述三元组都有交集, 否则该三元组会完整地留在剩余六张卡片中. 唯一能与上述八个三元组均相交的组合是 $\{7, 8, 9\}$ 抽走的数字和为 24.

12.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.1 逻辑

B 组

1. 【2019TMUA-Paper 2 第 17 题】给定一个命题 p . 已知下面四个命题有且仅有一个是真命题, 则真命题是

- (A) p 的充分必要条件是 $x > 1$ (B) p 的充分条件是 $x > 1$
(C) p 的充分必要条件是 $x > 2$ (D) p 的充分条件是 $x > 2$

2. 【2015AMC12A 第 13 题改编】(多选) 某联盟中有 12 支球队举行循环赛, 每一队都恰与其他各队比赛一场, 每一场比赛的结局可能是一队获胜或两队平手, 获胜者得积分 2 分, 平手者各得积分 1 分. 关于 12 队的积分记录, 下列叙述正确的是

- (A) 一定有偶数队其积分为奇数 (B) 一定有偶数队其积分为偶数
(C) 不可能有两队 0 分 (D) 最高积分至少有 12 分

3. 【2022AMC12A 第 9 题】万圣节那天, 31 个孩子走进校长办公室要糖果. 孩子们有三种类型: 有些人总说谎话, 有些人总说真话, 有些人交替说谎话和真话. 对于那些交替说谎话和真话的孩子, 每个人首先对自己的第一个回答做出是说谎话还是说真话的选择, 而随后的每次陈述是否说真话则与前一次情况相反. 校长按如下的顺序问了每个孩子同样的三个问题:

“你是总说真话吗?” 校长给回答“是”的 22 个孩子每人一块糖果.

“你是交替说谎话和真话吗?” 校长给回答“是”的 15 个孩子每人一块糖果.

“你是总说谎话吗?” 校长给回答“是”的 9 个孩子每人一块糖果.

问校长给了总说真话的孩子们一共多少块糖果?

4. 【2015 STEP3 第 5 题】阅读如下证明 $\sqrt{2}$ 是无理数的一种方法:

Step 1: 用反证法, 设 $\sqrt{2}$ 是有理数.

Step 2: 设集合 $S = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N}^*\}$.

Step 3: 证明 S 不是空集, 即 S 至少包含一个正整数.

Step 4: 设 k 是 S 中最小的正整数.

Step 5: 证明 $(\sqrt{2} - 1)k \in S$.

Step 6: Step 4 和 Step 5 矛盾, 从而 $\sqrt{2}$ 是无理数.

给出 Step 3、Step 5、Step 6 的证明过程.

5. 使用反证法证明:

- (1) 两个实数 a, b 相等当且仅当对任意 $\varepsilon > 0: |a - b| < \varepsilon$;

- (2) $\sqrt{2}, \log_2 3$ 是无理数;
- (3) 对于所有实数 $x, \sqrt{3}+x, \sqrt{3}-x$ 中至少有一个是无理数;
- (4) 不存在大于 $\sqrt{2}$ 的最小有理数;
- (5) $x, y \in \mathbb{R}, y < x$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $y < x + \varepsilon$;
- (6) 在集合 $S = \{x \mid x = 1 + (n-1)\sqrt{3}, n \in \mathbb{N}^*\}$ 中任取三个元素 x, y, z , 证明: x, y, z 不可能构成等比数列.
6. 已知函数 $f(x) = kx + \cos(kx) (k \in \mathbb{N}^*)$, 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 A_n , 记 $B_n = \sum_{i=1}^n f(a_i)$.
证明: “ $A_{2026} = \frac{1013\pi}{k}$ ” 的 “ $B_{2026} = 1013\pi$ ” 的充要条件;
7. 在 n 行 n 列的数表中填 n^2 个数字, 每一格有且只有一个数字, 定义变换 $T(i, j)$: 将第 i 行与第 j 列的所有格子中的数字同时加上 1 或减去 1. 证明: 无法通过有限次 $T(i, j)$ 变换得到每格均为数字 1 的数表.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.

参考文献

- [1] 伊恩·斯图尔特. 基础数学讲义: 走向真正的数学 [M]. 姜[?]译. 北京: 人民邮电出版社, 2024.
- [2] 肯尼思·H. 罗森. 离散数学及其应用 (原书第 8 版)[M]. 徐六通, 杨娟, 吴斌, 译. 北京: 机械工业出版社, 2019.

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.1 逻辑

第一章 集合、映射与逻辑初步

1.1 逻辑